KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESNEK PARAMETRİK METRİK UZAYLAR VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

YEŞİM TUNÇAY

KOCAELİ 2023

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESNEK PARAMETRİK METRİK UZAYLAR VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

YEŞİM TUNÇAY

Doç. Dr. Vildan ÇETKİN Danışman,	Kocaeli Üniv.	.....
Prof. Dr. Abdülkadir AYGÜNOĞLU Jüri Üyesi,	Kocaeli Üniv.	.....
Dr. Öğr. Üyesi Vildan YAZICI Jüri Üyesi,	Kocaeli Sağlık ve Teknoloji Üniv.	.....

Tezin Savunulduğu Tarih: 31.03.2023

ETİK BEYAN VE ARAŞTIRMA FONU DESTEĞİ

Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez/proje çalışmasında,

- Bu tezin/projenin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu,

- Çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı,

- Bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi,

- Bu çalışmanın Kocaeli Üniversitesi'nin abone olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun olduğunu,

- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,

- Tezin/Projenin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez/proje çalışması olarak sunmadığımı,

beyan ederim.

☒ Bu tez/proje çalışmasının herhangi bir aşaması hiçbir kurum/kuruluş tarafından maddi/alt yapı desteği ile desteklenmemiştir.

☐ Bu tez/proje çalışması kapsamında üretilen veri ve bilgiler **.....** tarafından **.....** no'lu proje kapsamında maddi/alt yapı desteği alınarak gerçekleştirilmiştir.

Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Yeşim TUNÇAY

YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI

Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/projemin tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda belirtilen koşullarla kullanıma açma izninin Kocaeli Üniversitesi'ne verdiğimi beyan ederim. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet hakları bende kalacak, tezimin/projemin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki makale, kitap, tebliğ, lisans, patent gibi çalışmalarda kullanımı, danışmanımın isim hakkı saklı kalmak koşuluyla ve her iki tarafın bilgisi dâhilinde bana ait olacaktır. Tezin/projenin kendi özgün çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin/projenin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim. Yükseköğretim kurulu tarafından yayınlanan ***"Lisanüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge"*** kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricinde YÖK Ulusal Tez Merkezi/ Kocaeli Üniversitesi Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

☐ Enstitü yönetim kurulu kararı ile tezimin/projemin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 2 yıl ertelenmiştir.

☐ Enstitü yönetim kurulu gerekçeli kararı ile tezimin/projemin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 6 ay ertelenmiştir.

☒ Tezim/projem ile ilgili gizlilik kararı verilmemiştir.

Yeşim TUNÇAY

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜRLER

Bu çalışmada, verilen iki nokta arasındaki uzaklığı belli bir parametre değerine göre ölçmeye olanak sağlayan parametrik metrik kavramı ve bu kavramın çeşitli genellemeleri olan parametrik b-metrik, parametrik S-metrik ve parametrik 2-metrik kavramları incelenmiştir. Metrik uzaylar teorisinde önemli bir yer tutan ve bir çok disipline uygulaması olan sabit nokta teoremleri de yine sırasıyla verilen her bir parametrik metrik uzay türünde ele alınmıştır. Son olarak, parametrik metrik uzay kavramı esnek evrene genişletilerek esnek parametrik metrik uzay kavramı tanımlanmış ve ilgili uzaylarda çeşitli sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır.

Tez hazırlama sürecimde desteğini, ilgisini ve akademik bilgisini benden esirgemeyen Kocaeli Üniversitesi akademik personellerinden kıymetli hocam, sayın Doç. Dr. Vildan ÇETKİN ’e teşekkür ederim. Bu süreçte bana ilgisini esirgemeyen ve yalnız bırakmayan başta annem Nesli TUNÇAY ve babam İlhami TUNÇAY olmak üzere tüm aileme ve sevdiklerime desteklerinden dolayı minnet duygularımı sunarım.

Nisan - 2023 Yeşim TUNÇAY

İÇİNDEKİLER

ETİK BEYAN VE ARAŞTIRMA FONU DESTEĞİ i
YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜRLER iii
İÇİNDEKİLER iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ v
ÖZET vi
ABSTRACT vii
1.GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 3
3. PARAMETRİK METRİK UZAYLAR 7
3.1. Parametrik Metrik Uzaylar 7
3.2. Parametrik B-Metrik Uzaylar 8
3.3. Parametrik 2-Metrik Uzaylar 10
3.4. Parametrik S-Metrik Uzaylar 12
4. PARAMETRİK METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ 16
4.1. Parametrik Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri 16
4.2. Parametrik B-Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri 20
4.3. Parametrik 2-Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri 27
4.4. Parametrik S-Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri 32
5.ESNEK PARAMETRİK METRİK UZAYLAR VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ 36
5.1. Esnek Parametrik Metrik Uzaylar 36
5.2. Esnek Parametrik Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri 50
6.SONUÇLAR VE ÖNERİLER 58
KAYNAKLAR 59
KİŞİSEL YAYINLAR VE ESERLER 61
ÖZGEÇMİŞ 62

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

X, Y, Z	: evrensel küme
A, C, D	: parametre kümesi
B	: esnek noktaların ailesi
$Bd(F(X,A))$	: $F(X,A)$ esnek sınırı
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi
$Cl(F(X,A))$	: $F(X,A)$ esnek kapanışı
$F(X,A), G(X,B), (H,C), (K,D)$	: X de esnek kümeler
$(F,A)^C$	: $F(X,A)$ esnek tümleyeni
$int(F(X,A))$	: $F(X,A)$'nın tüm iç noktalarının kümesi
$P(X)$	: X in bir güç kümesi
$SS(X,A)$	: X de bütün esnek kümelerin ailesi
$\sqsubseteq$	: altküme
0_A	: boş esnek küme
1_A	: mutlak (evrensel) esnek küme
Δ	: esnek fark
τ	: X üzerinde esnek bir topoloji
τ^c	: esnek kapalı küme

Kısaltmalar

PM-uzay	: Parametrik metrik uzay
PbM-uzay	: Parametrik B- metrik uzay
PSM-uzay	: Parametrik S-metrik uzay

PARAMETRİK METRİK UZAYLAR VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

ÖZET

Bu çalışmada belli bir parametreye göre iki esnek nokta arasındaki uzaklığı ölçmeye yarayan esnek parametrik metrik uzay kavramı araştırıldı. Bu bağlamda, esnek noktaları kullanarak parametrik metrik uzaylara yeni bir yaklaşım geliştirildi. Böylece, parametrik metrik uzayların bir esnek yaklaşımı elde edildi. Esnek parametrik metrik uzayların bir takım temel ve topolojik özellikleri çalışıldı. Açıklayıcı örnekler yardımıyla ilgili uzaylardaki bazı temel kavramlarda tanıtıldı. Ayrıca bu uzaylarda esnek nokta dizilerinin yakınsaklığı tanımlanarak esnek esnek metrik uzaylar için tam uzay olmayı ifade edildi. Esnek parametrik metrik uzaylardaki koşullar altında sabit esnek noktaların varlığını araştırıldı. Bu bağlamda, bu çalışma dört ana bölümden oluştu. 1. Bölüm ana bölümler için gerekli olan bazı temel kavramları ve gösterimlerini içerirdi. 2. Bölüm parametrik parametrik metrik uzay, parametrik b-metrik uzay,parametrik 2-metrik ve parametrik S-metrik uzayların tanıtılmasına ayrıldı. 3.bölüm bir önceki bölümde verilen çeşitli parametrik metrik uzaylardaki sabit nokta teoremlerinin hatırlatılmasına ayrıldı. Son bölümde ise parametrik metrik uzay kavramı esnek evrene genişletilmiş ve böylece esnek parametrik metrik uzay tanımlandı. Buna ek olarak esnek parametrik metrik uzaylarda sabit noktanın varlığı ve tekliği araştırıldı.

Anahtar Kelimeler: Esnek Dönüşüm, Esnek Küme, Esnek Metrik, Esnek Nokta, Parametrik Metrik.

PARAMETRİK METRİK UZAYLAR VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

ABSTRACT

In this study, the concept of soft parametric metric space, which is used to measure the distance between two soft points according to a certain parameter, was investigated. In this context, a new approach to parametric metric spaces has been developed using soft points. Thus, a soft version of parametric metric spaces was obtained. A number of basic properties of soft parametric metric spaces have been studied. Some basic concepts in related spaces are also introduced with the help of illustrative examples. In addition, the convergence of soft point sequences in these spaces is defined and thus full space is expressed for soft parametric metric spaces. It is devoted to investigating the existence of fixed elastic points under conditions in soft parametric metric spaces. We recall some basic concepts and notations necessary for the main sections. In Chapter 2, information is given about parametric metric space, parametric b-metric space, parametric 2-metric and parametric S-metric spaces. In section 3, we show under what conditions two soft self-mappings of the parametric metric and types given in the previous section have common fixed soft points. In the fourth chapter, soft parametric metric space and fixed point theorems are explained.

Keywords: Self-mappings, Soft Set, Soft Metric, Soft Point, Parametric Metric.

1.GİRİŞ

Öz dönüşümlerde sabit noktalarının varlığını ve tekliğini gösteren araştırmalar matematik, ekonomi, mühendislik ve istatistikte çeşitli uygulamalara sahiptir. Matematiksel açıdan, sabit nokta teorisi, diferansiyel ve integral denklemler, yaklaşımlar, oyunlar vb. içeren çeşitli problemlerde uygulanabilirliği nedeniyle araştırmaya değerdir. Bu sebeplerden dolayı varlığın ve tekliğin tespiti için (ortak) sabit noktalar ve farklı metrik uzay türlerinde çakışan sabit noktalar, matematiğin farklı dallarında çalışan araştırmacıların dikkatine sunulmuştur.Parametrik bir metrik uzay kavramı (Hussain ve diğ., 2014) tarafından tanımlanmıştır. Bu tanıma göre uzayın noktaları arasındaki uzaklık parametrelere göre değerler alır. Ölçme aracı bu uzaylarda parametrelere bağlı olduğu için klasik metriğin parametreleştirilmiş uzantısı olarak düşünülebilir. Bu fikir birkaç yazar tarafından dikkat çekmiş ve metrik uzayların zayıf ve güçlü formlarına uygulanmıştır. (Rao ve diğ., 2014) parametrik S-metrik uzayları sundu ve parametrik S-metrik uzaylarda ortak sabit nokta teoremlerini kanıtladı. Daha sonra (Çetkin, 2019) parametrik 2-metrik uzaylar kavramını tanıtmış ve bunların bazı özelliklerini ve sabit nokta sonuçlarını araştırmıştır.Parametrik metrik uzayların farklı versiyonları ve önerilen uzayların sabit noktaları üzerindeki araştırmalar birkaç yazar tarafından ele alınmıştır. Ayrıca (Das ve Samanta, 2013) tarafından tanıtılan esnek metrik uzaylar kavramı, parametreleştirme aracına dayalı metrik uzayların genellemelerinden biridir. Aslında, esnek metrik, herhangi bir esnek uzayda iki esnek nokta arasındaki mesafeyi ölçen kesin bir mesafe işlevidir. Yani parametreleştirme aracı sadece esnek uzayın noktaları için kullanılır. Günümüzde esnek metrik uzaylar ve bunların sabit nokta teoremleri üzerine araştırmalar yaygındır.(Tunçay ve Çetkin,2021) parametrik metrik uzaylarda ve esnek metrik uzaylarda parametreleştirme aracının rolünü genişleterek parametrik esnek metrik uzay kavramını tanımlamış ve bu uzayların temel özelliklerini gözlemlemişlerdir. Bu nedenle, parametrik esnek metriği kullanarak, esnek uzayda seçilen bazı parametrelere göre iki esnek nokta arasındaki mesafe ölçülür. Bu çalışma, (tam) bir parametrik esnek metrik uzayda tanımlanan öz-esnek dönüşümlerin sabit esnek noktalarının ve ortak sabit esnek noktalarının varlığını ve tekliğini göstermeyi amaçlamaktadır. Bu nedenle, parametrelerin esnek reel sayılar olduğu iki esnek nokta arasındaki parametrelenmiş uzaklığı sağlayarak, gözlemliyoruz. Bazı sabit noktaların uzantıları önerilen uzaylarda sonuçlanır. Bu çalışma aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir.

1.Bölümde esnek kümeler, esnek küme özellikleri ve esnek metrik kavramı hatırlatılmıştır. 2. Bölümde iki nokta arasındaki uzaklığı bir parametreye göre ölçen parametrik metrik uzay ve bu kavramın bazı genişlemeleri olan parametrik b-metrik uzay, parametrik 2-metrik ve parametrik S-metrik uzaylar açıklayıcı örneklerle birlikte hatırlatılmıştır. 3. Bölümde parametrik metrik uzay, parametrik b-metrik uzay, parametrik 2-metrik ve parametrik S-metrik uzaylardaki öz dönüşümlerin sabit noktaları varlığı çalışılmıştır. 4. Bölümde esnek parametrik metrik uzay tanımlanmış ve bu uzayların bir takım temel ve topolojik özellikleri incelenmiştir. Son olarak ilgili uzaylardaki sabit noktaların varlığı araştırlmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bazı temel kavramlar ve sonuçlar verilecektir.

Tanım 2.1. Z evrensel bir küme ve B değişkenlerin bir kümesi ve $P(Z)$ de Z in bir kümesini alalım. $H: B \to P(Z)$ bir dönüşüm olacak şekilde (H, B) ikilisi Z kümesinde bir esnek küme adı verilir. Z üzerindeki bütün esnek kümelerin ailesi $SS(Z, B)$ ile gösterilir.

$\forall b \in B$ için $(H, B) = \{(b, H(b)): b \in B, H(b) \in P(Z)\}$ (Molodtsov, 1999).

Örnek 2.2. $(H, B) \in SS(Z, B)$, bir C kişisinin almak istediği evlerin özelliklerini göstersin. $Y = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$ evlerin kümesi ve $A = \{\text{geniş}, \text{güzel}, \text{beton}, \text{ucuz}, \text{yeni}\} = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$ değişkenlerini alalım. H alalım: Mesela, $h(c_1)$ "geniş evler" demektir ve dönüşüm değeri $\{k \in Y: k\ geniş\ ev\}$ kümesidir.

$H(c_1) = \{k_2, k_4\}$, $H(c_2) = \{k_1, k_3\}$, $H(c_3) = \emptyset$, $H(c_4) = \{k_1, k_3, k_5\}$ ve $H(c_5) = \{k_1\}$ olsun. $(H, B) = \{(\text{geniş ev}, \{k_2, k_4\}), (\text{güzel ev}, \{k_1, k_3\}), (\text{beton ev}, \emptyset), (\text{ucuz ev}, \{k_1, k_3, k_5\}), (\text{yeni ev}, \{k_1\})\}$ (Aktaş ve Çağman, 2007).

Tanım 2.3. (L, E), $(K, D) \in SS(Z, B)$ olsun.

(L, E) ikilisine (K, D) ikilisinin alt kümesidir denir :$\Leftrightarrow$

i) $E \subset D$

ii) $\forall \text{m} \in E, L(\text{m}) \subseteq K(\text{m})$.

$(L, E) \subseteq (K, D)$ şeklinde gösterilir (Feng ve diğ., 2010).

Tanım 2.4. $\forall \alpha \in C$ için $H^C(\alpha) = Z - H(\alpha)$ olması durumunda $H^C: B \to \mathcal{P}(Z)$ dönüşümüne (H, C) esnek kümesinin esnek tümleyeni olarak adlandırılır, gösterim şekli $(H, A)^C = (H^C, A)$ dir (Feng ve diğ., 2010).

Tanım 2.5. $(K,D) \in SS(Z,B)$,

i) (K,D) kümesine esnek boş küme denir : $\Leftrightarrow \forall \alpha \in D$ için $H(\alpha) = \emptyset$. $\widetilde{\emptyset}$ ile gösterilir.

ii) (K,D) kümesine mutlak esnek küme olarak adlandırılır : $\Leftrightarrow \forall \alpha \in D$ için $H(\alpha) = Z$. $\tilde{Z}$ ile gösterilir (Maji ve diğ., 2002).

Tanım 2.6. $(K,D),(L,D) \in SS(Z,B)$ olsun. (K,D) ve (L,D) nin esnek birleşimi (H,D) olmak üzere, her $\alpha \in D$ için $H(\alpha) = K(\alpha) \cup L(\alpha)$ şeklinde tanımlanır ve gösterim şekli $(H,D) = (K,D) \,\widetilde{\cup}\, (L,D)$ dir (Maji ve diğ., 2002).

Tanım 2.7. $(K,D),(L,D) \in SS(Z,B)$ olsun. Bu takdirde verilen esnek kümelerin kesişim işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır ve $(M,D) = (K,D) \,\widetilde{\cap}\, (L,D)$ biçiminde gösterilir. Her $\alpha \in D$ için $M(\alpha) = K(\alpha) \cap L(\alpha)$ (Feng ve diğ., 2008).

Önerme 2.8. $(K,D),(L,D) \in SS(Z,B)$ alalım. Bu durumda,

i) $((K,D) \,\widetilde{\cup}\, (L,D))^c = (K,D)^c \,\widetilde{\cap}\, (L,D)^c$

ii) $((K,D) \,\widetilde{\cap}\, (L,D))^c = (K,D) \,\widetilde{\cup}\, (L,D)^c$ (Shabir ve Naz, 2011).

Tanım 2.9. Z bir küme, D değişkenlerin kümesi olsun.

$\varepsilon: D \to Z$ dönüşümüne Z de bir esnek eleman olarak adlandırılır. D parametre kümesi verildiğinde her $b \in D$, $\varepsilon(b) \in H(b)$ ise ε esnek elemanı H ye aittir denir ve gösterim şekli $\varepsilon \,\widetilde{\in}\, H$ dir . Her tek elemanlı esnek kümeye sadece bir tek esnek eleman karşılık geliyorsa buna tek noktalı esnek küme denir (Das ve Samanta, 2012).

Tanım 2.10. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, ve $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin boştan farklı tüm sınırlı alt kümelerinin ailesi ve D parametreler kümesi alalım. $H: D \to \mathcal{B}(\mathbb{R})$ dönüşümüne esnek reel küme denir, gösterim şekli (H,D) dir. (H,D) esnek reel kümesi tek elemanlı esnek küme ise (H,D) kümesine karşılık gelen esnek eleman ile ilişkilendirerek bu esnek kümeye esnek reel sayı denir.

Esnek reel sayılar için $\tilde{r}, \tilde{s}, \tilde{t}$ .... gösterimleri kullanılır ve özel olarak $\forall a \in A$ için $\bar{r}(a) = r \in \mathcal{R}$ ise $\bar{r}$ esnek reel sayı gösterimi de kullanılır (Das ve Samanta, 2012).

Tanım 2.11. Tüm esnek reel kümelerin ailesinin gösterim şekli $R(D)$, pozitif esnek reel sayılar ailesinin gösterim şekli $\mathbb{R}(D)^*$ dir (Das ve Samanta, 2012).

Tanım 2.12. Esnek reel sayıları için sıralama bağıntısı parametreler üzerinden reel sayılar arasındaki sıralama bağıntısı kullanılarak tanımlanır (Das ve Samanta, 2012).

Tanım 2.13. Z deki (H, D) esnek kümesine bir esnek nokta olarak adlandırılır ve $\lambda \in D$, $x \in Z$ olmak üzere P_λ^x ile gösterilir. P_λ^x esnek noktası aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Her $\alpha \in A$ ve x $\in X$ için

$P_\lambda^x(\alpha) = \begin{cases} \{x\} & \alpha = \lambda \\ \emptyset & \alpha \neq \lambda \end{cases}$ (Das ve Samanta, 2012).

Tanım 2.14. $\mathfrak{B}$ esnek noktaların ailesi olması durumunda $\mathfrak{B}$ nin ürettiği esnek küme gösterim şekli $SS(\mathfrak{B})$ dir. Bunun yanı sıra (K, D) esnek kümesine ait olan tüm esnek noktalarının ailesinin gösterim şekli $SP(K, D)$ dir (Das ve Samanta, 2012).

Tanım 2.15. $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1 \; ve \; \mathfrak{B}_2$ esnek noktalarının aileleri ve $(L, E), (K, D)$ esnek kümeler olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:

i) $SP(SS(\mathfrak{B})) = \mathfrak{B}; SS(SP(K, D)) = (K, D)$

ii) $SP((K, D) \,\tilde{\cup}\, (L, E)) = SP((K, D) \cup SP(L, E)$
$SP\big((K, D) \,\tilde{\cap}\, (L, E)\big) = SP((K, D) \cap SP(L, E))$

iii) $SS(\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2) = SS(\mathfrak{B}_1) \;\tilde{\cup}\; SS(\mathfrak{B}_2)$ ve $SS(\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2) = SS(\mathfrak{B}_1) \;\tilde{\cap}\; SS(\mathfrak{B}_2)$

(Das ve Samanta, 2012).

Tanım 2.16. C parametreler kümesi ve Z bir küme olsun. Bu durumda altta verilen koşulları sağlayan $d: SP(\tilde{Z}) \times SP(\tilde{Z}) \to \mathbb{R}(C)^*$ dönüşümüne $\tilde{Z}$ esnek kümesinde bir esnek metrik adı verilir. Her $P_\lambda^x, P_\mu^y, P_\gamma^z \in SP(\tilde{Z})$ için

i) $d(P_\lambda^x, P_\mu^y) \,\tilde{\geq}\, \bar{0}$

ii) $d\big(P_\lambda^x, P_\mu^y\big) = \bar{0} :\Leftrightarrow P_\lambda^x = P_\mu^y (x = y \wedge \mu = \lambda)$

iii) $d(P_\lambda^x, P_\mu^y) = d(P_\mu^y, P_\lambda^x)$

iv) $d\left(P_\lambda^x, P_\gamma^z\right) \tilde{\leq} d\left(P_\lambda^x, P_\mu^y\right) + d\left(P_\mu^y, P_\gamma^z\right)$

d esnek metriğiyle birlikte $\tilde{Z}$ esnek kümesi esnek metrik uzay olarak adlandırılır, gösterim şekli $(\tilde{Z}, d)$ dir (Das ve Samanta, 2012).

Örnek 2.17. Aşağıdaki şekilde tanımlanan $d: SP(\tilde{Z}) \times SP(\tilde{Z}) \to \mathbb{R}(D)^*$ dönüşümü $\tilde{Z}$ üzerinde bir esnek metriktir. Her P_λ^x, $P_\mu^y \in SP(\tilde{Z})$ için

$$d(P_\lambda^x, P_\mu^y) = \begin{cases} \bar{0}, P_\lambda^x = P_\mu^y \\ \bar{1}, P_\lambda^x \neq P_\mu^y \end{cases}$$

$\tilde{Z}$, ayrık esnek metrik ve $(\tilde{Z}, \mathrm{d})$ çifti, ayrık metrik uzay denir (Das ve Samanta, 2012).

Örnek 2.18. $Z \subset R$ bir küme ve $D \subset R$ mutlak esnek küme olmak üzere $\forall \lambda \in D$ için $H(b) = Y$ olsun. $\forall b \in D$ için $\bar{x}(b) = x$ olacak şekilde $\bar{x}$ esnek reel sayısı tanımlansın. Her P_λ^x, $P_\mu^y \tilde{\in} \tilde{Z}$ için

$d\left(P_\lambda^x, P_\mu^y\right) = |\bar{x} - \bar{y}| + \left|\bar{\lambda} - \bar{\mu}\right|$ ile tanımlanan $d: SP(\tilde{Z}) \times SP(\tilde{Z}) \to \mathbb{R}(D)^*$, $\tilde{Z}$ üzerinde bir esnek metriktir (Das ve Samanta, 2012).

Tanım 2.19. $(\tilde{Z}, d)$ esnek metrik uzay olsun. Eğer her P_λ^x, $P_\mu^y \in SP(\tilde{Z})$ için $d(P_\lambda^x, P_\mu^y) \tilde{\leq} \tilde{k}$ olacak şekilde bir $\tilde{k}$ negatif olmayan esnek reel sayısı varsa $(\tilde{Z}, d)$ ye sınırlı esnek metrik uzay olarak adlandırılır, aksi halde sınırsız esnek metrik uzay denir (Das ve Samanta, 2012).

Tanım 2.20. $(\tilde{Z}, d)$ esnek metrik uzay ve (H, D), $\tilde{Z}$ in esnek alt kümesi olsun.

Her $P_\lambda^x, P_\mu^y \tilde{\in} SP(H, D)$, $d_y\left(P_\lambda^x, P_\mu^y\right) = d(P_\lambda^x, P_\mu^y)$ ile verilen

$d_y: SP(H, D) \times SP(H, D) \to \mathbb{R}(D)^*$, (H, D) üzerinde bir esnek metriktir. (H, d_H) uzayına da $(\tilde{Z}, d)$ esnek metrik uzayının bir esnek alt metrik uzayı olarak adlandırılır (Das ve Samanta, 2012).

3.PARAMETRİK METRİK UZAYLAR

Bu bölümde parametrik metrik, parametrik b-metrik, parametrik 2-metrik ve parametrik S-metrik uzaylarla ile ilgili tanımlar ve örnekler verilmiştir.

3.1.Parametrik Metrik Uzaylar

Tanım 3.1.1. $Z \neq \emptyset$ ve her $\theta, \omega, \tau \in Z$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $\rho: Z \times Z \times (0,\infty) \to (0,\infty)$ dönüşümüne Z de bir parametrik metrik (veya parametrik uzaklık fonksiyonu) adı verilir. Her $t > 0$ için

i) $\rho(\theta, \omega, t) = 0 \Leftrightarrow \theta = \omega$;

ii) $\rho(\theta, \omega. t) = \rho(\omega, \theta, t)$;

iii) $\rho(\theta, \omega, t) \leq \rho(\theta, \tau, t) + \rho(\tau, \omega, t)$.

Üzerinde tanımlanan ρ parametrik metriği ile birlikte Z kümesine parametrik metrik uzay (PM-uzay) denir ve gösterim şekli (Z, ρ) dir (Hussain ve diğ., 2014).

Örnek 3.1.2. $Z = \{f | f: (0,\infty) \to R\}$ olsun. $\rho: Z \times Z \times (0,\infty) \to (0,\infty)$ dönüşümü her $t > 0$, $h, k \in Z$ için

$$\rho(h, k, t) = |h(t) - k(t)|$$

alalım. Böylece ρ, Z üzerinde bir parametrik metriktir (Hussain ve diğ., 2014).

Tanım 3.1.3. ρ, Z parametrik uzaklık fonksiyonu, $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq Z$ ve $x \in Z$ olsun. Her t pozitif parametresi için

i) $\lim_{n\to\infty} \rho(x_m, x, t) = 0$ oluyorsa $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisine x noktasına yakınsaktır denir ve $\lim_{n\to\infty} x_m = x$ ile gösterilir.

ii) $\lim_{m,l\to\infty} \rho(x_m, x_l, t) = 0$ oluyorsa $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ Cauchy dizisi olarak adlandırılır.

iii) Eğer Z üzerindeki her Cauchy dizisi Z de yakınsak dizi $\Longrightarrow (Z, \rho)$ parametrik metrik uzayına tam parametrik metrik uzay denir (Hussain ve diğ., 2014).

Tanım 3.1.4. ρ, Z üzerinde bir parametrik uzaklık fonksiyonu, $T: Z \to Z$ fonksiyon ve $x \in Z$ olsun. Eğer (Z, ρ) uzayında $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şartını sağlayan her $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$ oluyorsa , T fonksiyonuna x noktasında dizisel süreklidir denir (Hussain ve diğ., 2015).

Tanım 3.1.5. ρ, Z üzerinde bir parametrik uzaklık fonksiyonu , $a, y \in Z$ ve $r, t \geq 0$ olsun.

$B(a, r) = \{z \in Z | \rho(a, y, t) < r\}$ olan küme , Y de a merkezli r yarıçaplı bir açık yuvardır.

Bir alt taban olarak her açık yuvarların ailesi ile oluşturulan topolojiye X üzerinde parametrik metrik topoloji denir ve τ ile gösterilir. τ nun elemanlarına açık küme ve bunun tümleyenine kapalı küme olarak adlandırılır (Franklin ,1965).

Tanım 3.1.6.

i) (Z, σ) ikilisine kompakt uzay adı verilir : $\Leftrightarrow$ Z'de ki her dizi yakınsak alt diziye sahiptir.

ii) (Z, σ) ikilisine sınırlı uzay adı verilir : $\Leftrightarrow$ $\exists K > 0 : \sigma(\theta, \omega, t) \leq K$ (Franklin ,1965).

3.2.Parametrik B-Metrik Uzaylar

Tanım 3.2.1. Z küme, $s \geq 1$ olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\rho: Z \times Z \times (0, \infty) \to [0, \infty)$ operasyonuna Z de bir parametrik b-metrik (veya parametrik uzaklık fonksiyonu) adı verilir. Her $t > 0$ ve $\theta, \omega, \tau \in Z$ için

i) $\rho(\theta, \omega, t) = 0 \Leftrightarrow \theta = \omega$;

ii) $\rho(\theta, \omega, t) = \rho(\omega, \theta, t)$;

iii) $\rho(\theta, \omega, , t) \leq s[\rho(\theta, \tau, t) + \rho(\tau, \omega, t)]$.

Üzerinde tanımlanan ρ parametrik b-metriği ile birlikte Z kümesine bir parametrik b-metrik uzay (PbM-uzay) adı verilir. $s \geq 1$ olmak üzere bu uzay (Z, ρ, s) üçlüsü ile gösterilir (Hussain ve diğ., 2015) .

Örnek 3.2.2. $X = [0, \infty)$ olmak üzere $\rho: X \times X \times (0, \infty) \to [0, \infty)$ dönüşümü $\rho(\theta, \omega, t) = t(\theta - \omega)^p$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda, $s = 2^p$ sabiti olmak üzere ρ, bir parametrik b-metriktir. Tanım (3.2.1) (iii) koşulunun sağlandığını göstermek yeterlidir. $\theta, \omega, \tau \in X$ olsun. $n = \theta - \tau,\ m = \tau - w$ olarak alalım, böylece $n + m = \theta - \omega$ dir. $\forall a, b \geq 0$,

$(a + b)^p \leq (2max\{a, b\})^p \leq 2^p(a^p + b^p)$

eşitsizliğinden, $s = 2^p > 1$,

$\rho(\theta, \omega, t) = t(\theta - \omega)^p = t(u + v)^p \leq 2^p t(u^p + v^p)$

$= 2^p(t(\theta - \tau)^p + t(\tau - \omega)^p) = s(\rho(\theta, \tau, t) + \rho(\tau, \omega, t))$ elde edilir (Hussain ve diğ., 2015).

Tanım 3.2.3. (X, ρ, s) bir parametrik b-metrik uzay, $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq X$ bir dizi ve $b \in X$ olsun. Bu durumda her $t > 0$ için

i) $\lim_{m \to \infty} \rho(x_m, b, t) = 0$ oluyorsa $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisine x noktasına yakınsaktır denir ve $\lim_{m \to \infty} x_m = x$ ile gösterilir.

ii) $\lim_{m,l \to \infty} \rho(x_m, x_l, t) = 0$ olması durumunda $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisine bir Cauchy dizisi olarak adlandırılır.

iii) Eğer verilen uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsak ise (X, ρ, s) parametrik b-metrik uzayına tam parametrik metrik uzay olarak adlandırılır (Hussain ve diğ., 2015).

Tanım 3.2.4. (Z, ρ, s) bir PbM- uzay ve $x \in Z$ alalım. Eğer (Z, ρ, s)'daki $\lim_{m \to \infty} x_m = x$ şartını sağlayan her $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi için $\lim_{m \to \infty} Tx_m = Tx$ şartı sağlanıyorsa, Z üzerindeki T öz dönüşümüne x noktasında dizisel süreklidir denir (Hussain ve diğ., 2015).

Tanım 3.2.5. (Z, ρ, s) parametrik b-metrik uzay alalım. Eğer bir $d \in D$ için $B(\omega, r) = \{\tau \in Z: d(\omega, \tau, t) < r\}$ olmak üzere $B(d, r) \subset D$ olması durumunda $\varepsilon > 0$ varsa, X'in bir alt kümesi olan D kümesine açıktır denir. X'in her açık alt kümelerinin ailesi τ_d ile gösterilir (Franklin ,1965).

3.3.Parametrik 2-Metrik Uzaylar

Tanım 3.3.1. Z boştan farklı bir küme ve $\sigma: Z \times Z \times Z \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^+$ aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyon olsun. Her $\theta, \omega, \tau, d \in Z$ ve $t > 0$ için

i) $\sigma(\theta, \omega, \tau, t) \neq 0$ olacak şekilde bir $z \in Z$ vardır.

ii) eğer $\theta, \omega, \tau \in Z$ noktalarının en az ikisi aynı ise, $\sigma(\theta, \omega, \tau, t) = 0$ dır.

iii) $\sigma(\theta, \omega, \tau, t) = \sigma(\theta, \tau, \omega, t) = \sigma(\omega, \tau, \theta, t) = \sigma(\omega, \theta, \tau, t) = \sigma(\tau, \theta, \omega, t) = \sigma(\tau, \omega, \theta, t)$.

iv) $\sigma(\theta, \omega, \tau, t) \leq \sigma(\theta, \omega, w, t) + \sigma(\omega, \tau, w, t) + \sigma(\tau, \theta, w, t)$.

Bu durumda σ fonksiyonuna Z üzerinde parametrik 2- metrik (veya parametrik 2-uzaklık fonksiyonu) denir (Çetkin, 2019).

Örnek 3.3.2. $X = \mathbb{R}$ reel sayıların bir kümesi ve $f: (0,\infty) \to (0,\infty)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $\sigma_1, \sigma_2: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlandığında X üzerinde parametrik 2-metriktir. Her $\theta, \omega, \tau \in X$ ve $t > 0$ için

$\sigma_1(\theta, \omega, \tau, t) = f(t)|(\theta - \omega)(\theta - \tau)(\omega - \tau)|$ ve

$\sigma_2(\theta, \omega, \tau, t) = f(t)(|\theta - \omega| + |\omega - \tau| + |\theta - \tau|$ (Çetkin, 2019).

Örnek 3.3.3. $X = \{f | f: (0,\infty) \to \mathbb{R}\, bir\, fonksiyon\}$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanan $\sigma: X \times X \times X \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^+$ operasyonu X de parametrik 2-metriktir. $t > 0$

$\sigma(k, l, m, t) = |k(t) - l(t)| + |l(t) + m(t)|, \forall\, t > 0$ (Çetkin, 2019).

Tanım 3.3.4. σ, Z üzerinde bir parametrik 2-uzaklık fonksiyonu, $\theta, \omega, \tau \in Z$ ve $r \geq 0$ olsun. O halde

$B(\theta, \omega, r) = \{\tau \in Z | \sigma(\theta, \omega, \tau, t) < r, t > 0\}$ şeklinde tanımlanan küme , Z de θ ve ω merkezli r yarıçaplı bir açık yuvardır.

Bir alt taban olarak her açık yuvarların ailesi ile oluşturulan topolojiye Z üzerinde parametrik 2-metrik topoloji denir ve τ ile gösterilir (Çetkin, 2019).

Teorem 3.3.5 σ, Z üzerinde bir parametrik 2-uzaklık fonksiyonu ve $H \subseteq Z$ olsun. H 2-açık kümedir. : $\Leftrightarrow$ Her $h \in H$ için $x \in B(h, z_1, r_1) \cap B(h, z_2, r_2) \cap \ldots \cap B(h, z_n, r_n) \subseteq H$ olacak şekilde

$z_1, z_2, \ldots, z_n \in Z$,$r_1, r_2, \ldots, r_n > 0$ noktalarının sonlu sayıları vardır (Çetkin, 2019).

İspat. $B(h, z, r_1) \cap B(h, z_2, r_2) \cap \ldots \cap B(h, z_n, r_n)$ açık yuvarların kesişiminin 2-açık olduğunu göstermek iddiayı ispatlamak için yeterlidir. Bu nedenle, aksini ispatlamak yeterlidir.

$H \subseteq Z$, 2-açık küme ve $x \in H$ olsun.

$h \in B(x_1, z_1, r_1) \cap B(x_2, z_2, r_2) \cap \ldots \cap B(x_n, z_n, r_n) \subseteq H$ olacak şekilde bir

$B(x_i, y_i, r_i)$, $i = 1,2,3 \ldots$ sonlu sayıda açık yuvarlar vardır. $h \in B(x_i, y_i, r_i)$ olduğundan, $i \in \{1,2, \ldots, m\}$ ve her $t > 0$ için $d(h, x_i, y_i, t) = s_i < r_i$. Her $t > 0$ için $\varepsilon_i(t) = \frac{r_i - s_i(t)}{2}$. Bu durumda,

$i \in \{1,2, \ldots, m\}$ için $B(h, x_i, \varepsilon_i(t)) \cap B(h, y_i, \varepsilon_i(t)) \subseteq B(x_i, y_i, r_i)$. Böylece, $h \in \bigcap_{i=1}^{m} \left(B\left(h, x_i, \varepsilon_i(t)\right) \cap B\left(h, y_i, \varepsilon_i(t)\right) \right) \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} B(x_i, y_i, r_i) \subseteq H$.

Tanım 3.3.6. σ, Z üzerinde bir parametrik 2-uzaklık fonksiyonu, $\lim_{m\to\infty} x_m = x$, $\lim_{m\to\infty} y_m = y$ ve $\lim_{m\to\infty} z_m = z$ olacak şekilde X'de$\{x_m\}, \{y_m\}, \{z_m\}$ üç dizi olsun. Eğer her $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} \sigma(x_m, y_m, z_m) = \sigma(x, y, z, t)$ ise, σ süreklidir (Çetkin, 2019).

Tanım 3.3.7. σ, Z üzerinde bir parametrik 2- uzaklık fonksiyonu, $T: Z \to Z$ öz fonksiyon ve $x \in Z$ alalım. Bu durumda, eğer (Z, σ)'da ki $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şartını sağlayan her $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$ şartı sağlanıyorsa , T fonksiyonuna x noktasında dizisel süreklidir denir (Çetkin, 2019).

Tanım 3.3.8. σ, Z üzerinde bir parametrik 2- uzaklık fonksiyonu olsun.

i) (Z, σ) ikilisine kompakt uzay adı verilir : $\Leftrightarrow$ Z'de ki her dizi yakınsak alt diziye sahiptir.

ii) (Z,σ) ikilisine sınırlı uzay adı verilir $:\Leftrightarrow \exists K>0:\sigma(\theta,\omega,t)\leq K$ (Çetkin, 2019).

3.4.Parametrik S-Metrik Uzaylar

Tanım 3.4.1. Z bir küme ve $\sigma: Z\times Z\times Z\times(0,\infty)\to[0,\infty)$ bir dönüşüm olsun. Bu dönüşüm $\forall\theta,\omega,\tau\in X$ ve $t>0$ için

i) $\sigma(\theta,\omega,\tau,t)=0 \Leftrightarrow \theta=\omega=\tau$;

ii) $\sigma(\theta,\omega,\tau,t)\leq\sigma(\theta,\theta,\varphi,t)+\sigma(\omega,\omega,\varphi,t)+\sigma(\tau,\tau,\varphi,t)$;

aşağıdaki koşulları sağlarsa; σ, Z üzerinde bir parametrik S-metrik (parametrik S uzaklık fonksiyonu) olarak adlandırılır. (Z,σ) ikilisi parametrik S- metrik uzay (PSM-uzay) olarak adlandırılır (Taş ve Yılmaz, 2016).

Örnek 3.4.2. $Z=\{k|k:(0,\infty)\to\mathbb{R}\ bir\ fonksiyon\}$ ve $l:(0,\infty)\to(0,\infty)$ sürekli bir dönüşüm olsun. $\forall k,l,m\in X$ ve $t>0$ için

$\sigma: Z\times Z\times Z\times(0,\infty)\to[0,\infty)$ dönüşümü

$$\sigma(\theta,\omega,\tau,t)=l(t)(|\theta-\omega|+|\omega-\tau|+|\theta-\tau|) \tag{3.1}$$

olacak şekilde tanımlansın.

Bu durumda; σ, bir parametrik S-metriktir. $(\mathbb{R},\sigma)$ ikilisi bir parametrik S- metrik uzaydır (Taş ve Yılmaz, 2016).

Örnek 3.4.3. $Y=\mathbb{R}^{+}\cup\{0\}$ ve ve $g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ sürekli bir dönüşüm olsun. $\forall f,g,h\in Y$ ve $t>0$ için $\sigma: Y\times Y\times Y\times(0,\infty)\to[0,\infty)$

$$\sigma(\alpha,\beta,\gamma,t)=\begin{cases}0; & \alpha=\beta=\gamma\\ g(t)max\{a,b,c\}; & diğer\ durumlar\end{cases} \tag{3.2}$$

alalım.

Böylece; σ, parametrik S-metriktir. $(\mathbb{R},\sigma)$ ikilisi bir parametrik S- metrik uzaydır (Taş ve Yılmaz, 2016).

Teorem 3.4.4. (Z, σ) parametrik S- metrik uzay alalım.

$\forall \theta, \omega \in Z$, $t > 0$

$$\sigma(\theta, \theta, \omega, t) = \sigma(\omega, \omega, \theta, t) \tag{3.3}$$

olur (Taş ve Yılmaz, 2016).

Teorem 3.4.5. (Z, ρ) bir parametrik metrik uzay ve $\sigma_\rho : Z \times Z \times Z \times (0, \infty) \to [0, \infty)$ bir dönüşümünü alalım. Bu dönüşüm $\forall \theta, \omega, \tau \in Z$ ve $t > 0$ için

$$\sigma_\rho(\theta, \omega, \tau, t) = \rho(\theta, \tau, t) + \rho(\omega, \tau, t), \tag{3.4}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda σ_ρ bir parametrik S-metrik ve (Z, σ_ρ) ikilisi bir parametrik S-metrik uzaydır.

Her parametrik S-metriğin bir parametrik metrik tarafından üretilmesi gerekmez (Taş ve Yılmaz, 2016).

Örnek 3.4.6. $Z = \{f | f : (0, \infty) \to \mathbb{R}\ bir\ fonksiyon\}$ ve $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ sürekli bir dönüşüm olsun. $\forall k, l, h \in Z$ ve $t > 0$ için

$\sigma : Z \times Z \times Z \times (0, \infty) \to [0, \infty)$ dönüşümü

$$\tau(k, l, h, t) = \left| e^{k(t)} - e^{h(t)} \right| + \left| e^{k(t)} + e^{h(t)} - 2e^{l(t)} \right|, \tag{3.5}$$

olacak şekilde tanımlansın.

Bu durumda; σ, bir parametrik S-metriktir. Fakat dikkat edilirse burada tanımlanan σ metriği herhangi bir ρ parametrik metriği tarafından üretilemez (Taş ve Yılmaz, 2016).

Teorem 3.4.7. (Z, σ) parametrik S- metrik uzay ve $\rho : Z \times Z \times Z \times (0, \infty) \to [0, \infty)$ dönüşümü her $\theta, \omega \in Z$, $t > 0$ için

$$\rho(\theta, \omega, t) = \rho(\theta, \theta, \omega, t), \tag{3.6}$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda ρ bir parametrik b-metrik ve (Z, ρ) ikilisi bir parametrik b-metrik uzaydır (Taş ve Yılmaz, 2016).

İspat. Koşul(i) ve Koşul(ii) koşulları sağlanır. Koşul(iii) sağlandığını gösterelim.

Koşul(ii) ve Teorem 3.4.2 kullanılarak,

$\rho(\theta,\varphi,t)=\sigma(\theta,\theta,\varphi,t)\leq 2\sigma(\theta,\theta,\omega,t)+\sigma(\varphi,\varphi,\omega,t)=2\rho(\theta,\omega,t)+\rho(\omega,\varphi,t)$

$\rho(\theta,\varphi,t)=\sigma(\varphi,\varphi,\theta,t)\leq 2\sigma(\varphi,\varphi,\omega,t)+\sigma(\theta,\theta,\omega,t)=\rho(\theta,\omega,t)+2\rho(\omega,\varphi,t)$

dir bu da

$\rho(\theta,\varphi,t)\leq\frac{3}{2}[\rho(\theta,\omega,t)+\rho(\omega,\varphi,t)]$ anlamına gelir. Bu durumda $s=\frac{3}{2}$ olmak üzere

ρ bir parametrik b-metriktir.

Uyarı. s nin minimum değeri $\frac{3}{2}$ olduğuna dikkat edelim. $s\neq 1$ olmalıdır; yani, Teorem (3.4.7) de ρ parametrik metrik olarak tanımlanamaz.

Tanım 3.4.8. σ, Z bir parametrik S- uzaklık fonksiyonu ve $\{x_n\}$, Z uzayında dizi alalım:

i) $\{x_n\}$ dizisi x' e yakınsaktır. $\Leftrightarrow$ Her $n\geq n_0$ ve $t>0$ için $\sigma(x_n,x_n,x,t)<\varepsilon$ olacak şekilde $n_0\in\mathbb{N}$ vardır; yani, $\lim_{n\to\infty}\sigma(x_n,x_n,x,t)=0$.

ii) $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dizisi ise her $t>0$ için , $\lim_{m,n\to\infty}\sigma(x_n,x_n,x_m,t)=0$ dır.

iii)Eğer verilen uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsak ise (Z,σ) parametrik S-metrik uzayına tam parametrik S-metrik uzay denir (Taş ve Yılmaz, 2016).

Teorem 3.4.9. (X,σ) parametrik S- metrik uzay olsun. $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsaksa, bu durumda x tektir (Taş ve Yılmaz, 2016).

Teorem 3.4.10. (Y,σ) bir parametrik S- metrik uzayını alalım. Eğer $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsaksa, bu durumda $\{x_n\}$ Cauchy dizisidir (Taş ve Yılmaz, 2016).

Sonuç 3.4.11. ρ, Y üzerinde bir parametrik uzaklık fonlsiyonu ve σ_ρ, ρ parametrik metriği ile üretilen olmak üzere (Y,σ_ρ) parametrik S- metrik uzay olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

i) (Y,ρ) da $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsaktır. $\Leftrightarrow$ (Y,σ_ρ)' da $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsaktır.

ii) (Y, ρ) da $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dizisidir. $\Leftrightarrow$ (Y, σ_ρ)' da $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dizisidir.

iii) (Y, ρ) tam uzaydır. $\Leftrightarrow$ (Y, σ_ρ) tam uzaydır (Taş ve Yılmaz, 2016).

Tanım 3.4.12. (Z, τ) parametrik S- metrik uzay ve $T: Z \to Z$ öz dönüşümünü alalım.

$\lim_{n\to\infty} \tau(x_n, x_n, x, t) = 0$ olacak şekilde her $t > 0$ ve Z de her $\{x_n\}$ dizisi için

$\lim_{n\to\infty} \tau(Tx_n, Tx_n, Tx, t) = 0$ ise T ye x noktasında süreklidir denir (Taş ve Yılmaz, 2016).

4.PARAMETRİK METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu kısımda parametrik metrik, parametrik b-metrik, parametrik 2-metrik ve parametrik S-metrik uzaylarda sabitnokta teoremlerine yer verilmiştir.

4.1.Parametrik Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 4.1.1. $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$, (Y,ρ) PM-uzayında bir dizi, $\lambda \in [0,1)$ ve $n = 1,2,3$ ... olmak üzere

$$\rho(z_m, z_{m+1}, t) \leq \lambda\rho(z_{m-1}, z_m, t) \tag{4.1}$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda, $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ (Y,ρ) PM-uzayında bir Cauchy dizisidir (Jain ve diğ., 2016).

İspat. $m > n \geq 1$ olsun.

$$\begin{aligned}\rho(z_n, z_m, t) &\leq \rho(z_n, z_{n+1}, t) + \rho(z_{n+1}, z_{n+2}, t) + \cdots \ldots\ldots\ldots + \rho(z_{m-1}, z_m, t)\\ &\leq (\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots + \lambda^{m-1})\rho(z_0, z_1, t)\\ &\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\rho(z_0, z_1, t)\end{aligned} \tag{4.2}$$

olur. $\lambda < 1$. $\rho(z_0, z_1, t) > 0$ olduğunu varsayalım. Yukarıdaki eşitsizlikte $m, n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n,m\to\infty} \rho(z_n, z_m, t) = 0 \tag{4.3}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$dizisi Y de bir Cauchy dizisidir. Ayrıca, eğer $\rho(z_0, z_1, t) = 0$ ise, böylece her $m > n$, $\rho(z_n, z_m, t) = 0$ olur ve böylece $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi Y de bir Cauchy dizisidir (Jain ve diğ., 2016).

Teorem 4.1.2. (Z,ρ) tam parametrik metrik uzay ve $T: Z \to Z$ örten öz dönüşümünü alalım. Eğer her $t > 0$ ve her $\theta, \omega \in Z$ $(\theta \neq \omega)$ için $\tau, \varphi, \mu \geq 0$ ve $\tau + \varphi + \mu > 1$ koşulunu sağlayan reel sayılar olmak üzere

$$\rho(T\theta, T\omega, t) \geq a\rho(\theta, \omega, t) + b\rho(\theta, T\theta, t) + c\rho(\omega, T\omega, t) \tag{4.4}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümünün Z de bir sabit noktası vardır (Jain ve diğ., 2016).

İspat. Bu varsayımlar altında T fonksiyonunun birebir olduğu açıktır. G, T fonksiyonunun ters fonksiyonu olsun.

$z_0 \in X, z_1 = G(z_0), z_2 = G(z_1) = G^2(z_0), \dots\dots\dots, z_{m+1} = G(z_n) = G^{n+1}(z_0)$ ... ...seçelim. Genelliği bozmaksızın, her $n = 1,2,$ ...için $z_{m_0-1} \neq z_{m_0}$ olduğu varsayalım. (Aksi takdirde, eğer $z_{m_0-1} = z_{m_0}$ olacak şekilde bir n_0 var ise , $z_{m_0}T$ fonksiyonunun bir sabit noktasıdır). Eşitsizlik (4.4) den

$$\rho(z_{m-1}, z_m, t) = \rho(TT^{-1}z_{m-1}, TT^{-1}z_m, t) \geq \tau\rho(T^{-1}z_{m-1}, T^{-1}z_m, t) + \varphi\rho(T^{-1}z_{m-1}, TT^{-1}z_{m-1}, t) + \mu\rho(T^{-1}z_m, TT^{-1}z_m, t)$$

$$= \tau\rho(Gz_{m-1}, Gz_m, t) + \varphi\rho(Gz_{m-1}, z_{m-1}, t) + \mu\rho(Gz_m, z_m, t)$$

$$= \tau\rho(z_m, z_{m+1}, t) + \varphi\rho(z_m, z_{m-1}, t) + \mu\rho(z_{m+1}, z_m, t) \quad (4.5)$$

elde edilir. Buradan

$$(1-\varphi)\rho(z_{m-1}, z_m, t) \geq (\tau+\mu)\rho(z_{m+1}, z_m, t) \quad (4.6)$$

olur. Eğer $\tau + \mu = 0$ ise, bu durumda $\varphi > 0$ dır. Yukarıdaki eşitsizlik, negatif bir sayının sıfırdan büyük veya sıfıra eşit olduğu anlamına gelir. Bu imkansızdır. Bu yüzden, $\tau + \mu \neq 0$ ve $(1-\varphi) > 0$ dır. Her $n \in N \cup \{0\}$ ve $t > 0$ için $k = \frac{1-\varphi}{\tau+\mu}$ olacak şekilde

$$\rho(z_{m+1}, z_m, t) \leq k\rho(z_{m-1}, z_m, t) \quad (4.7)$$

elde edilir. Her $t > 0$ için eşitsizlik Eşitsizlik (4.7) nin n-kez tekrarlanması ile ,

$$\rho(z_{m+1}, z_m, t) \leq k^n\rho(z_0, z, t) \quad (4.8)$$

elde edilir. Teorem (4.1.1) den $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ Cauchy dizisidir. (X, ρ) tam parametrik metrik uzay olduğu için, $m \to \infty$ iken $z_m \to \theta^*$ olacak şekilde $\theta^* \in X$ vardır.

T örten fonksiyon olduğundan, $\theta^* = T\omega$ olacak şekilde X de bir ω noktası vardır.

$$\rho(z_m, \theta^*, t) = \rho(Tz_{m+1}, T\omega, t)$$

$$\geq \tau\rho(z_{m+1},\omega,t)+\varphi\rho(z_{m+1},Tz_{m+1},t)+\mu\rho(\omega,T\omega,t)$$

$$=\tau(z_{m+1},\omega,t)+\varphi\rho(z_{m+1},z_m,t)+\mu\rho(\omega,x^*,t) \quad (4.9)$$

düşünelim bu da $m\to\infty$ iken

$$0\geq(\tau+\mu)\rho(\omega,\theta^*,t) \quad (4.10)$$

anlamına gelir. Böylece $\omega=\theta^*$dır. Bu θ^* noktasının, T fonksiyonunun bir sabit noktası olduğunu söyler. Bu ispatı tamamlar.

Teorem (4.1.2) yi ispatlayan bir örnek inceleyelim.

Örnek 4.1.3. $Z=[0,\infty)$ her $\theta,\omega\in Z$ ve $t>0$ için

$\rho(\theta,\omega,t)=\begin{cases}tmax\{\theta,\omega\}, & \theta\neq\omega\\ 0, & \theta=\omega\end{cases}$ parametrik metriği ile verilsin. $T:Z\to Z$ fonksiyonu $T\theta=\frac{5}{2}\theta$ şeklinde tanımlansın. T' nin Z' üzerinde sürekli, örten bir fonksiyon olduğu açıktır. Böylece, $a=4, b=-2$ ve $c=\frac{3}{4}$için Teorem (4.1.3) nin bütün koşulları sağlanır. $x^*=0$, T fonksiyonunun tek sabit noktasıdır (Jain ve diğ., 2016).

Teorem (4.1.2) de $b=c$ ve $a=k$ alınması durumunda alttaki elde edilir.

Sonuç 4.1.4. ρ, Z parametrik uzaklık fonksiyonu ve $T:Z\to Z$ örten dönüşümünü alalım. Eğer her $t>0$, $\forall\theta,\omega\in Z$, $l>1$ koşulunu sağlayan reel sayı olmak üzere

$$\rho(T\theta,T\omega,t)\geq l\rho(\theta,\omega,t) \quad (4.11)$$

sağlanıyorsa T dönüşümünün Z de tek bir sabit noktası vardır (Jain ve diğ., 2016).

İspat. Eşitsizlik (4.4) de $b=c=0$ ve $a=k$ alınırsa,

θ^* noktası, T dönüşümünün X' de bir sabit noktası olduğu ortaya çıkar. Tekliği. θ^* ve $\omega^*(\theta^*\neq\omega^*)$ T dönüşümünün iki sabit noktası olduğunu kabul edelim. Eşitsizlik (4.11) den,

$$\rho(\theta^*,\omega^*,t)=\rho(T\theta^*,T\omega^*,t)\geq k\rho(\theta^*,\omega^*,t) \quad (4.12)$$

elde edilir. Bu da, $\rho(\theta^*, \omega^*, t) = 0$ anlamına gelir. Yani, $\theta^* = \omega^*$dir. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.5. (Z, ρ) tam parametrik metrik uzay, $T: Z \to Z$ örten dönüşümünü alalım. Eğer her $t > 0$ ve $\forall \theta, \omega \in X$, $l > 1$ reel sayısı ve n pozitif tam sayı olmak üzere

$$\rho(T^n\theta, T^n\omega, t) \geq k\rho(\theta, \omega, t) \tag{4.13}$$

sağlanıyorsa T dönüşümünün Z de tek bir sabit noktası vardır (Jain ve diğ., 2016) .

İspat. Sonuç (4.1.4) den, θ^* noktası T^n nin sabit bir noktasıdır. Fakat

$T^n(T\theta^*) = T(T^n\theta^*) = T\theta^*$dır. Böylece $T\theta^*$,T^n nin diğer sabit noktasıdır. Dolayısıyla $T\theta^* = \theta^*$, θ^* noktası T fonksiyonunun sabit bir noktasıdır. Hem T hem de T^n nin sabit noktası olması gerçeğinden arzu edilen sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.6. (Z, ρ) bir tam parametrik metrik uzay ve $T: Z \to Z$ sürekli örten bir dönüşümünü alalım. Eğer keyfi $\theta, \omega \in Z$ için $k > 1$ sabiti var ise, her $t > 0$

$$\rho(T\theta, T\omega, t) \geq kM_t(\theta, \omega) \tag{4.14}$$

koşulunu sağlayan

$$M_t(\theta, \omega) \in \{\rho(\theta, \omega, t), \rho(\theta, T\theta, t), \rho(\omega, T\omega, t)\} \tag{4.15}$$

değeri vardır. Böylece, T dönüşümünün Z üzerinde bir tek sabit noktası vardır (Jain ve diğ., 2016).

İspat. Teorem (4.1.2) nin ispatına benzer şekilde, $z_{m-1} = Tz_m$ şeklinde oluşturulan bir $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini ele alalım. Genelliği bozmaksızın, her $n = 1,2, \ldots$ için $z_{m-1} = z_m$ olduğu varsayalım.(Aksi takdirde, eğer $z_{m_0-1} \neq z_{m_0}$ olacak şekilde bir m_0 var ise, $z_{m_0}T$ fonksiyonunun bir sabit noktasıdır).

Koşul (4.14) den,

$M_t(z_m, z_{m+1}) = \{\rho(z_m, z_{m+1}, t), \rho(z_m, z_{m-1}, t)\}$ olmak üzere

$$\rho(z_{m-1}, z_m, t) = \rho(Tz_m, Tz_{m+1}, t) \geq kM_t(z_m, z_{m+1}) \quad (4.16)$$

sonucu çıkar. Şimdi aşağıdaki iki durumu ele alalım:

Eğer $M_t(z_m, z_{m+1}) = \rho(z_m, z_{m-1}, t)$ ise, Koşul (4.15) den

$\rho(z_{m-1}, z_m, t) \geq k\rho(z_m, z_{m-1}, t)$ elde edilir, buradan da $\rho(z_{m-1}, z_m, t) = 0$, yani $z_{m-1} = z_m$ anlamına gelir. Bu bir çelişkidir.

Eğer $M_t(z_m, z_{m+1}) = \rho(z_m, z_{m+1}, t)$ ise, Koşul (4.15) den

$\rho(z_{m-1}, z_m, t) \geq k\rho(z_m, z_{m-1}, t)$ elde edilir.$\{z_m\}_{=1}^{\infty}$ dizisi, (Z, ρ) tam parametrik metrik uzayda bir Cauchy dizisi olur. Böylece $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi $\theta^* \in Z$ noktasına yakınsar. T sürekli olduğundan, θ^* nin T nin sabit bir noktası olduğu açıktır. Böylece, T dönüşümünün Z de bir tek sabit noktası vardır.

4.2.Parametrik B-Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 4.2.1. $s \geq 1$ olmak üzere (X, ρ, s) bir parametrik b-metrik uzay ve $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini alalım. Eğer $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi θ noktasına ve ayrıca ω noktasına yakınsak ise, $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisinin limiti tektir (Jain ve diğ., 2016).

İspat. $m \to \infty$ iken $x_m \to \theta$ ve $x_m \to \omega$ olsun yani $\lim_{m\to\infty} \rho(x_m, \theta, t) = 0$ ve $\lim_{m\to\infty} \rho(x_m, y, t) = 0$ dır. Her $t > 0$ için üçgen eşitsizliği kullanılarak,

$$\rho(\theta, \omega, t) \leq s[\rho(\theta, x_m, t) + \rho(x_m, \omega, t)] = s[\rho(x_m, \theta, t) + \rho(x_m, \omega, t)]$$

elde edilir. $m \to \infty$ için limit alınırsa, $\rho(\theta, \omega, t) = 0$ elde edilir ve böylece $\theta = \omega$ olur.

Teorem 4.2.2. $s \geq 1$ olmak üzere (X, ρ, s) bir parametrik b-metrik uzay ve $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ X de bir dizini alalım. Eğer $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi θ noktasına yakınsak ise, $\forall \omega \in X$ ve her $t > 0$ için

$$\frac{1}{s}\rho(\theta, \omega, t) \leq \lim_{n\to\infty} \rho(x_m, \omega, t) \leq s\rho(\theta, \omega, t) \quad (4.1)$$

olur (Jain ve diğ., 2016).

İspat. Üçgen eşitsizliğinden,

$$\frac{1}{s}\rho(\theta,\omega,t) - \lim_{n\to\infty}\rho(x_m,\theta,t) \le \lim_{n\to\infty}\rho(x_m,\omega,t)$$

$$\le s(\rho(\theta,\omega,t) + \lim_{n\to\infty}\rho(x_m,\theta,t)) \tag{4.2}$$

elde edilir ve böylece $\forall\omega \in X$ve her $t > 0$ için

$\frac{1}{s}\rho(\theta,\omega,t) \le \lim_{n\to\infty}\rho(x_m,\omega,t) \le s\rho(\theta,\omega,t)$ dır.

Teorem 4.2.3. $s \ge 1$ olmak üzere (X,ρ,s) bir parametrik b-metrik uzay ve $\{z_k\}_{k=0}^{n} \subset X$ olsun. Bu durumda,

$$\rho(z_n,z_0,t) \le s\rho(z_0,z_1,t) + s^2\rho(z_2,z_3,t)$$
$$+\cdots \dots \dots \dots + s^{n-1}\rho(z_{n-2},z_{n-1},t) + s^{n-1}\rho(z_{n-1},z_n,t) \tag{4.3}$$

dır (Jain ve diğ., 2016).

Teorem 4.2.4. $s \ge 1$ olmak üzere(X,ρ,s) bir parametrik b-metrik uzay olsun.

$\lambda \in \left[0,\frac{1}{s}\right)$ ve $n = 1,2,3$ ... olmak üzere $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$\rho(z_n,z_{n+1},t) \le \lambda\rho(z_{n-1},z_n,t) \tag{4.4}$$

koşulunu sağlayan X in noktalarının bir dizisi olsun. Böylece, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, (X,ρ,s) uzayında bir Cauchy dizisidir (Jain ve diğ., 2016).

İspat. $m > n \ge 1$ olsun.

$$\rho(z_n,z_m,t) \le s\rho(z_n,z_{n+1},t) + s^2\rho(z_{n+1},z_{n+2},t) + \cdots \dots \dots \dots + s^{m-n}\rho(z_{m-1},z_m,t)$$

$$\le (s\lambda^n + s^2\lambda^{n+1} + \cdots + s^{m-n}\lambda^{m-1})\rho(z_0,z_1,t)$$

$$\le s\lambda^n(1 + s\lambda + (s\lambda)^2 + \cdots + (s\lambda)^{m-n-1})\rho(z_0,z_1,t)$$

$$\le \frac{s\lambda^n}{1-s\lambda}\rho(z_0,z_1,t) \tag{4.5}$$

olur.

$s\lambda < 1$. $\rho(z_0, z_1, t) > 0$ olduğunu varsayalım.

Yukarıdaki eşitsizlikte $m, n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n,m\to\infty} \rho(z_n, z_m, t) = 0 \tag{4.6}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi X'de bir Cauchy dizisidir. Ayrıca, eğer $\rho(z_0, z_1, t) = 0$ ise, bu durumda her $m > n$ için $\rho(z_n, z_m, t) = 0$ olur ve böylece $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi X de bir Cauchy dizisidir.

Teorem 4.2.5. $s \geq 1$olmak üzere (X, ρ, s) bir tam parametrik b-metrik uzay olsun. Varsayalım ki $T: X \to X$fonksiyonu örten ve $\forall x, y \in X$ve her $t > 0$ için $\lambda > s$ olmak üzere

$$\rho(Tx, Ty, t) \geq \lambda\rho(x, y, t) \tag{4.7}$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda, T fonksiyonunun sabit bir noktası vardır (Jain ve diğ., 2016).

İspat. $z_0 \in X$ olsun. T fonksiyonu$X$ üzerinde örten olduğundan, $z_0 = Tz_1$ olacak şekilde $z_1 \in X$ vardır. Bu işleme devam edersek,

$$z_n = Tz_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\} \tag{4.8}$$

elde edilir. Bir $n_0 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ için $z_{n_0} = z_{n_0+1}$ olması durumunda, z_{n_0}'ın T'nin sabit bir noktası olduğu açıktır.Varsayalım ki her n için $z_n \neq z_{n-1}$ olsun.

$$\rho(z_{n-1}, z_n, t) = \rho(Tz_n, Tz_{n+1}, t) \tag{4.9}$$

eşitliğini düşünelim. Eşitlik (4.9) ve dizi tanımından

$\rho(z_{n-1}, z_n, t) = \rho(Tz_n, Tz_{n+1}, t) \geq \lambda\rho(z_n, z_{n+1}, t)$ elde edilirve böylece her $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ ve her $t > 0$ için$h = \frac{1}{\lambda} < \frac{1}{s}$ olmak üzere

$$\rho(z_n, z_{n+1}, t) \leq \frac{1}{\lambda}\rho(z_{n-1}, z_n, t) = h\rho(z_{n-1}, z_n, t) \tag{4.10}$$

dır.

Eşitlik (4.10) un n kez tekrarlanmasıyla her $t > 0$ için

$$\rho(z_{n+1}, z_n, t) \leq h^n \rho(z_0, z, t) \tag{4.11}$$

elde edilir. Teorem (4.2.4) den, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, X'de bir Cauchy dizisidir.

X bir tam parametrik b-metrik uzay olduğundan, $n \to \infty$ iken $z_n \to z^*$ olması durumunda bir $z^* \in X$ vardır. Şimdi T örten fonksiyon olduğundan yani X de $z^* = Tp$ olacak şekilde bir p noktası vardır.

Eşitlik (4.7) den yola çıkarak, her $t > 0$ için

$$\rho(z_n, z^*, t) = \rho(Tz_{n+1}, Tp, t) \geq \lambda \rho(z_{n+1}, p, t) \tag{4.12}$$

elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizlikte $n \to +\infty$ için limit alınırsa,

$0 = \lim_{n\to\infty} \rho(z_n, z^*, t) \geq \lambda \lim_{n\to\infty} \rho(z_{n+1}, p, t)$elde edilir ki bu da

$$\lim_{n\to\infty} \rho(z_{n+1}, p, t) = 0 \tag{4.13}$$

anlamına gelir.Böylece $n \to +\infty$ iken $z_{n+1} \to p$ dir. Teorem (4.2.1) den $z^* = p$ elde edilir. Dolayısıyla z^*, T nin sabit bir noktasıdır. Son olarak, $z^* \neq \omega^*$'nin de T nin başka bir sabit noktası olduğunu varsayalım. Eşitlik (4.7) den her $t > 0$ için

$$\rho(z^*, \omega^*, t) = \rho(Tz^*, T\omega^*, t) \geq \lambda \rho(z^*, \omega^*, t) \tag{4.14}$$

elde edilir. Bu sadece $\rho(z^*, \omega^*, t) = 0$ olduğunda doğrudur. Yani $z^* = \omega^*$dır.

Dolayısıyla istenilen sonuç elde edilir.

Örnek 4.2.6. $Z = [0, \infty)$ ve $\rho: Z \times Z \times (0, \infty) \to [0, \infty)$ dönüşümün her $\theta, \omega \in Z$ ve $t > 0$ için

$$\rho(\theta, \omega, t) = \begin{cases} t(\theta - \omega)^2, & \theta \neq \omega \\ 0, & \theta = \omega \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$s = 2 > 1$ olmak üzere ρ, Z üzerinde parametrik b-metrik ve (Z, ρ) uzayının tam olduğu açıktır. Ayrıca, ρ, Y üzerinde parametrik metrik değildir (Jain ve diğ., 2016).

$T: Y \to Y$ dömüşümü

$$Tx = \begin{cases} 6x, & x \in [0,1) \\ 5x+1, & x \in [1,2) \\ 4x+3, & x \in [2,\infty) \end{cases}$$ şekildeki gibi tanımlansın.

T nin Y üzerinde örten olduğu açıktır.

Teorem 4.2.7. (Z, ρ, s) bir tam PbM-uzay olsun. $T: Z \to Z$ fonksiyonu örten, $\forall \theta, \omega \in Z$ ve her $t > 0$ için $\mathcal{B} \in \psi_{\mathcal{B}}^{s}$ olmak üzere

$$\rho(T\theta, T\omega, t) \geq \mathcal{B}(\rho(\theta, \omega, t))\rho(\theta, \omega, t) \tag{4.15}$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda, T nin sabit noktası mevcuttur (Jain ve diğ., 2016).

İspat. $z_0 \in Z$ alalım. T fonksiyonu Z üzerinde örten olduğundan, $z_0 = Tz_1$ olacak şekilde $x_1 \in Z$ vardır.

$$z_n = Tz_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{4.16}$$

olacak şekilde bir $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi tanımlansın.

Bir $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $z_{n_0} = z_{n_0+1}$ olması durumunda, z_{n_0} ın T nin sabit bir noktası olduğu açıktır. Varsayalım ki her n için $z_n \neq z_{n-1}$ olsun.

$$\rho(z_{n-1}, z_n, t) = \rho(Tz_n, Tz_{n+1}, t)$$

eşitliğini düşünelim. Eşitlik (4.15) ve dizi tanımından

$$\begin{aligned} \rho(z_{n-1}, z_n, t) &= \rho(Tz_n, Tz_{n+1}, t) \\ &\geq \mathcal{B}\big(\rho(z_n, z_{n+1}, t)\big)\rho(z_n, z_{n+1}, t) \\ &\geq s^2 \rho(z_n, z_{n+1}, t) \end{aligned}$$

$$\geq \rho(z_n, z_{n+1}, t) \tag{4.17}$$

elde edilir.

Böylece$\{d(z_n, z_{n+1})\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $\mathbb{R}^+$da bir azalan dizidir ve her $t > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \rho(z_n, z_{n+1}, t) = r \tag{4.18}$$

Olması durumunda $r \geq 0$ vardır. $r = 0$ olduğunu ispatlayalım. $r > 0$ olduğunu varsayalım. Eşitlik (4.15) den,

$$s^2 \frac{\rho(z_{n-1}, z_n, t)}{\rho(z_n, z_{n+1}, t)} \geq \frac{\rho(z_{n-1}, z_n, t)}{\rho(z_n, z_{n+1}, t)}$$

$$\geq \mathcal{B}(\rho(z_n, z_{n+1}, t)) \geq s^2 \tag{4.19}$$

sonucunu çıkarırız. Yukarıdaki eşitsizlikte $n \to +\infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}\big(\rho(z_n, z_{n+1}, t)\big) = s^2 \tag{4.20}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\mathcal{B}$ nin tanımından,

$$r = \lim_{n\to\infty} \rho(z_n, z_{n+1}, t) = 0 \tag{4.21}$$

böylece bir çelişki elde edilir. Yani $r = 0$dır.

$$\lim_{n,m\to\infty} sup\, \rho(z_n, z_{n+1}, t) = 0 \tag{4.22}$$

olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\lim_{n,m\to\infty} sup\, \rho(z_n, z_{n+1}, t) > 0$ olsun. Eşitlik (4.15) den,

$$\rho(z_n, z_m, t) = \rho(Tz_{n+1}, Tz_{m+1}, t) \geq \mathcal{B}\rho(z_{n+1}, z_{m+1}, t))\rho(z_{n+1}, z_{m+1}, t)$$

elde edilir. Yani,

$\frac{\rho(z_n, z_m, t)}{\mathcal{B}(\rho(z_{n+1}, z_{m+1}, t))} \geq \rho(z_{n+1}, z_{m+1}, t)$ dir. Üçgen eşitsizliğinden,

$$\rho(z_n, z_m, t) \leq s\rho(z_n, z_{n+1}, t) + s^2\rho(z_{n+1}, z_{m+1}, t) + s^2\rho(z_{m+1}, z_m, t)$$

$\leq s\rho(z_n, z_{n+1}, t) + s^2 \frac{\rho(z_n, z_m, t)}{\mathcal{B}(\rho(z_{n+1}, z_{m+1}, t))} + s^2\rho(z_{m+1}, z_m, t)$ elde edilir.

Böylece,

$$\rho(z_n, z_m, t) \leq \left(1 - \frac{s^2}{\mathcal{B}(\rho(z_{n+1}, z_{m+1}, t))}\right)^{-1} (s\rho(z_n, z_{n+1}, t) + s^2\rho(z_{m+1}, z_m, t) \quad (4.23)$$

dır. Yukarıdaki eşitsizlikte $n \to +\infty$ için limit alınırsa,

$\lim_{n,m\to\infty} sup\, \rho(z_n, z_{n+1}, t) > 0$ve $r = 0 = \lim_{n,m\to\infty} \rho(z_n, z_{n+1}, t)$olduğundan,

$$\lim_{n,m\to\infty} \left(1 - \frac{s^2}{\mathcal{B}(\rho(z_{n+1}, z_{m+1}, t))}\right)^{-1} = \infty \quad (4.24)$$

elde edilir. Bu da

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathcal{B}(\rho(z_{n+1}, z_{m+1}, t)) = (s^2)^+ \quad (4.25)$$

anlamına gelir ve $\mathcal{B}$' nin tanımından

$$\lim_{n,m\to\infty} sup\rho(z_{n+1}, z_{m+1}, t) = 0 \quad (4.26)$$

çelişkisi elde edilir. Bundan dolayı,

$\lim_{n,m\to\infty} sup\rho(z_n, z_m, t) = 0$dır. $\lim_{n,m\to\infty} sup\rho(z_n, z_m, t) = 0$ olduğundan, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ bir Cauchy dizisidir. X bir tam parametrik b-metrik uzay olduğu için, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi, X de $\theta^* \in X$ noktasına yakınsar.

Böylece,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(z_n, \theta^*, t) = 0 \quad (4.27)$$

dir. T örten olduğundan, $\theta^* = Tp$ olacak şekilde $p \in X$ vardır. $\theta^* = p$ olduğunu ispatlayalım. Varsayalım ki $\theta^* \neq p$ olsun. Bu durumda, Eşitlik (4.14) den,

$$\rho(z_n, \theta^*, t) = \rho(Tz_{n+1}, Tp, t) \geq \mathcal{B}(\rho(z_{n+1}, p, t))\rho(z_{n+1}, p, t) \quad (4.28)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $n \to +\infty$ için limit alınıp ve Teorem (4.2.2) uygulanırsa,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \rho(z_n, \theta^*, t) \geq \lim_{n\to\infty} \mathcal{B}(\rho(z_{n+1}, p, t)) \lim_{n\to\infty} \rho(z_{n+1}, p, t)$$

$$\geq \frac{1}{s} \lim_{n\to\infty} \mathcal{B}(\rho(z_{n+1}, \theta^*, t)) \lim_{n\to\infty} \rho(\theta^*, p, t) \tag{4.29}$$

ve bundan dolayı,

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}\big(\rho(z_{n+1}, \theta^*, t)\big) = 0 \tag{4.30}$$

çelişkisi elde edilir. Aslında,

$\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}\big(\rho(z_{n+1}, z_n, t)\big) \geq s^2$. Her $0 \leq t < 1$ için

$\mathcal{B}(t) > s^2$olduğundan , böylece $\theta^* = p$ dir. Bundan dolayı, $\theta^* = Tp = T\theta^*$ dir.

4.3. Parametrik 2-Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 4.3.1. (Y, σ) parametrik 2-metrik uzay, $\alpha \in [0, 1)$, $a \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ aşağıdaki koşulu sağlayan bir dizi olsun.

$$\sigma(z_n, z_{n+1}, a, t) \leq \alpha\sigma(z_{n-1}, z_n, a, t)$$

Bu durumda, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, (Y, σ) uzayında bir Cauchy dizisidir (Çetkin, 2019).

Teorem 4.3.2. σ, Z bir tam parametrik 2-uzaklık fonksiyonu ve $T: Z \to Z$ aşağıdaki koşulu sağlayan sürekli öz dönüşüm olsun: Her $\theta, \omega, \mu \in Z(\theta \neq y)$, $\alpha \in [0, 1)$ ve her $t > 0$ için

$$\sigma(T\theta, T\omega, \mu, t) \leq$$
$$\alpha max\{\sigma(\theta, \omega, \mu, t), \sigma(\theta, T\theta, \mu, t), \sigma(\omega, T\omega, \mu, t), \sigma(\theta, T\omega, \mu, t), \sigma(T\theta, \omega, \mu, t)\}.$$

Bu durumda, T dönüşümünün sabit noktası bir tektir (Çetkin, 2019).

İspat.$z_0 \in Z$ ve $n \in \mathbb{N}$ için, $z_{n+1} = Tz_n$ şeklinde bir $\{z_n\}$ dizisi tanımlansın. Yukarıdaki eşitsizlikte, $\theta = z_n$ ve $y = z_{n+1}$ yazılırsa

$$\sigma(Tz_n, Tz_{n+1}, \mu, t) \leq \alpha max \begin{Bmatrix} \sigma(z_n, z_{n+1}, \mu, t), \sigma(z_n, Tx_n, \mu, t), \sigma(z_{n+1}, Tz_{n+1}, \mu, t), \\ \sigma(z_n, Tz_{n+1}, \mu, t), \sigma(Tz_n, z_{n+1}, \mu, t) \end{Bmatrix}$$

$$\sigma(z_{n+1}, z_{n+2}, \mu, t) \leq \alpha max \begin{Bmatrix} \sigma(z_n, z_{n+1}, \mu, t), \sigma(z_n, z_{n+1}, \mu, t), \sigma(z_{n+1}, z_{n+2}, \mu, t), \\ \sigma(z_n, z_{n+2}, \mu, t), \sigma(z_{n+1}, z_{n+1}, \mu, t) \end{Bmatrix}$$

$\sigma(z_{n+1}, z_{n+2}, \mu, t) \leq \alpha max\{\sigma(z_n, z_{n+1}, \mu, t), \sigma(z_n, z_{n+2}, \mu, t)\}$elde edilir.

Durum 1. Eğer $\sigma(z_{n+1}, z_{n+2}, \mu, t) \leq \alpha\sigma(z_n, z_{n+1}, \mu, t)$ ise, her $\mu \in X, t > 0$ ve

$0 \leq \alpha < 1$ için tümevarımla

$\sigma(z_{n+1}, z_{n+2}, \mu, t) \leq \alpha^{n+1}\sigma(z_0, z_1, \mu, t)$ elde edilir. Teorem (4.2.1) den, $\{z_n\}$ dizisi Z de bir Cauchy dizisidir, uzayın tamlığından $\{z_n\}$ dizisi bir $x^* \in Z$ noktasına yakınsaktır, yani $\lim_{n\to\infty} z_n = \theta^*$ dır. T sürekli olduğundan,

$$T\theta^* = T(\lim_{n\to\infty} z_n) = \lim_{n\to\infty} Tz_n = \lim_{n\to\infty} z_{n+1} = \theta^*$$

elde edilir. Bundan dolayı, $T\theta^* = \theta^*$ dır, yani T fonksiyonunun Z de bir sabit noktası vardır.

Durum 2. Eğer $d(z_{n+1}, z_{n+2}, \mu, t) \leq \alpha d(z_n, z_{n+2}, \mu, t)$ ise, $\{z_n\}$ dizisi $\theta^* \in Z$ noktasına yakınsaktır, yani $\lim_{n\to\infty} z_n = \theta^*$ dır. Durum 1. deki gibi, $\theta^* \in X$ noktası T fonksiyonunun sabit noktasıdır.

Tekliği. $\vartheta \neq \delta$, $\vartheta \neq q$ olmak üzere $T\delta = \delta$ ve $T\beta = \beta$ olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$\sigma(T\delta, T\beta, \vartheta, t) \leq$
$\alpha max\{\sigma(\delta, \beta, \vartheta, t), \sigma(\delta, T\delta, \vartheta, t), \sigma(\beta, T\beta, \vartheta, t), \sigma(\delta, T\beta, \vartheta, t), \sigma(T\delta, \beta, \vartheta, t)\}$

olur. Bu, $\sigma(\delta, \beta, \vartheta, t) \leq \alpha\sigma(\delta, \beta, \vartheta, t)$ anlamına gelir.

$\sigma(\delta, \beta, \vartheta, t) = 0$ olduğunda, bu doğru olur. Bundan dolayı, $\vartheta = \beta$ dır yani, T fonksiyonunun sabit noktası tektir.

Sonuç 4.3.3. σ, Z bir tam parametrik 2-uzaklık fonksiyonu ve $T: Z \to Z$aşağıdaki koşulu sağlayan sürekli öz fonksiyon olsun: Her $\theta, \omega, \mu \in Z(\theta \neq \omega)$, $\alpha \in [0, 1)$ ve her $t > 0$ için

$\sigma(T\theta, T\omega, \mu, t) \leq \alpha max\{\sigma(\theta, \omega, \mu, t), \sigma(\theta, T\theta, \mu, t), \sigma(\omega, T\omega, \mu, t)\}$.

Böylece, T fonksiyonunun sabit noktası tektir (Çetkin, 2019).

Teorem 4.3.4. σ, Z bir tam parametrik 2-uzaklık fonksiyonu ve $T: Z \to Z$ aşağıdaki koşulu sağlayan öz fonksiyon olsun: Her $\theta, \omega, \mu \in Z(\theta \neq \omega)$, $\alpha \in [0,1)$ ve her $t > 0$ için,

$$\sigma(T\theta, T\omega, \mu, t) \leq \alpha max \begin{Bmatrix} \sigma(\theta, \omega, \mu, t), \sigma(\theta, T\theta, \mu, t), \sigma(\omega, T\omega, \mu, t), \sigma(\theta, T\omega, \mu, t), \\ \sigma(\omega, T\theta, \mu, t), \sigma(T^2\theta, \theta, \mu, t), \\ \sigma(T^2\theta, T\theta, \mu, t), \sigma(T^2\theta, \omega, \mu, t), \sigma(T^2\theta, T\omega, \mu, t) \end{Bmatrix}$$

Böylece her $t > 0$ için, $\sigma(T^2\theta, T\theta, \mu, t) = 0$ dır. Buna ek olarak, her $\theta, \omega, \mu \in Z(\theta \neq \omega)$, $\alpha \in [0,1)$ ve her $t > 0$ için , $\sigma(\theta, T^2\theta, \mu, t) \leq \sigma(\theta, T\theta, \mu, t) + \sigma(T\theta, T^2\theta, \mu, t)$ eşitsizliği sağlanır (Çetkin, 2019).

İspat. Yukarıdaki eşitsizlikte $\mu = \theta$ ve $\omega = T\theta$ yazılırsa,

$$\sigma(T\theta, T^2\theta, \theta, t) \leq$$
$$\alpha max \begin{Bmatrix} \sigma(\theta, T\theta, \theta, t), \sigma(\theta, T\theta, \theta, t), \sigma(T\theta, T^2\theta, \theta, t), \sigma(\theta, T^2\theta, \theta, t), \\ \sigma(T\theta, T\theta, \theta, t), \sigma(T^2\theta, \theta, \theta, t), \\ \sigma(T^2\theta, T\theta, \theta, t), \sigma(T^2\theta, T\theta, \theta, t), \sigma(T^2\theta, T^2\theta, \theta, t) \end{Bmatrix}$$

Bundan dolayı, her $\theta \in Z, t > 0$ için $\sigma(T^2\theta, T\theta, \theta, t) \leq \alpha\sigma(T^2\theta, T\theta, \theta, t)$ elde edilir.

$\alpha \in [0,1)$ olduğundan, bu her $t > 0$ için $\sigma(T^2\theta, T\theta, \theta, t) = 0$ olduğu zaman doğrudur. İkinci iddiayı kanıtlamak için Tanım (4.2.1) son eşitsizliğini

$\sigma(\theta, T^2\theta, \mu, t) \leq \sigma(\theta, T^2\theta, T\theta, t) + \sigma(\theta, T\theta, \mu, t) + \sigma(T\theta, T^2\theta, \mu, t)$ uygulayalım.

$\sigma(T^2\theta, T\theta, \theta, t) = 0$ olduğundan, $\sigma(\theta, T^2\theta, \mu, t) \leq \sigma(\theta, T\theta, \mu, t) + \sigma(T\theta, T^2\theta, \mu, t)$.

Teorem 4.3.5. σ, Z bir tam parametrik 2-uzaklık fonksiyonu ve $T: Z \to Z$ aşağıdaki koşulu sağlayan sürekli bir öz dönüşüm olsun: Her $\theta, \omega, \mu \in Z(\theta \neq y)$, $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ ve her $t > 0, n \in \mathbb{N}$ için,

$$\sigma(T\theta,T\omega,\mu,t)\leq \alpha max\begin{Bmatrix}\sigma(\theta,\omega,\mu,t),\sigma(\theta,T\theta,\mu,t),\sigma(\omega,T\omega,\mu,t),\sigma(\theta,T\omega,\mu,t),\\ \sigma(\omega,T\theta,\mu,t),\sigma(T^2\theta,\theta,\mu,t)\\ ,\sigma(T^2\theta,T\theta,\mu,t),\sigma(T^2\theta,\omega,\mu,t),\sigma(T^2\theta,T\omega,\mu,t)\end{Bmatrix}$$

O halde, T fonksiyonunun sabit noktası tektir (Çetkin, 2019).

İspat. $z_0=x$ ve $z_n=Tz_{n-1}$alalım.

$$\sigma(Tz_{n-1},Tz_n,\mu,t)=\sigma(z_n,z_{n+1},\mu,t)\leq$$

$$\alpha max\begin{Bmatrix}\sigma(z_{n-1},z_n,\mu,t),\sigma(z_{n-1},Tz_{n-1},\mu,t),\sigma(z_n,Tz_n,\mu,t),\sigma(z_{n-1},Tz_n,\mu,t),\\ \sigma(z_n,Tz_{n-1},\mu,t),\\ \sigma(T^2z_{n-1},z_{n-1},\mu,t),\sigma(T^2z_{n-1},Tz_{n-1},\mu,t),\sigma(T^2z_{n-1},z_n,\mu,t),\\ \sigma(T^2z_{n-1},Tz_n,\mu,t)\end{Bmatrix}$$

$$=\alpha max\begin{Bmatrix}\sigma(z_{n-1},Tz_n,\mu,t)\sigma(z_{n-1},z_n,\mu,t),\sigma(z_{n-1},Tz_{n-1},\mu,t),\sigma(z_n,Tz_n,\mu,t),\\ \sigma(z_n,Tz_{n-1},\mu,t),\sigma(T^2z_{n-1},z_{n-1},\mu,t),\\ \sigma(T^2z_{n-1},Tz_{n-1},\mu,t),\sigma(T^2z_{n-1},z_n,\mu,t),\\ \sigma(T^2z_{n-1},Tz_n,\mu,t)\end{Bmatrix}$$

olur. Teorem (4.3.8) den,

$$\sigma(z_{n-1},z_{n+1},\mu,t)=\sigma(z_{n-1},TTz_{n-1},\mu,t)$$

$$\leq \sigma(z_{n-1},Tz_{n-1},\mu,t)+\sigma(Tz_{n-1},TTz_{n-1},\mu,t)$$

$$\sigma(z_{n-1},z_{n+1},\mu,t)\leq \sigma(z_{n-1},z_n,\mu,t)+\sigma(z_n,z_{n+1},\mu,t)\ .$$

Bundan dolayı,

$$\sigma(z_n,z_{n+1},\mu,t)\leq \alpha(\sigma(z_{n-1},z_n,\mu,t)+\sigma(z_n,z_{n+1},\mu,t)).$$

$$\sigma(z_n,z_{n+1},\mu,t)\leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\sigma(z_{n-1},z_n,\mu,t)\ .$$

$\frac{\alpha}{1-\alpha}<1$ olduğundan, $\{z_n\}$ dizisi Cauchy dizisidir ve uzay tam olduğundan, $\theta^*\in X$ noktasına yakınsaktır. Öz fonksiyonun sürekliliğinden θ^*, T fonksiyonunun sabit noktasıdır. Yani, $T\theta^*=\theta^*$ dır.

Tekliği. ω^*, T fonksiyonunun başka bir sabit noktası olduğunu varsayalım. Yani, $T\theta^*=\theta^*$ ve $T\omega^*=\omega^*$dır.

$\sigma(\theta^*, \omega^*, \mu, t) = \sigma(T\theta^*, T\omega^*, \mu, t) \leq$

$$\alpha max \begin{Bmatrix} \sigma(\theta^*, \omega^*, \mu, t), \sigma(\theta^*, T\theta^*, \mu, t), \sigma(\omega^*, T\omega^*, \mu, t), \sigma(\theta^*, T\omega^*, \mu, t), \\ \sigma(\omega^*, T\theta^*, \mu, t), \sigma(T^2\theta^*, \theta^*, \mu, t), \sigma(T^2\theta^*, T\theta^*, \mu, t), \sigma(T^2\theta^*, \omega^*, \mu, t), \\ \sigma(T^2\theta^*, T\omega^*, \mu, t) \end{Bmatrix}$$

$= \sigma(\theta^*, \omega^*, \mu, t)$.

Bu nedenle, her $\mu \in Z$ ve her $t > 0$ için $\sigma(\theta^*, \omega^*, \mu, t) \leq \sigma(\theta^*, \omega^*, \mu, t)$ olur.

Bu, $\sigma(\theta^*, \omega^*, \mu, t) = 0$ anlamına gelir. Yani, $\theta^* = \omega^*$dır. Bundan dolayı, T fonksiyonunun sabit noktası tektir. Bunlara ek olarak,

$\lim_{n\to\infty} \sigma(T^n\theta, \theta^*, \mu, t) = \lim_{n\to\infty} \sigma(x_n, \theta^*, \mu, t) = 0$ dır.

Bu $\lim_{n\to\infty} T^n\theta = \theta^*$olduğunu gösterir.

Teorem 4.3.6. σ, Z bir tam ve sınırlı parametrik 2-uzaklık ve $T_1, T_2 : Z \to Z$ aşağıdaki koşulu sağlayan sürekli öz fonksiyonlar olsun: $\alpha \in (0,1)$, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 > \alpha$,$\alpha - \beta_2 \geq 0, \alpha - \beta_3 \geq 0$ ile her $\theta, \omega, \mu \in Z$ $(\theta \neq \omega)$, $t > 0$ için

$\beta_1\sigma(T_1\theta, T_2\omega, \mu, t) + \beta_2\sigma(\theta, T_1\theta, \mu, t) + \beta_3\sigma(\omega, T_2\omega, \mu, t) -$
$min\{\sigma(\theta, T_2\omega, \mu, t), \sigma(\omega, T_1\theta, \mu, t)\} \leq \alpha\sigma(\theta, \omega, \mu, t)$.

Bu durumda, T_1 ve T_2 fonksiyonlarının ortak bir sabit noktası vardır (Çetkin, 2019).

İspat. $z_0 \in X$ keyfi olsun ve $z_{2n+1} = T_1(z_{2n})$, $z_{2n+2} = T_2(z_{2n+1})$ dizileri tanımlansın. Hipotezde verilen eşitsizliği kullanarak, hesaplamalar yaparak

$\lambda = \frac{\alpha - \beta_2}{\beta_1 + \beta_3} < 1$olmak üzere $\sigma(z_n, z_{n+1}, \mu, t) \leq \lambda^n\sigma(z_0, z_1, \mu, t)$

elde edilir. $\{z_n\}$ dizisi $\theta^* \in X$ limitine sahip bir Cauchy dizisidir. Tanım (4.1.1) nin üçgen eşitsizliğinden,

$\sigma(T\theta^*, \theta^*, \mu, t) \leq \sigma(T_1\theta^*, \theta^*, x_{2n+1}, t) + \sigma(T_1\theta^*, x_{2n+1}, \mu, t) + \sigma(x_{2n+2}, \theta^*, \mu, t)$ elde edilir. Varsayım ile

$\beta_1\sigma(T\theta^*, z_{2n+2}, \mu, t) + \beta_2\sigma(\theta^*, T_1\theta^*, \mu, t) + \beta_3\sigma(z_{2n+1}, z_{2n+2}, \mu, t) -$
$min\{\sigma(\theta^*, z_{2n+2}, \mu, t), \sigma(z_{2n+1}, T_1\theta^*, \mu, t)\} \leq \alpha\sigma(\theta^*, z_{2n+1}, \mu, t)$

$n \to \infty$ alınarak, $(\beta_1 + \beta_2)\sigma(T_1\theta^*, \theta^*, \mu, t) \leq 0$ elde edilir. Bu, her $\mu \in Z$ ve her $t > 0$ için $\sigma(T_1\theta^*, \theta^*, \mu, t) = 0$ anlamına gelir. Böylece, $T_1\theta^* = \theta^*$ dır. Benzer şekilde, $T_2\theta^* = \theta^*$ elde edilir. θ^*, T_1 ve T_2 fonksiyonlarının ortak bir sabit noktasıdır.

4.4. Parametrik S-Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Tanım 4.4.1. (Z, τ) bir PSM-uzay ve T, Z'in öz fonksiyonu olsun.

$\forall a, b \in Z$ ve her $t > 0$ için

$$\tau(Ta, Ta, Tb, t) \geq k_1\tau(a, a, b, t) + k_2\tau(Ta, Ta, a, t) + k_3\tau(Tb, Tb, b, t) \qquad (4.1)$$

olacak şekilde $k_1 > 1$ ve $k_i \geq 0$ reel sayıları vardır (Taş ve Yılmaz,2016).

Teorem 4.4.2. (Z, τ) bir tam parametrik S-metrik uzay ve T, Z in örten öz fonksiyonu olsun. Eğer T fonksiyonu Koşul (4.1) i sağlıyorsa, T dönüşümünün Z de tek bir sabit noktası vardır (Taş ve Yılmaz, 2016).

İspat. Hipotezi kullanarak, T fonksiyonunun birebir olduğunu kolayca görebiliriz.

Koşul (4.1) kullanır ve $Ta = Tb$ alınırsa, $\forall t > 0$ için

$0 = \tau(Ta, Ta, Ta, t) \geq k_1\tau(a, a, b, t) + k_2\tau(Ta, Ta, a, t) + k_3\tau(Ta, Ta, b, t)$ elde edilir ve böylece $\tau(a, a, b, t) = 0$; yani $k_1 > 1$ olduğundan $a = b$ olur.

T nin ters fonksiyonunu F ile gösterelim. $x_0 \in X$ olsun ve $\{x_n\}$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$x_1 = Fx_0$,

$x_2 = Fx_1 = F^2x_0, \ldots, x_{n+1} = Fx_n = F^{n+1}a_0, \ldots$.

$\forall n$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olduğunu varsayalım. Koşul (4.1) ve Teorem (4.4.4) kullanılarak

$\tau(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n, t) = \tau(TT^{-1}x_{n-1}, TT^{-1}x_{n-1}, TT^{-1}x_n, t)$

$\geq k_1\tau(T^{-1}x_{n-1}, T^{-1}x_{n-1}, T^{-1}x_n, t) + k_2\tau(TT^{-1}x_{n-1}, TT^{-1}x_{n-1}, TT^{-1}x_{n-1}, t)$

$+k_3\tau(TT^{-1}x_n, TT^{-1}x_n, TT^{-1}x_n, t)$

$= k_1\tau(Fx_{n-1}, Fx_{n-1}, Fx_n, t) + k_2\tau(x_{n-1}, x_{n-1}, Fx_{n-1}, t) + k_3\tau(x_n, x_n, Fx_n, t)$

$= k_1\tau\big(x_n, x_{n,}x_{n+1}\big) + k_2\tau(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n, t) + k_3\tau(x_n, x_n, x_{n+1}, t)$

$= (k_1 + k_3)\tau\big(x_n, x_{n,}x_{n+1}, t\big) + k_2\tau(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n, t)$ elde edilir, bu da

$(1 - k_2)\tau(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n, t) \geq (k_1 + k_3)\tau(x_n, x_{n,}x_{n+1}, t)$ anlamına gelir.

$k_1 + k_3 \neq 0$ olduğundan,

$\tau(x_n, x_{n,}x_{n+1}, t) \leq \frac{1-k_2}{k_1+k_3}\tau(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n, t)$ (4.2)

elde edilir. Eğer $k = \frac{1-k_2}{k_1+k_3}$ alınırsa, $k_1 + k_2 + k_3 > 1$ olduğundan $k < 1$ olur.

Koşul (4.2) de bu işlemin tekrarlanması, $\forall t > 0$ için

$\tau(x_n, x_{n,}x_{n+1}, t) \leq k^n\tau(x_0, x_0, x_1, t)$ (4.3)

bulunur.

$m > n \geq 1$ olmak üzere $m, n \in \mathbb{N}$ olsun. Eşitlik (4.3) ve Koşul (ii)' i kullanılarak,

$\tau(x_n, x_{n,}x_m, t) \leq \frac{2k^n}{1-k}\tau(x_0, x_{0,}x_1, t)$ elde edilir.

$n, m \to \infty$ için limit alınırsa, $\lim_{n,m\to\infty}\tau\big(x_n, x_{n,}x_m, t\big) = 0$ elde edilir. Böylece $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. (X, τ) bir tam parametrik S-metrik uzay olduğundan, $\lim_{n\to\infty} x_n = y$ olacak şekilde $y \in X$ vardır. Hipotezin örtenliğini kullanarak, $Tx = y$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Koşul (4.1) den

$\tau\big(x_n, x_{n,}y, t\big) = \tau\big(Tx_{n+1}, Tx_{n+1,}Tx, t\big)$

$\geq k_1\tau\big(x_{n+1}, x_{n+1,}x, t\big) + k_2\tau\big(x_n, x_{n,}, x_{n+1,}, t\big) + k_3\tau(y, y, x, t)$ olur.

$n \to \infty$ için limit alınırsa, $0 \geq (k_1 + k_3)\tau(y, y, x, t)$ elde edilir, bu da $y = x$ ve $Ty = y$ anlamına gelir. y nin tekliğini gösterelim. z, T'nin $(y \neq z)$ başka bir sabit noktası olsun.

Koşul (4.1) ve Torem (3.4.4) kullanılarak

$\tau(y, y, z, t) = \tau(Ty, Ty, Tz, t) \geq k_1\tau(y, y, z, t) + k_2\tau(y, y, y, t) + k_3\tau(z, z, z, t) = k_1\tau(y, y, z, t)$ elde edilir,

$k_1 > 1$ olduğundan, $y = z$ anlamına gelir. Sonuç olarak, T fonksiyonunun tek bir y sabit noktası vardır.

Teorem (4.4.2) nin koşullarını sağlayan örnekler verelim.

Örnek 4.4.3. $X = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, Örnek (3.4.3.) de tanımlanan S- metrik ile tam S-metrik uzay olsun. $\forall t \in (0, \infty)$ için $g(t) = t^2$ olacak şekilde $g: (0, \infty) \to (0, \infty)$ fonksiyonu ve $\beta > 1$ olmak üzere $\forall x \in \mathbb{R}$ için $Tx = \beta x$ olacak şekilde $T: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ öz fonksiyonu tanımlansın.

$k_1 = \beta$ ve $k_2 = k_3 = 0$ olmak üzere, T, Teorem (4.4.2) nin koşullarını sağlar. T, X uzayında bir tek $x = 0$ sabit noktası vardır (Taş ve Yılmaz, 2016).

Örnek 4.4.4. $X = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, Örnek (3.4.3) de tanımlanan S- metrik ile tam S-metrik uzay olsun.

$\forall t \in (0, \infty)$ için $g(t) = t^3 + t^2 + t + 1$ olacak şekilde $g: (0, \infty) \to (0, \infty)$ fonksiyonu ve $\beta > 1$ olmak üzere $\forall x \in \mathbb{R}$ için $Tx = x + \ln(x + 1)$ olacak şekilde $T: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ öz fonksiyonu tanımlansın (Taş ve Yılmaz,2016).

$k_1 = min\left\{{}^{\ln(x+1)}/_{x} : x \neq 0 \in X\right\}$ ve $k_2 = k_3 = 0$ olmak üzere, T, Teorem (4.4.2) nin koşullarını sağlar. T, X uzayında bir tek $x = 0$ sabit noktasıdır. Eğer Koşul (4.1) $k_2 = k_3$ alınırsa, bu durumda alttaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4.5. (Z, τ) bir tam parametrik S-metrik uzay ve T, Z'in örten bir öz fonksiyonu olsun. $\forall a, b \in Z$ ve $\forall t > 0$ için

$\tau(Ta, Ta, Tb, t) \geq k_1\tau(a, a, b, t) + k_2 max\{\tau(Ta, Ta, a, t), \tau(Tb, Tb, b, t)\}$

olacak şekilde $k_1 > 1$ ve $k_2 \geq 0$ sağlayan reel sayısı varsa, böylece T dönüşümünün Z de bir tek sabit noktası vardır (Taş ve Yılmaz,2016).

$k_1 = k$ ve $k_2 = k_3 = 0$ Teorem (4.4.2) ve Sonuç (4.4.5) de alınırsa, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.4.6. (Z, τ) bir tam parametrik S-metrik uzay ve T, Z'in örten bir öz fonksiyonu olsun. $\forall a, b \in Z$ ve $\forall t > 0$ için

$\tau(Ta, Ta, Tb, t) \geq k\tau(a, a, b, t)$ olacak şekilde $k > 1$ reel sayısı varsa, bu durumda T fonksiyonunun Z'de bir tek sabit noktası vardır (Taş ve Yılmaz,2016).

Sonuç 4.4.7. (Z, τ) bir tam parametrik S-metrik uzay ve T, Z in örten bir öz fonksiyonu olsun. $\forall a, b \in Z$ ve $\forall t > 0$ için

$\tau(T^m a, T^m a, T^m b, t) \geq k\tau(a, a, b, t)$ olacak şekilde bir $k > 1$ reel sayısı ve bir m pozitif tamsayısı varsa, T dönüşümünün Z de bir tek sabit noktası vardır (Taş ve Yılmaz,2016).

5. ESNEK PARAMETRİK METRİK UZAYLAR

5.1.Esnek Parametrik Metrik Uzaylar

Tanım 5.1.1. $\tilde{Z}$ bir esnek küme ve $d: SP(\tilde{Z}) \times SP(\tilde{Z}) \times \mathbb{R}(D)^* \to \mathbb{R}(D)^*$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda, d dönüşümü aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa, d dönüşümüne $\tilde{Z}$ de bir esnek parametrik metrik (esnek parametrik uzaklık fonksiyonu) denir: Her $\bar{t} \gtrsim \bar{0}, P_\lambda^x$, $P_\mu^y, P_\gamma^z \cong SP(\tilde{Z})$ için

(P1) $d(P_\lambda^x, P_\mu^y, \bar{t}) = \bar{0} \Leftrightarrow P_\lambda^x = P_\mu^y$,

(P2) $d(P_\lambda^x, P_\mu^y, \bar{t}) = d(P_\mu^y, P_\lambda^x, \bar{t})$,

(P3) $d(P_\lambda^x, P_\mu^y, \bar{t}) \lesssim d(P_\lambda^x, P_\gamma^z, \bar{t}) + d(P_\gamma^z, P_\mu^y, \bar{t})$.

$d, \tilde{Z}$ üzerinde esnek parametrik uzaklık fonksiyonu olmak üzere $(\tilde{Z}, d)$ ikilisine bir esnek parametrik metrik uzay (kısaca, EPM-uzay) adı verilir.

Örnek 5.1.2. Z boştan farklı bir küme ve $d: SP(\tilde{Z}) \times SP(\tilde{Z}) \times \mathbb{R}(D)^* \to \mathbb{R}(D)^*$ dönüşümü her $\bar{t} \gtrsim \bar{0}$ için aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\mathrm{d}(P_\lambda^x, P_\mu^y, \bar{t}) = \begin{cases} \bar{1}, & P_\lambda^x = P_\mu^y \\ \bar{0} & P_\lambda^x \neq P_\mu^y \end{cases}$$

Bu durumda yukarıda tanımlanan d dönüşümü $\tilde{Z}$ de bir esnek parametrik metriktir.

Örnek 5.1.3. $Z = \mathbb{R}$ reel sayıların kümesi olmak üzere, $d: SP(\tilde{Z}) \times SP(\tilde{Z}) \times \mathbb{R}(D)^* \to \mathbb{R}(D)^*$ döüşümü her $\bar{t} > \bar{0}$ için aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$d(P_\lambda^x, P_\mu^y, \bar{t}) = \bar{t}\left[|\bar{x} - \bar{y}| + \left|\bar{\lambda} - \bar{\mu}\right|\right].$$

Bu durumda, d dönüşümü $\tilde{Z}$ de esnek parametrik metriktir.

Tanım 5.1.4. $\left\{P_{\lambda_n}^{x_n}\right\}_{n \in N}$, $(\tilde{X}$, d) esnek parametrik metrik uzayında esnek noktaların bir dizisi olsun. Her $\bar{t} \gtrsim \bar{0}$ için

i) $\lim_{n\to\infty} d\left(P_{\lambda_n}^{x_n}, P_{\lambda}^{x}, \bar{t}\right) = \bar{0}$ oluyorsa , $\left\{P_{\lambda_n}^{x_n}\right\}_{n\in N}$ dizisine $P_{\lambda}^{x} \tilde{\in} SP\left(\tilde{X}\right)$ esnek noktasına yakınsaktır denir ve $\lim_{n\to\infty} P_{\lambda_n}^{x_n} = P_{\lambda}^{x}$ ile gösterilir.

ii) $\lim_{n,m\to\infty} \mathrm{d}(P_{\lambda_n}^{x_n}, P_{\lambda_m}^{x_m}, \bar{t}\,) = \bar{0}$ oluyorsa $\left\{P_{\lambda_n}^{x_n}\right\}_{n\in N}$ dizisine Cauchy dizisi adı verilir

iii) Eğer bu uzaydaki esnek noktaların her Cauchy dizisi bu uzayda yakınsak bir dizi ise $(\tilde{X}, d)$ ikilisine tamdır denir.

Tanım 5.1.5. $(\tilde{Z}, d_1)$, $\left(\tilde{Y}, d_2\right)$ iki esnek parametrik metrik uzay ve $\varphi_\psi : (\tilde{Z}, d_1) \to (\tilde{Y}, d_2)$ bu uzaylar arasında bir esnek fonksiyon olsun. $\tilde{Z}$ uzayında $\lim_{n\to\infty} P_{\lambda_n}^{x_n} = P_{\lambda}^{x}$ şartını sağlayan her $\left\{P_{\lambda_n}^{x_n}\right\}_{n\in N}$ dizisi için $\tilde{Y}$ uzayında $\lim_{n\to\infty} \varphi_\psi\,(P_{\lambda_n}^{x_n}) = \varphi_\psi(P_{\lambda}^{x})$ oluyorsa, φ_ψ fonksiyonuna P_{λ}^{x} esnek noktasında sürekli bir fonksiyonu adı verilir.

Tanım 5.1.6. $(\tilde{\mathrm{Z}}, d)$ esnek parametrik metrik uzay olsun. Eğer her $P_{\lambda}^{x}, P_{\mu}^{y} \tilde{\in} SP(\tilde{Z})$ $d(P_{\lambda}^{x}, P_{\mu}^{y}, \bar{t}) \tilde{\leqq} \bar{k}$ koşulunu sağlayan bir $\bar{k}$ negatif olmayan esnek reel sayısı varsa, $(\tilde{\mathrm{Z}}, d)$ ye sınırlı esnek parametrik metrik uzay olarak adlandırlır. Aksi taktirde, uzay sınırsızdır olarak adlandırlır.

Tanım 5.1.7. $(\tilde{\mathrm{Z}}, d)$ bir EPM-uzay ve $(\tilde{Y}, A)$, bu uzayın esnek bir alt kümesini alalım. Böylece, her $P_{\mu}^{y}, P_{\lambda}^{x} \tilde{\in} SP(\tilde{Y}, A)$ ve $\bar{t} \tilde{>} \bar{0}$ için

$$d_Y(P_{\lambda}^{x}, P_{\mu}^{y}, \bar{t}) = d(P_{\mu}^{y}, P_{\lambda}^{x}, \bar{t})$$

şeklinde tanımlanan $d_Y : SP(\tilde{Y}, A) \times SP(\tilde{Y}, A) \times \mathbb{R}(A)^* \to \mathbb{R}(A)^*$ dönüşümü $(\tilde{Y}, A)$ kümesi üzerinde bir esnek parametrik metriktir. Bu şekilde tanımlanan d_Y esnek parametrik metriğine verilen metriğin alt metriği denir. $(\tilde{Y}, d_Y)$ ikilisine ise $\left(\tilde{X}, d\right)$ uzayının alt uzayı adı verilir.

Tanım 5.1.8. $(\tilde{Z}, d)$ bir EPM-uzay, $P_e^a \tilde{\in} SP\left(\tilde{\mathrm{Z}}\right)$ sabit bir esnek nokta ve $\left(\tilde{\mathrm{S}}, A\right)$ bu uzayda boş olmayan esnek bir alt küme olsun. Bu durumda, P_e^a esnek noktasının $(\tilde{\mathrm{S}}, A)$ esnek kümesine olan uzaklığı $\delta(P_e^a,(\tilde{S},\mathrm{A}))(\gamma)$) ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır

$\delta(P_e^a,(\tilde{S},\mathrm{A}))(\gamma)) = inf\{\mathrm{d}(P_e^a, P_\lambda^x, \bar{t})(\gamma); P_\lambda^x \cong \mathrm{SP}(\tilde{S}, A), \bar{t} \gtrsim \bar{0}\}, \forall \gamma \in A.$

P_e^a esnek noktasının $(\tilde{\mathrm{S}}, A)$ esnek kümesinin elemanı olması durumunda, $\forall\, \gamma \in A$

$\delta(P_e^a(\tilde{S},\mathrm{A}))(\gamma)) = inf\{\mathrm{d}(P_e^a, P_\lambda^x, \bar{t})(\gamma); P_\lambda^x \cong \mathrm{SP}(\tilde{S}, A), \bar{t} \gtrsim \bar{0}\}$

$= \mathrm{d}(P_e^a, P_e^a, \bar{t})(\gamma)=0=\bar{0}, \forall \gamma \in A$

$\delta(P_e^a(\tilde{S}, A))(\gamma)) = \bar{0}$

elde edilir.

Teorem 5.1.9. $(\tilde{\mathrm{X}}, d)$ bir esnek parametrik metrik uzayını alalım.

i) $\delta(\tilde{Y}, D) = 0$ dır. $\Leftrightarrow (\tilde{Y}, D)$ tek bir esnek nokta içerir.

ii) $\tilde{\mathrm{X}}$ uzayının her $(\tilde{Y}, D)$, $(\tilde{\mathrm{Z}}, D)$ esnek alt kümeleri için, $(\tilde{Y}, D) \cong (\tilde{\mathrm{Z}}, D) \Rightarrow \delta(\tilde{Y}, D) \lesssim \delta(\tilde{Z}, D)$ dır.

iii) $(\tilde{Y}, D) \tilde{\cap} (\tilde{\mathrm{Z}}, D) \neq \tilde{\emptyset}$ olması durumununda $\tilde{\mathrm{X}}$ uzayının her $(\tilde{Y}, D)$, $(\tilde{\mathrm{Z}}, D)$ esnek alt kümeleri için $\delta\left((\tilde{Y}, D) \tilde{\cup} (\tilde{Z}, D)\right) \lesssim \delta((\tilde{Y}, D)) + \delta((\tilde{Z}, D))$ dır.

İspat. (iii) özelliğini kanıtlayalım.

$(\tilde{Y}, D) \cong (\tilde{\mathrm{Z}}, D)$ olması durumunda, $(\tilde{Y}, D) \tilde{\cup} (\tilde{Z}, D) = (\tilde{Z}, D)$ dır, o zaman $\delta((\tilde{Y}, D) \tilde{\cup} (\tilde{Z}, D)) = \delta(\tilde{Z}, A)$ elde edilir ve böylece $\delta(\tilde{Y}, D) \gtrsim \bar{0}$ olduğundan $\delta\left((\tilde{Y}, D) \tilde{\cup} (\tilde{Z}, D)\right) \lesssim (\tilde{Y}, D) + \delta(\tilde{Z}, D)$ olur.

Benzer şekilde $(\tilde{\mathrm{Z}}, D) \cong (\tilde{Y}, D)$ olduğu durumda yukarıdan açıktır. Şimdi de, aksi durumu varsayalım. $P_\lambda^x, P_\mu^y \cong (\tilde{Y}, D) \tilde{\cup} (\tilde{Z}, D)$ alalım, böylece $P_\lambda^x, P_\mu^y \cong (\tilde{Y}, D)$ veya $P_\lambda^x, P_\mu^y \cong (\tilde{Z}, D)$ olur. Aşağıdaki durumları dikkate alalım:

Durum1. P_λ^x, P_μ^y esnek noktaları $(\tilde{Y}, D), (\tilde{Z}, D)$ esnek kümelerin herhangi birine ait olduğunu varsayalım. Eğer $P_\lambda^x, P_\mu^y \cong (\tilde{Y}, D)$ ise, bu durumda $d(P_\lambda^x, P_\mu^y, \bar{t}) \lesssim \delta\left((\tilde{Y}, D)\right)$;

Eğer $P_\lambda^x, P_\mu^y \,\tilde{\in}\, (\tilde{Z}, D)$ ise, bu durumda $d(P_\lambda^x, P_\mu^y, \bar{t}) \,\tilde{\leq}\, \delta\left((\tilde{Z}, D)\right)$ dir.

Her iki durumda da $\delta\left((\tilde{Y}, D)\,\tilde{\cup}\,(\tilde{Z}, D)\right) \,\tilde{\leq}\, \delta((\tilde{Y}, D)) + \delta((\tilde{Z}, D))$.

Durum2. Esnek noktalardan herhangi birinin $(\tilde{Y}, D)$ esnek kümesine ve diğerinin ise $(\tilde{Z}, A)$ esnek kümesine ait olduğu durumu ele alalım.

Genelliği bozmaksızın, $P_\lambda^x \,\tilde{\in}\, (\tilde{Y}, D)$, $P_\mu^y \,\tilde{\in}\, (\tilde{Z}, D)$ olduğunu varsayalım.

$(\tilde{Y}, D)\tilde{\cap}(\tilde{Z}, D) \neq \tilde{\emptyset}$ olduğundan, $\exists P_\gamma^z \in (\tilde{Y}, D)\tilde{\cap}(\tilde{Z}, D)$ vardır.

Metriğin son koşulundan, $d(P_\lambda^x, P_\mu^y, \bar{t}) \,\tilde{\leq}\, d(P_\lambda^x, P_\gamma^z, \bar{t}) + d(P_\gamma^z, P_\mu^y, \bar{t})$.

$d(P_\lambda^x, P_\mu^y, \bar{t})(\gamma)$

$\tilde{\leq}\, d(P_\lambda^x, P_\gamma^z, \bar{t})(\gamma) + d(P_\gamma^z, P_\mu^y, \bar{t})(\gamma)$

$\leq sup\{d(P_\lambda^x, P_\gamma^z, \bar{t})(\gamma); P_\lambda^x, P_\gamma^z \,\tilde{\in}\, (\tilde{Y}, D)\} + sup\{d(P_\gamma^z, P_\mu^y, \bar{t})(\gamma); P_\gamma^z, P_\mu^y \,\tilde{\in}\, (\tilde{Z}, D)\}$

$= \delta\left((\tilde{Y}, D)\right)(\gamma) + \delta\left((\tilde{Z}, D)\right)(\gamma) = \left[\delta\left((\tilde{Y}, D)\right) + \delta\left((\tilde{Z}, D)\right)\right](\gamma), \forall \gamma \in D$

Böylece, $d(P_\lambda^x, P_\mu^y, \bar{t}) \,\tilde{\leq}\, \delta((\tilde{Y}, D)) + \delta((\tilde{Z}, D))$.

$P_\lambda^x, P_\mu^y \,\tilde{\in}\, (\tilde{Y}, D)\,\tilde{\cup}\,(\tilde{Z}, D)$ için $d(P_\lambda^x, P_\mu^y \bar{t}) \,\tilde{\leq}\, \delta((\tilde{Y}, D)) + \delta((\tilde{Z}, D))$ bulunur.

$sup\{d(P_\lambda^x, P_\mu^y, \bar{t})(\gamma); P_\lambda^x, P_\mu^y \,\tilde{\in}\, (\tilde{Y}, D)\,\tilde{\cup}\,(\tilde{Z}, D)\} \leq \left[\delta\left((\tilde{Y}, D)\right) + \delta\left((\tilde{Z}, D)\right)\right], \forall \gamma \in D$

Yani, $\delta\left((\tilde{Y}, D)\,\tilde{\cup}\,(\tilde{Z}, D)\right)(\gamma) \,\tilde{\leq}\, \left[\delta\left((\tilde{Y}, D)\right) + \delta\left((\tilde{Z}, D)\right)\right], \forall \gamma \in D.$

Sonuç olarak, $\delta\left((\tilde{Y}, D)\,\tilde{\cup}\,(\tilde{Z}, D)\right) \,\tilde{\leq}\, \delta((\tilde{Y}, D)) + \delta((\tilde{Z}, D))$ elde edilir.

Tanım 5.1.10. $(\tilde{Z}, d)$ bir EPM-uzay ve $(\tilde{Y}, D)$, $(\tilde{Z}, D)$ boş olmayan esnek alt kümelerini alalım. $(\tilde{Y}, D)$, $(\tilde{Z}, D)$ esnek alt kümeleri arasındaki uzaklık aşağıdaki şekilde tanımlanır: her $e \in A$ için,

$$\delta(\tilde{Y},D)(\tilde{Z},D))(e) = inf\left\{\begin{matrix}\mathrm{d}\left(P_\lambda^x, P_\mu^y, \bar{t}\right)(\mathrm{e}); P_\mu^y \cong \mathrm{SP}\left(\tilde{Z},D\right), P_\lambda^x \cong \mathrm{SP}\left(\tilde{Y},D\right)\\ her\ \bar{t} \gtrsim \bar{0}\end{matrix}\right\}.$$

Tanım 5.1.11. $(\tilde{Z},d)$ bir EPM-uzay, $\mathrm{P}_\mathrm{e}^a \cong \tilde{Z}$ ve $\bar{r}$ pozitif esnek bir reel sayını alalım. Bu durumda, P_e^a merkezli ve $\bar{r}$ yarıçaplı bir esnek parametrik açık top (yuvar) aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$B(\mathrm{P}_\mathrm{e}^a,\bar{r}) = \{P_\lambda^x \cong \tilde{Z} : d(P_\lambda^x,\mathrm{P}_\mathrm{e}^a,\bar{t}) \lesssim \bar{r}\,, \bar{t} \gtrsim \bar{0}\} \subset SP(\tilde{Z}).$$

$SS(B(\mathrm{P}_\mathrm{e}^a,\bar{r}))$ esnek kümeler ailesi ise, P_e^a merkezli ve $\bar{r}$ yarıçaplı bir esnek parametrik açık top (yuvar) denir.

Tanım 5.1.12. $(\tilde{Z},d)$ bir EPM-uzay, $\mathrm{P}_\mathrm{e}^\alpha \cong \tilde{X}$ ve $\bar{r}$ pozitif esnek bir reel sayı alalım. Bu durumda, P_e^a merkezli ve $\bar{r}$ yarıçaplı bir esnek parametrik kapalı top (yuvar) aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$B[\mathrm{P}_\mathrm{e}^a,\tilde{r}] = \{P_\lambda^x \cong \tilde{Z} : \mathrm{d}(P_\lambda^x,\mathrm{P}_\mathrm{e}^a,\bar{t}) \lesssim \bar{r},\bar{t} \gtrsim \bar{0}\}.$$

$SS(B[\mathrm{P}_\mathrm{e}^a,\tilde{r}])$ esnek küme ailesi ise, P_e^a merkezli ve $\bar{r}$ yarıçaplı bir esnek parametrik kapalı top (yuvar) olarak adlandırılır.

Tanım 5.1.13. $(\tilde{Z},d)$ en az iki esnek noktaya sahip olan bir EPM-uzay olsun. Her $\bar{t} \gtrsim \bar{0}$ için $d(\mathrm{P}_\mathrm{e}^a,\mathrm{P}_\mathrm{f}^\mathrm{b},\bar{t}) \gtrsim \bar{0}$ özelliğini sağlayan $\mathrm{P}_\mathrm{e}^a,\mathrm{P}_\mathrm{f}^\mathrm{b}$ esnek nokta çifti için $SS\left(B(P_e^a,\bar{r})\right) \tilde{\cap} SS\left(B\left(P_f^b,\bar{r}\right)\right) = \tilde{\emptyset}$ olacak şekilde $SS\left(B(P_e^a,\bar{r})\right)$ ve $SS(B\left(P_f^b,\bar{r}\right))$ esnek açık yuvarları varsa, $(\tilde{Z},d)$ uzayına Hausdorfftur.

Teorem 5.1.14. Her EPM- uzay Hausdorfftur.

İspat. $(\tilde{X},d)$ en az iki esnek noktaya sahip olan bir esnek parametrik metrik uzay olsun. $d(\mathrm{P}_\mathrm{e}^\mathrm{a},\mathrm{P}_\mathrm{f}^\mathrm{b},\bar{t}) \gtrsim \bar{0}$ olacak şekilde $\mathrm{P}_\mathrm{e}^\mathrm{a},\mathrm{P}_\mathrm{f}^\mathrm{b}$, $\tilde{X}$ de iki esnek nokta olsun.

$\bar{0} \lesssim \tilde{r} \lesssim \frac{1}{2}d(\mathrm{P}_\mathrm{e}^\mathrm{a},\mathrm{P}_\mathrm{f}^\mathrm{b},\bar{t})$ şartını sağlayan herhangi bir $\tilde{r}$ esnek reel sayısını düşünelim.$\tilde{r} \in \tilde{\mathbb{R}}$ ve $SS\left(B(P_e^a,\bar{r})\right) = SS\{P_\lambda^x \cong \tilde{X}; d(P_\lambda^x,\mathrm{P}_\mathrm{e}^\mathrm{a},\bar{t}) \lesssim \bar{r}\,, \bar{t} \gtrsim \bar{0}\}$,

$SS\left(B\left(P_f^b,\bar{r}\right)\right) = \left\{P_\lambda^x \cong \tilde{X}; d(P_\lambda^x,\mathrm{P}_\mathrm{f}^\mathrm{b},\bar{t}) \lesssim \bar{r}\,, \bar{t} \gtrsim \bar{0}\right\}$ $\mathrm{P}_\mathrm{e}^\mathrm{a},\mathrm{P}_\mathrm{f}^\mathrm{b}$ merkezli $\bar{r}$ yarıçaplı esnek açık yuvarlardır. $SS\left(B(P_e^a,\bar{r})\right) \tilde{\cap} SS\left(B\left(P_f^b,\bar{r}\right)\right) = \emptyset$ olduğunu kanıtlayalım.

$SS\big(B(P_e^a,\bar{r})\big) \tilde{\cap} SS\left(B\big(P_f^b,\bar{r}\big)\right) \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. O zaman $P_g^z \tilde{\in} SS\big(B(P_e^a,\bar{r})\big) \tilde{\cap} SS\left(B\big(P_f^b,\bar{r}\big)\right)$ vardır. O halde, $P_g^z \tilde{\in} SS\big(B(P_e^a,\bar{r})\big)$ ise,

$d(\mathrm{P_e^a}, P_g^z, \bar{t}) \tilde{<} \bar{r}$ ve $P_g^z \tilde{\in} SS\left(B\big(P_f^b,\bar{r}\big)\right)$ ise, $d(P_f^b, P_g^z, \bar{t}) \tilde{<} \bar{r}$ dir.

(P3) den $d\big(\mathrm{P_e^a}, \mathrm{P_f^b}, \bar{t}\big) \tilde{\leq} d\big(\mathrm{P_e^a}, P_g^z, \bar{t}\big) + d\big(P_f^b, P_g^z, \bar{t}\big) \tilde{<} \bar{r} + \bar{r} = 2\bar{r}$

$\Rightarrow \bar{r} \tilde{>} \frac{1}{2} d\big(\mathrm{P_e^a}, \mathrm{P_f^b}, \bar{t}\big)$. Bu durum hipotez ile çelişir.

Böylece, $SS\big(B(P_e^a,\bar{r})\big) \tilde{\cap} SS\left(B\big(P_f^b,\bar{r}\big)\right) = \emptyset$ olmalıdır.

Tanım 5.1.15. $(\tilde{Z}, d)$ bir EPM- uzay ve $\mathrm{P_e^a} \tilde{\in} \tilde{Z}$ olsun. $\mathcal{U}(\mathrm{P_e^a})$, $\mathrm{P_e^a}$ esnek noktasını da içeren esnek noktaların bir ailesi olsun. Eğer $\mathrm{P_e^a} \in B(\mathrm{P_e^a}, \bar{r}) \tilde{\subset} \mathcal{U}(\mathrm{P_e^a})$ olacak şekilde $\bar{r}$ esnek pozitif bir reel sayısı varsa, $\mathcal{U}(\mathrm{P_e^a})$ ailesine $\mathrm{P_e^a}$ esnek noktasının komşuluğu denir. Bu durumda, $SS(\mathcal{U}(\mathrm{P_e^a}))$ ailesine $\mathrm{P_e^a}$ esnek noktasının parametrik esnek komşuluğu denir.

Teorem 5.1.16. $(\tilde{Z}, d)$ bir esnek parametrik metrik uzay, $\mathrm{P_e^a} \tilde{\in} \tilde{Z}$ ve U_1 ile U_2, $\mathrm{P_e^a}$ esnek noktasının birer komşuluğu olsun. Bu durumda, $(\tilde{Z}, d)$ uzayında $SS(\mathrm{U_1}) \tilde{\cap} SS(U_2)$, $\mathrm{P_e^a}$ noktasının bir esnek parametrik komşuluğudur.

Teorem 5.1.17. Her esnek parametrik açık top, esnek noktalarının her birinin bir esnek parametrik komşuluğudur.

İspat. $(\tilde{X}, d)$ esnek parametrik metrik uzay olsun. $SS\big(B(P_e^a,\bar{r})\big)$, $\mathrm{P_e^a}$ merkezli ve $\bar{r}$ yarıçaplı olan herhangi bir esnek açık yuvarı düşünelim.

Esnek komşuluk tanımından, $SS\big(B(P_e^a,\bar{r})\big)$ yuvarı $(\tilde{X}, d)$'deki $\mathrm{P_e^a}$ noktasının esnek bir komşuluğu olduğu sonucu çıkar.

$\mathrm{P_e^a}$ esnek noktasından farklı herhangi bir $P_\lambda^x \tilde{\in} SS\big(B(P_e^a,\bar{r})\big)$ düşünelim.Bu durumda, $\bar{0} \neq d\big(P_\lambda^x, \mathrm{P_f^b}, \bar{t}\big) \tilde{<} \tilde{r}$ olmalıdır.

$\bar{0} \tilde{<} \widetilde{r'}\tilde{r} - d\big(P_\lambda^x, \mathrm{P_f^b}, \bar{t}\big)$ olmak üzere $\widetilde{r'}$ seçelim. Bu durumda, $\widetilde{r'}$ pozitif esnek bir reel sayıdır. $P_\mu^y \tilde{\in} SS\big(B(P_\lambda^x,\bar{r})\big)$ için$d\big(P_\lambda^x, P_\mu^y, \bar{t}\big) \tilde{<} \widetilde{r'}$ elde edilir. Koşul (iii)'den

$d\left(\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}}, P_{\mu}^{y}, \bar{t}\right) \lesssim d(\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}}, P_{\lambda}^{x}, \bar{t}) + d\left(P_{\lambda}^{x}, P_{\mu}^{y}, \bar{t}\right) \lesssim d(\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}}, P_{\lambda}^{x}, \bar{t}) + \widetilde{r'} \lesssim \bar{r} P_{\mu}^{y} \in SS\left(B(\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}}, \bar{r})\right)$

$P_{\lambda}^{x} \in SS\left(B\left(P_{\lambda}^{x}\right), \widetilde{r'}\right)\right) \subseteq SS(\left(B(\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}}, \bar{r})\right)$

$\Rightarrow SS(\left(B(\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}}, \bar{r})\right)$ esnek noktalarının her birinin esnek bir komşuluğudur.

Tanım 5.1.18. $(\tilde{Y}, D)$, $(\tilde{Z}, d)$ esnek parametrik metrik uzayında bir esnek alt kümesini alalım. Eğer $\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}} \in B(\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}}, \bar{\mathrm{r}}) \subseteq SP(\tilde{\mathrm{Y}}, D)$ şartını sağlayan $\bar{r}$ pozitif esnek reel sayısı varsa, $\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}}$ esnek noktasına $(\tilde{Y}, D)$ esnek kümesinin iç noktası olarak adlandırılır.

Tanım 5.1.19. $(\tilde{\mathrm{Z}}, \mathrm{A})$, $(\tilde{\mathrm{X}}, \mathrm{d})$ esnek parametrik metrik uzayında bir esnek alt küme olsun. Bu durumda, $(\tilde{\mathrm{Z}}, \mathrm{A})$ esnek kümesinin içi, $(\tilde{\mathrm{Z}}, \mathrm{A})$ nın bütün iç noktalarını içeren küme olarak adlandırlır. $(\tilde{\mathrm{Z}}, \mathrm{A})$ esnek kümesinin içi, $(\tilde{\mathrm{Z}}, \mathrm{A})^{\circ}$ şeklinde gösterilir. Burada

$(\tilde{Z}, \mathrm{D})^{\circ} = P_{\lambda}^{x} \in (\tilde{Z}, D) P_{\lambda}^{x} \in BP_{\lambda}^{x}, \bar{r}) \subseteq SP(\tilde{Z}, D)\}$.

$SS\left((\tilde{Z}, D)^{\circ}\right)$ ise, $(\tilde{Z}, D)$ esnek kümesinin esnek parametrik içi olarak adlandırılır.

Teorem 5.1.20. $(\tilde{Y}, D)$ ve $(\tilde{\mathrm{Z}}, D)$, $(\tilde{X}, d)$ esnek parametrik metrik uzayının boş olmayan esnek alt kümeleri olsun. Bu durumda,

i) $SS((\tilde{Y}, D))^{\circ} \subseteq (\tilde{Y}, D)$,

ii) $(\tilde{Y}, D) \subseteq (\tilde{\mathrm{Z}}, D) \Rightarrow SS(\left(\tilde{Y}, D\right)^{\circ}) \subseteq SS(\left(\tilde{\mathrm{Z}}, D\right)^{\circ})$,

iii) $SS(\left(\tilde{Y}, D\right)^{\circ}) \tilde{\cap} SS(\left(\tilde{\mathrm{Z}}, D\right)^{\circ}) = SS(\left(\tilde{Y}, D\right) \tilde{\cap} \left(\tilde{Z}, D\right))^{\circ}$,

iv) $SS(\left(\tilde{Y}, D\right)^{\circ}) \tilde{\cup} SS(\left(\tilde{\mathrm{Z}}, D\right)^{\circ}) \tilde{\supseteq} SS(\left(\tilde{Y}, D\right)^{\circ}) \tilde{\cup} SS(\left(\tilde{Z}, D\right)^{\circ})$.

İspat. (iii) ü ispatlayalım. $P_{\lambda}^{x} \in SS(\left(\tilde{Y}, D\right) \tilde{\cap} \left(\tilde{Z}, D\right))^{\circ}$olsun.

$P_{\lambda}^{x} \in B(P_{\lambda}^{x}, \bar{r}) \subset SP(\left(\tilde{Y}, D\right) \tilde{\cap} SP\left(\tilde{Z}, D\right)) = SP(\tilde{Y}, D) \cap SP(\tilde{Z}, D)$ olması durumunda bir $\bar{r}$ pozitif esnek reel sayısı vardır.

$\Rightarrow P_{\lambda}^{x} \in B(P_{\lambda}^{x}, \bar{r}) \subset SP(\left(\tilde{Y}, D\right)$ ve $P_{\lambda}^{x} \in B(P_{\lambda}^{x}, \bar{r}) \subset SP(\tilde{Z}, D)$

$\Rightarrow P_\lambda^x \tilde{\in} SS((\tilde{Y},D)^\circ)$ ve $P_\lambda^x \tilde{\in} SS((\tilde{Z},D)^\circ)$

$\Rightarrow P_\lambda^x \tilde{\in} SS((\tilde{Y},D)^\circ) \tilde{\cap} SS((\tilde{Z},D)^\circ)$

$SS((\tilde{Y},D)^\circ) \tilde{\cap} SS((\tilde{Z},D)^\circ) \tilde{\supset} SS((\tilde{Y},D) \tilde{\cap} (\tilde{Z},D))^\circ$ (5.1)

elde edilir.

Tersine , $P_\lambda^x \tilde{\in} SS((\tilde{Y},D)^\circ) \tilde{\cap} SS((\tilde{Z},D)^\circ)$ olsun.

$\Rightarrow P_\lambda^x \tilde{\in} SS((\tilde{Y},D)^\circ)$ ve $P_\lambda^x \tilde{\in} SS((\tilde{Z},D)^\circ)$

$P_\mu^y \in B(P_\mu^y,\overline{r_1}) \subset SP((\tilde{Y},D))$ ve $P_\mu^y \in B(P_\mu^y,\overline{r_2}) \subset SP((\tilde{Z},D))$ olması durumunda bir $\overline{r_1},\overline{r_2}$ pozitif esnek reel sayıları vardır.

$\bar{r}(\lambda) = min\{\overline{r_1}(\lambda),\overline{r_2}(\lambda)\}, \forall\lambda \in D$ olsun. Bu durumda $\bar{r}$ bir pozitif esnek reel sayıdır.

$P_\mu^y \in B(P_\mu^y,\overline{r_1}) \subset SP((\tilde{Y},D))veP_\mu^y \in B(P_\mu^y,\overline{r_2}) \subset SP((\tilde{Z},D))$

$\Rightarrow P_\mu^y \in B(P_\mu^y,\bar{r}) \subset SP(\tilde{Y},D) \cap SP(\tilde{Z},D) = SP((\tilde{Y},D) \tilde{\cap} (\tilde{Z},D))$

$\Rightarrow P_\lambda^x \tilde{\in} SS(((\tilde{Y},D)) \tilde{\cap} SS(\tilde{Z},D))^\circ)$

$SS((\tilde{Y},D)^\circ) \tilde{\cap} SS((\tilde{Z},D)^\circ) \tilde{\subset} SS((\tilde{Y},D) \tilde{\cap} (\tilde{Z},D))^\circ$ (5.2)

elde edilir.

Denklem (5.1) ve Denklem (5.2) den,

$SS((\tilde{Y},D)^\circ) \tilde{\cap} SS((\tilde{Z},D)^\circ) = SS((\tilde{Y},D) \tilde{\cap} (\tilde{Z},D))^\circ$elde edilir.

Tanım 5.1.21. $(\tilde{Z},d)$ esnek parametrik metrik uzay ve $(\tilde{Y},A)$ boş olmayan esnek bir alt küme alalım. Eğer $(\tilde{Y},A)$ nın bütün esnek noktaları $(\tilde{Y},A)$ nın birer iç noktası oluyorsa $(\tilde{Y},A)$ esnek kümesine $\tilde{Z}$ uzayında esnek açıktır olarak adlandırlır.

Teorem 5.1.22. Esnek parametrik metrik uzaylarda her esnek parametrik açık top bir esnek açık kümedir.

İspat. $SS(B(\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}},\bar{r}))$, $(\tilde{X},d)$ esnek metrik uzayında $\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}}$merkezli ve $\bar{r}$ yarıçaplı esnek açık yuvar olsun. $SS(B(\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}},\bar{r}))$ nın bir esnek açık küme olduğunu ispatlayalım.

$SS(B(\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}},\bar{r}))$, $B(\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}},\bar{r})$ yuvarın bütün esnek noktalarının kümesini üretir ve bunların hepsi $SS(B(\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}},\bar{r}))$' nın iç noktalarıdır.

Böylece $SS(B(\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}},\bar{r}))$, $(\tilde{X},d)$ parametrik esnek metrik uzayında bir esnek açık kümedir.

Teorem 5.1.23. $(\tilde{X},d)$ esnek parametrik metrik uzayında,

i) $\tilde{\emptyset}$ esnek kümesi esnek açıktır;

ii) $\tilde{X}$ mutlak esnek kümenin kendisi de esnek açıktır;

iii) Esnek açık kümelerin birleşimi esnek açıktır;

iv)Esnek açık kümelerin sonlu sayıdaki kesişimi esnek açıktır.

İspat. Tanımlardan açıktır.

Yukarıdaki teoremin ışığında, her esnek parametrik metrik uzayın tam olarak bir esnek topolojik uzay olduğu sonucuna varılır.

Tanım 5.1.24. $(\tilde{X},d)$ esnek parametrik metrik uzay olsun. Eğer $(\tilde{Y},\mathrm{A})^{c}$ tümleyeni, $(\tilde{X},d)$ uzayında esnek açık ise, $(\tilde{Y},A)\cong\tilde{X}$ esnek kümesi, d metriğine göre $\tilde{X}$ de esnek kapalıdır denir.

Teorem 5.1.25. $(\tilde{X},d)$ parametrik esnek metrik uzayında,

i) $\tilde{\emptyset}$ esnek küme esnek kapalıdır;

ii) $\tilde{X}$ mutlak esnek kümenin kendisi de esnek kapalıdır;

iii)Esnek kapalı kümelerin kesişimi esnek kapalıdır;

iv)Esnek açık kümelerin sonlu sayıdaki birleşimi esnek kapalıdır.

İspat. Tanımlardan açıktır.

Tanım 5.1.26. $(\tilde{X},d)$ esnek parametrik metrik uzay ve $(\tilde{Z},D)\tilde{\subset}\tilde{X}$ olsun. $\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}}\tilde{\in}\tilde{X}$esnek noktası $(\tilde{Z},D)$ nın esnek limit(yığılma) noktası denir. $:\Leftrightarrow(\tilde{X},d)$ uzayında $\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}}$ esnek noktasını içeren her $SS(B(\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}},\bar{r}))$ esnek açık yuvar, $\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}}$ esnek noktasından farklı $(\tilde{Z},D)$ esnek kümesinin en az bir esnek nokta içerir.$(\tilde{Z},D)$esnek kümesinin bütün esnek noktalarının kümesi $(\tilde{Z},D)^{d}$ şeklinde gösterilir.

Açıktır ki $\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}}\tilde{\in}\tilde{X}$ esnek noktası$(\tilde{Z},D)$ esnek kümesinin esnek limit (yığılma) noktasıdır. $\Leftrightarrow(\tilde{X},d)$ uzayında $\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}}$ esnek noktasını içeren her $SS(\mathcal{U}(\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}}))$ esnek komşuluk, $\mathrm{P}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{a}}$ esnek noktasından farklı $(\tilde{Z},D)$ esnek kümesinin en az bir esnek noktasını içerir.

Tanım 5.1.27. Eğer her $\lambda\in A$ için $F(\lambda)$ sonlu (ya da sayılabilir) ise, (F,A) esnek kümesine sonlu (ya da sayılabilir) esnek küme denir. Aksi takdirde , bu esnek küme sonsuz olarak adlandırılır.

Teorem 5.1.28. $(\tilde{Z},D)$ sonlu bir esnek kümesinin, esnek limit noktası yoktur.

İspat. $(\tilde{Z},D)$ sonlu bir esnek küme ve $P_{\lambda}^{x}\tilde{\in}\tilde{X}=(\tilde{Z},D)\tilde{\cup}(\tilde{Z},D)^{C}$ olsun. Bu durumda, ya$P_{\lambda}^{x}\tilde{\in}(\tilde{Z},D)$ ya da $P_{\lambda}^{x}\tilde{\in}(\tilde{Z},D)^{C}$dır. Eğer $P_{\lambda}^{x}\tilde{\in}\left(\tilde{Z},D\right)$ ise, o zaman her $\bar{\lambda}\tilde{\in}D$ için

$r_{\lambda}=\min\{d\left(P_{\mu}^{y},P_{\gamma}^{z},\bar{t}\right)\left(\bar{\lambda}\right)\mid P_{\mu}^{y},P_{\gamma}^{z}\tilde{\in}\left(\tilde{Z},D\right),P_{\mu}^{y}\neq P_{\gamma}^{z},\forall\,\bar{t}\tilde{>}\bar{0}\}$olmak üzere

$\tilde{r}(\lambda)=r_{\lambda}$ olacak şekilde bir $\bar{r}$ esnek reel sayısını düşünelim. Her $\lambda\in D,\bar{t}\tilde{>}\bar{0}$ için $d(P_{\mu}^{y},P_{\gamma}^{z},\bar{t})(\bar{\lambda})$ sonlu bir küme olduğundan, minimum operatörü iyi tanımlanmıştır.

Bu durumda her $P_{\mu}^{y}\tilde{\in}(\tilde{Y},A)$ için $SS(B\left(P_{\mu}^{y},\bar{r}\right))$, P_{μ}^{y} den farklı $(\tilde{Y},A)$ hiçbir esnek noktasını içermez. $(\tilde{Y},A)$ nın esnek noktaları $(\tilde{Y},A)$ esnek limit noktası olamaz. Diğer durumda, eğer $P_{\lambda}^{x}\tilde{\in}(\tilde{Y},A)^{C}$ ise, her $\lambda\in A$ için

$r_{\lambda}=\frac{1}{2}\min\{\,d\left(P_{\lambda}^{x},P_{\mu}^{y},\bar{t}\right)\left(\bar{\lambda}\right)\mid P_{\mu}^{y}\tilde{\in}\left(\tilde{Y},A\right)\}$olmak üzere $\tilde{r}(\lambda)=r_{\lambda}$ olacak şekilde bir $\bar{r}$ esnek reel sayısını düşünelim.

Bu durumda $SS(B\left(P_{\mu}^{y},\bar{r}\right))$ esnek yuvarının $(\tilde{Y},A)$'nın esnek noktasını içermediği görülür. Sonuç olarak $P_{\lambda}^{x}\tilde{\in}\tilde{X}$ esnek noktası, verilen parametrik esnek metrik uzayda $(\tilde{Y},A)$ nın esnek bir limit noktası olamaz.

Teorem 5.1.29. $(\tilde{X}, d)$ esnek parametrik metrik uzay ve $\left(\tilde{F}, D\right), (\tilde{Z}, D) \cong \tilde{X}$ olsun.

i) $\emptyset^d = \emptyset$ ve $\tilde{X}^d = \tilde{X}$;

ii) $\left(\tilde{F}, D\right) \cong \left(\tilde{Z}, D\right) \Rightarrow \left(\tilde{F}, D\right)^d \cong \left(\tilde{Z}, D\right)^d$;

iii) $(\left(\tilde{F}, D\right)^d)^d \cong \left(\tilde{F}, D\right)^d$;

iv) $\left(\tilde{F}, D\right)^d \tilde{\cup} \left(\tilde{Z}, D\right)^d = (\left(\tilde{F}, D\right) \tilde{\cup} \left(\tilde{Z}, D\right))^d$;

vi) $(\left(\tilde{F}, D\right) \tilde{\cap} \left(\tilde{Z}, D\right))^d \cong \left(\tilde{F}, D\right)^d \tilde{\cap} \left(\tilde{Z}, D\right)^d$.

Tanım 5.1.30. $(\tilde{X}, d)$ esnek parametrik metrik uzay ve $(\tilde{Z}, D) \cong \tilde{X}$ olsun. $(\tilde{X}, d)$ uzayında $(\tilde{Z}, D)$ nın bütün esnek ve esnek limit noktalarınınailesi ile oluşturulan esnek kümeye $(\tilde{Z}, D)$ nın esnek kapanışı denir. $\overline{(\tilde{Z}, D)}$ ile gösterilir.

Teorem 5.1.31. $(\tilde{Z}, d)$ esnek parametrik metrik uzay ve $\left(\tilde{R}, D\right), (\tilde{F}, D) \cong \tilde{X}$olsun. Bu durumda,

i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ ve $\bar{\bar{Z}} = \check{Z}$;

ii) $\left(\tilde{R}, D\right) \cong \overline{\left(\tilde{R}, D\right)}$;

iii) $\left(\tilde{R}, D\right)^d \cong \overline{\left(\tilde{R}, D\right)}$;

iv) $\overline{\left(\tilde{R}, D\right)} = \overline{\overline{\left(\tilde{R}, D\right)}}$;

v) $(\tilde{R}, D)$esnek kapalı bir kümedir.$\Leftrightarrow$ $\left(\tilde{Y}, D\right) = \overline{\left(\tilde{Y}, D\right)}$;

vi) $\left(\tilde{R}, D\right) \cong \left(\tilde{F}, D\right) \Rightarrow \overline{\left(\tilde{R}, D\right)} \cong \overline{(F, D)}$;

vii) $\overline{\left(\tilde{R}, D\right)} \tilde{\cup} \overline{\left(\tilde{F}, D\right)} = \overline{\left(\tilde{R}, D\right) \tilde{\cup} \left(\tilde{F}, D\right)}$;

viii) $\overline{\left(\tilde{R}, D\right) \tilde{\cap} \left(\tilde{F}, D\right)} \cong \overline{\left(\tilde{R}, D\right)} \tilde{\cap} \overline{\left(\tilde{F}, D\right)}$.

Teorem 5.1.32. $(\tilde{Y}, d_Y, A)$, $(\tilde{X}, d)$ esnek parametrik metrik uzayın bir metrik alt uzayı ve $P_\mu^y \tilde{\in} (\tilde{Y}, A)$olsun.

$\tilde{X}$'de $SS(B(P_\mu^y, \bar{r}))$ esnek açık yuvarı için, $SS(B(P_\mu^y, \bar{r}) \tilde{\cap} (\tilde{Y}, A)$, $(\tilde{Y}, d_Y)$ de bir esnek açık yuvardır. Ayrıca $(\tilde{Y}, d_Y)$ de herhangi bir esnek açık yuvar , $(\tilde{Y}, A)$ ile $\tilde{X}$ de esnek açık bir yuvarın kesişimi olarak elde edilir.

İspat. Herhangi bir $P_\mu^y \tilde{\in} (\tilde{Y}, A)$ ve $\bar{r} \tilde{>} \bar{0}$ için, SS($B_Y(P_\mu^y, \bar{r})$) = SS($B_Y(P_\mu^y, \bar{r})$)$\tilde{\cap}$($\tilde{Y}$,A) ispatlanırsa teorem tamamen ispatlanmış olacaktır.

$SS(B_Y(P_\mu^y, \tilde{r}) \cap (\tilde{Y}, A) =$

SS($\{P_\lambda^x \tilde{\in} \tilde{X} \mid \mathrm{d}(P_\lambda^x, P_\mu^y, \bar{t}) \tilde{<} \bar{r}, \bar{t} \tilde{>} \bar{0}\}$)$\tilde{\cap}$($\tilde{Y}$,A)

= SS($\{P_Y^z \tilde{\in} (\tilde{Y}, \mathrm{A}) \mid \mathrm{d}(P_Y^z, P_\mu^y, \bar{t}) \tilde{<} \bar{r}, \bar{t} \tilde{>} \bar{0}\}$)

= SS($\{P_Y^z \tilde{\in} (\tilde{Y}, \mathrm{A}) \mid d_Y(P_Y^z, P_\mu^y, \bar{t}) \tilde{<} \bar{r}, \bar{t} \tilde{>} \bar{0}\}$).

Tanım 5.1.33. Eğer $\overline{(\tilde{Y}, A)} = \tilde{Z}$ olması durumumda $\tilde{Z}$ in sayılabilir bir $(\tilde{Y}, A)$ esnek alt kümesi varsa, $(\tilde{Z}, d)$ EPM-uzayına ayrılabilirdir olarak adlandırılır.

Tanım 5.1.34. $(\tilde{X}, d)$'nin her esnek açık kümesi, bu ailenin bazı esnek kümelerinin birleşimi şeklinde yazılmak üzere, eğer $(\tilde{X}, d)$ de esnek açık kümelerin sayılabilir bir ailesi varsa $(\tilde{X}, d)$ parametrik esnek metrik uzayına ikinci sayılabilir uzay denir.

Teorem 5.1.35. Parametrelerin kümesi sayılabilir olmak üzere, her ayrılabilir esnek parametrik metrik uzay ikinci sayılabilirdir.

İspat. $(\tilde{X}, d)$ ayrılabilir bir esnek parametrik metrik uzay olsun. Tanım gereği $\overline{(\tilde{Y}, A)} = \tilde{X}$ olacak şekilde $\tilde{X}$ in bir sayılabilir $(\tilde{Y}, A)$ esnek kümesi vardır.

$\mathfrak{B} = \{SS\ (\mathrm{B}(P_\lambda^x, \bar{r})); P_\lambda^x \tilde{\in} (\tilde{Y}, \mathrm{A})\ , \mathrm{r} \in \mathrm{Q}, \bar{r} \tilde{>} \bar{0}\}$ ailesini dikkate alalım.

O halde $\mathfrak{B}$, verilen $(\tilde{X}, d)$ esnek parametrik metrik uzayda esnek açık kümelerin sayılabilir bir ailesidir.$\mathfrak{B}$ailesinin bir taban olduğunu göstermek için,

$S, (\widetilde{X}, d)$'de esnek açık bir küme ve $P_\lambda^x \,\widetilde{\in}\, S$ olsun. $SS(B(P_\lambda^x, \bar{r})) \,\widetilde{\subset}\, S$olacak şekilde

$\bar{r} \,\widetilde{>}\, \bar{0}$ olan bir $r \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayısı bulunabilir.

$\overline{(\tilde{Y}, \mathrm{A})} = \tilde{X}$ iken, $P_\mu^y \,\widetilde{\in}\, SS(B(P_\lambda^x, \bar{r}))$ olacak şekilde bir $P_\mu^y \,\widetilde{\in}\, (\tilde{Y}, A)$ vardır. $B_{P_\lambda^x} = SS\left(B\left(P_\mu^y, \frac{\bar{r}}{2}\right)\right)$ alalım. $B_{P_\lambda^x} \,\widetilde{\in}\, \mathfrak{B}$ ve $P_\lambda^x \,\widetilde{\in}\, B_{P_\lambda^x} \,\widetilde{\subset}\, S$ dır. Ayrıca, $P_\mu^y \,\widetilde{\in}\, SS(B(P_\lambda^x, \frac{\bar{r}}{2}))$ dır. Bundan dolayı her $\bar{t} \,\widetilde{>}\, \bar{0}$ için,$d(P_\lambda^x, P_\mu^y, \bar{t}) \,\widetilde{<}\, \frac{\bar{r}}{2}$ elde edilir.

$\Rightarrow P_\lambda^x \,\widetilde{\in}$SS(B($P_\mu^y, \frac{\bar{r}}{2}$)) = $B_{P_\lambda^x}$ ve$P_\gamma^z \,\widetilde{\in}\, B_{P_\lambda^x}$

$\Rightarrow$ d$(P_\gamma^z, P_\mu^y, \bar{t}) \,\widetilde{<}\, \frac{\bar{r}}{2}$

$\Rightarrow d\left(P_\lambda^x, P_\gamma^z, \bar{t}\right) \,\widetilde{\leqq}\, d\left(P_\lambda^x, P_\mu^y, \bar{t}\right) + d(P_\gamma^z, P_\mu^y, \bar{t}) \,\widetilde{<}\, \frac{\bar{r}}{2} + \frac{\bar{r}}{2}$ = r

$\Rightarrow P_\gamma^z \,\widetilde{\in}\, SS\left(B(P_\lambda^x, \bar{r})\right) \,\widetilde{\subset}\, S, \ \forall\ \bar{t} \,\widetilde{>}\, \bar{0}.$

Böylece, verilen S bir esnek açık kümesi ve herhangi bir $P_\lambda^x \,\widetilde{\in}\, S$ için, $P_\lambda^x \,\widetilde{\in}\, B_{P_\lambda^x} \,\widetilde{\subset}\, S$ olacak şekilde bir $B_{P_\lambda^x} \,\widetilde{\in}\, \mathfrak{B}$ vardır.

$S = \cup_{P_\lambda^x \widetilde{\in} \mathcal{U}}\, B_{P_\lambda^x}$elde edilir.

Bu $\mathfrak{B}$ ailesinin, verilen $(\widetilde{X}, d)$ esnek parametrik metrik uzay için ispatı tamamlayan sayılabilir bir açık taban olduğunu kabul eder.

Tanım 5.1.36. $\left\{P_{\lambda,n}^x\right\}_n$, $(\widetilde{Z}, d)$ esnek parametrik metrik uzayında esnek noktaların bir dizisini alalım. Eğer $n \to \infty$ için$d(P_{\lambda,n}^x, P_\mu^y, \bar{t}) \to \bar{0}$ olması durumunda bir $P_\mu^y \,\widetilde{\in}\, \tilde{Z}$ esnek noktası varsa, $\left\{P_{\lambda,n}^x\right\}_n$dizisine $(\widetilde{Z}, d)$ uzayında yakınsaktır denir. Bu, keyfi olarak seçilen her $\tilde{\varepsilon} \,\widetilde{>}\, \bar{0}$ için, $n > N$ olduğunda $\bar{0} \,\widetilde{\leqq}\, d(P_{\lambda,n}^x, P_\mu^y, \bar{t}) \,\widetilde{<}\, \tilde{\varepsilon}$olacak şekilde bir $N = N(\tilde{\varepsilon})$ doğal sayısı anlamına gelir. Yani, $n > N \Rightarrow P_{\lambda,n}^x \,\widetilde{\in}\, SS\left(B\left(P_\mu^y, \tilde{\varepsilon}\right)\right)$.

$\lim_{n\to\infty} P_{\lambda,n}^x = P_\mu^y$şeklinde gösterilir. $n \to \infty$ için P_μ^y esnek noktasına $\left\{P_{\lambda,n}^x\right\}_n$ dizisinin limiti denir.

Tanım 5.1.37. Eğer $\{d(P^x_{\lambda,m}, P^x_{\lambda,n}, \bar{t}); n, m \in N \; ve \; \bar{t} \gtrsim \bar{0}\}$ esnek reel sayıların kümesi sınırlı ise, $(\tilde{X}, d)$ esnek parametrik metrik uzayında $\{P^x_{\lambda,n}\}_n$ esnek noktaların dizisine sınırlı dizi denir.Yani ,$\forall n, m \in N$ için $d(P^x_{\lambda,m}, P^x_{\lambda,n}, \bar{t}) \lessapprox \breve{M}$ olması durumunda bir $\breve{M} \gtrsim \bar{0}$ pozitif esnek reel sayısı vardır.

Tanım 5.1.38. $\tilde{X}$ deki $\{P^x_{\lambda,n}\}_n$ esnek noktaların dizisine, eğer $\forall i, j \geq m$ için, $d(P^x_{\lambda,i}, P^x_{\lambda,j}, \bar{t})$ olacak şekilde her $\tilde{\varepsilon} \gtrsim \bar{0}$ sayısına karşılık gelen bir $m \in N$ varsa, $(\tilde{X}, d)$ uzayında Cauchy dizisi denir, yani $i, j \to \infty$ için $d(P^x_{\lambda,i}, P^x_{\lambda,j}, \bar{t}) \to \bar{0}$dır.

Teorem 5.1.39. Esnek parametrik metrik uzayda her yakınsak dizi Cauchy ve her Cauchy dizisi sınırlıdır.

Tanım 5.1.40. Eğer $\tilde{X}$ deki her Cauchy dizisi $\tilde{X}$ in bazı esnek noktalarına yakınsıyorsa, $(\tilde{X}, d)$ esnek parametrik metrik uzayına tam uzay denir.

Teorem 5.1.41. $(\tilde{X}, d)$ esnek parametrik metrik uzayında her $(\tilde{Y}, D)$ esnek kümesi için,$\delta\left((\tilde{Y}, D)\right) = \delta(\overline{(\tilde{Y}, D)})$dır.

İspat. $(\tilde{Y}, D) \cong \overline{(\tilde{Y}, D)}$ olduğundan, $\delta\left((\tilde{Y}, D)\right) \lessapprox \delta(\overline{(\tilde{Y}, D)})$ elde edilir. $\tilde{\varepsilon} \gtrsim \bar{0}$ ve $P^x_\lambda, P^y_\mu \tilde{\in} \overline{(\tilde{Y}, D)}$ olsun. $P^x_\lambda \tilde{\in} \overline{(\tilde{Y}, D)}$ olduğundan, bir $P^z_\gamma \tilde{\in} SS(B\left(P^x_\lambda, \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\right)) \tilde{\cap} (\tilde{Y}, D)$ ve benzer şekilde bir $P^w_\beta \tilde{\in} SS(B\left(P^y_\mu, \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\right)) \tilde{\cap} (\tilde{Y}, D)$ dır. O halde, $P^w_\beta, P^z_\gamma \tilde{\in} (\tilde{Y}, D)$ öyle ki $d(P^x_\lambda, P^z_\gamma, \bar{t}) \lessapprox \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$ ve $d(P^x_\lambda, P^w_\beta, \bar{t}) \lessapprox \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$.

Böylece , $d(P^x_\lambda, P^y_\mu, \bar{t}) \lessapprox d(P^x_\lambda, P^z_\gamma, \bar{t}) + d(P^z_\gamma, P^w_\beta, \bar{t}) + d(P^w_\beta, P^y_\mu, \bar{t})$

$\lessapprox \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} + d(P^z_\gamma, P^w_\beta, \bar{t}) = \tilde{\varepsilon} + d(P^z_\gamma, P^w_\beta, \bar{t}) \lessapprox \tilde{\varepsilon} + \delta\left((\tilde{Y}, D)\right)$.

$\tilde{\varepsilon} \gtrsim \bar{0}$ keyfi iken $\delta\left(\overline{(\tilde{Y}, D)}\right) \lessapprox \delta\left((\tilde{Y}, D)\right)$ veren $\delta\left(\overline{(\tilde{Y}, D)}\right) \lessapprox \tilde{\varepsilon} + \delta\left((\tilde{Y}, D)\right)$ elde edilir. Sonuç olarak $\delta\left((\tilde{Y}, D)\right) = \delta(\overline{(\tilde{Y}, D)})$dır.

5.2. Esnek Parametrik Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda, parametrik esnek metrik uzaylarda esnek öz dönüşümlerin (ortak) sabit esnek noktalarının varlığını ve tekliğini araştırmaya ayrılmıştır.

Önerme 5.2.1. $(\widetilde{X}, d)$ bir esnek parametrik metrik uzayı olsun. Her $\bar{k} \widetilde{\in} [\bar{0}, \bar{1})$ ve $n \in \mathbb{N}$ için eğer aşağıdaki eşitsizlik sağlanıyorsa, $\{P_{\lambda_n}^{x_n}\}_n$ esnek noktalarının dizisi Cauchy özelliğini sağlar.

$$d(P_{\lambda_n}^{x_n}, P_{\lambda_{n+1}}^{x_{n+1}}, \bar{t}) \widetilde{\leq} \bar{k} d(P_{\lambda_{n-1}}^{x_{n-1}}, P_{\lambda_n}^{x_n}, \bar{t}) \tag{5.1}$$

İspat. $m > n \geq 1$olsun. Her $\bar{t} \widetilde{>} \bar{0}$ için aşağıdaki açıktır.

$$\begin{aligned} d\left(P_{\lambda_n}^{x_n}, P_{\lambda_m}^{x_m}, \bar{t}\right) &\widetilde{\leq} d\left(P_{\lambda_n}^{x_n}, P_{\lambda_{n+1}}^{x_{n+1}}, \bar{t}\right) + d\left(P_{\lambda_{n+1}}^{x_{n+1}}, P_{\lambda_{n+2}}^{x_{n+2}}, \bar{t}\right) + \cdots + d\left(P_{\lambda_{m-1}}^{x_{m-1}}, P_{\lambda_m}^{x_m}, \bar{t}\right) \\ &\widetilde{\leq} (\bar{k}^n + \bar{k}^{n+1} + \cdots \bar{k}^{m-1})\, d\left(P_{\lambda_0}^{x_0}, P_{\lambda_1}^{x_1}, \bar{t}\right) \\ &\widetilde{\leq} \frac{\bar{k}^n}{\bar{1}-\bar{k}} d\left(P_{\lambda_0}^{x_0}, P_{\lambda_1}^{x_1}, \bar{t}\right) \end{aligned} \tag{5.2}$$

Varsayalım ki $d\left(P_{\lambda_0}^{x_0}, P_{\lambda_1}^{x_1}, \bar{t}\right) \widetilde{>} \bar{0}$ olsun. $\bar{k} \widetilde{<} \bar{1}$ olduğundan, bir önceki eşitsizlikte $m, n \to \infty$ iken limit alınırsa, aşağıdaki elde edilir.

$$\lim_{n,m\to\infty} d\left(P_{\lambda_n}^{x_n}, P_{\lambda_m}^{x_m}, \bar{t}\right) = \bar{0} \tag{5.3}$$

Sonuç olarak, $\left\{P_{\lambda_n}^{x_n}\right\}_n$ dizisi Cauchy özelliğini sağlar. Buna ek olarak, $d\left(P_{\lambda_0}^{x_0}, P_{\lambda_1}^{x_1}, \bar{t}\right) = \bar{0}$ durumunda her $m > n$ için $d\left(P_{\lambda_n}^{x_n}, P_{\lambda_m}^{x_m}, \bar{t}\right) = \bar{0}$ elde edilir.

Teorem 5.2.2. $(\widetilde{Z}, d)$ tam esnek parametrik metrik uzay ve $\varphi_\varphi : (\widetilde{Z}, d) \to (\widetilde{Z}, d)$ bir örten esnek öz dönüşümünü alalım. Her $P_\lambda^x, P_\mu^y \widetilde{\in} SP(\tilde{Z})$ ve her $\bar{t} \widetilde{>} \bar{0}$ için $\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} \widetilde{>} \bar{1}$ olması durumunda

$$d\big(\varphi_\varphi(P_\lambda^x), \varphi_\varphi(P_\mu^y), \bar{t}\big) \widetilde{\geq} \bar{\alpha} d\big(P_\lambda^x, P_\mu^y, \bar{t}\big) + \bar{\beta} d(P_\lambda^x, \varphi_\varphi(P_\lambda^x), \bar{t}) + \bar{\gamma} d(P_\mu^y, \varphi_\varphi(P_\mu^y), \bar{t}) \tag{5.4}$$

eşitsizliğini sağlayan negatif olamayan esnek reel sayı varsa, bu durumda, φ_{φ} özdönüşümünün bir sabit esnek noktası vardır.

İspat. Varsayımlardan, φ_{φ}öz dönüşümünün birebir esnek dönüşüm olduğu açıktır. δ_{ρ} dönüşümü φ_{φ}öz dönüşümünün tersi olsun. $P_{\lambda_0}^{x_0} \widetilde{\in} SP(\tilde{Z})$ ve aşağıdaki gibi dizi seçelim

$P_{\lambda_1}^{x_1} = \delta_{\rho}\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), P_{\lambda_2}^{x_2} = \delta_{\rho}\left(P_{\lambda_1}^{x_1}\right) = \delta_{\rho}{}^{2}\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right), \ldots\ldots\ldots, P_{\lambda_{n+1}}^{x_{n+1}} = \delta_{\rho}\left(P_{\lambda_n}^{x_n}\right) = \delta_{\rho}{}^{n+1}\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right) \ldots$
Tüm pozitif tamsayılar için $P_{\lambda_{n-1}}^{x_{n-1}} \neq P_{\lambda_n}^{x_n}$ eşitsizliğinin seçelim.

(Aksi halde, $P_{\lambda_{n_0}-1}^{x_{n_0}-1} = P_{\lambda_{n_0}}^{x_{n_0}}$olacak şekilde bir $P_{\lambda_{n_0}}^{x_{n_0}}$ nokta varsa, bu durumda φ_{φ} öz dönüşümünün $P_{\lambda_{n_0}}^{x_{n_0}}$ bir sabit noktasıdır). Eşitsizlik (5.4) den aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$d(P_{\lambda_{n-1}}^{x_{n-1}}, P_{\lambda_n}^{x_n}, \bar{t}) = d(\varphi_{\psi}\,(\varphi_{\psi}{}^{-1}\left(P_{\lambda_{n-1}}^{x_{n-1}}\right)), \varphi_{\psi}\,(\varphi_{\psi}{}^{-1}(P_{\lambda_n}^{x_n})), \bar{t})$$

$$\widetilde{\geq} \bar{\alpha} d(\varphi_{\psi}{}^{-1}(P_{\lambda_{n-1}}^{x_{n-1}}), \varphi_{\psi}{}^{-1}(P_{\lambda_n}^{x_n}), \bar{t}) + \bar{\beta} d(\varphi_{\psi}{}^{-1}(P_{\lambda_n-1}^{x_{n-1}}), \varphi_{\psi}{}^{-1}(P_{\lambda_{n-1}}^{x_{n-1}}), \bar{t}) +$$
$$\bar{\gamma} d(\varphi_{\psi}{}^{-1}(P_{\lambda_n}^{x_n}), \varphi_{\psi}\,(\varphi_{\psi}{}^{-1}(P_{\lambda_n}^{x_n})), \bar{t}) \qquad (5.5)$$

$$= \bar{\alpha} d(\delta_{\rho}(P_{\lambda_{n-1}}^{x_{n-1}}), \delta_{\rho}(P_{\lambda_n}^{x_n}), \bar{t}) + \bar{\beta} d(\delta_{\rho}(P_{\lambda_{n-1}}^{x_{n-1}}), P_{\lambda_{n-1}}^{x_{n-1}}, \bar{t}) + \bar{\gamma} d(\delta_{\rho}(P_{\lambda_n}^{x_n}), P_{\lambda_n}^{x_n}, \bar{t})$$

$$= \bar{\alpha} d\left(P_{\lambda_n}^{x_n}, P_{\lambda_{n+1}}^{x_{n+1}}, \bar{t}\right) + \bar{\beta} d\left(P_{\lambda_n}^{x_n}, P_{\lambda_{n-1}}^{x_{n-1}}, \bar{t}\right) + \bar{\gamma} d(P_{\lambda_{n+1}}^{x_{n+1}}, P_{\lambda_n}^{x_n}, \bar{t})$$

Bir önceki eşitsizliğin sağ tarafı düzenlenerek,

$$(\bar{1} - \bar{\beta}) d(P_{\lambda_{n-1}}^{x_{n-1}}, P_{\lambda_n}^{x_n}, \bar{t}) \widetilde{\geq} (\bar{\alpha} + \bar{\gamma}) d(P_{\lambda_{n+1}}^{x_{n+1}}, P_{\lambda_n}^{x_n}, \bar{t}) \qquad (5.6)$$

elde edilir. Eğer $\bar{\alpha} + \bar{\gamma} = \bar{0}$ ise, bu durumda $\bar{b} \gtrsim \bar{0}$ dır. Bu durum Eşitsizlik (5.6) ile çelişmektedir. Böylece $\bar{\alpha} + \bar{\gamma}$ negatif olmamalı ve $(\bar{1} - \bar{\beta}) \gtrsim \bar{0}$ dır.

Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\bar{t} \gtrsim \bar{0}$ ve $\bar{k} = \frac{\bar{1} - \bar{b}}{\bar{\alpha} + \bar{\gamma}} \lesssim \bar{1}$ için

$$d(P_{\lambda_{n+1}}^{x_{n+1}}, P_{\lambda_n}^{x_n}, \bar{t}) \widetilde{\leq} \bar{k} d(P_{\lambda_{n-1}}^{x_{n-1}}, P_{\lambda_n}^{x_n}, \bar{t}) \qquad (5.7)$$

elde edilir. Eşitsizlik (5.7) nin n- kez tekar edilmesi ile aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$d(P_{\lambda_{n+1}}^{x_{n+1}}, P_{\lambda_n}^{x_n}, \bar{t}) \tilde{\leq} \bar{k}^{\,n} d(P_{\lambda_0}^{x_0}, P_{\lambda_1}^{x_1}, \bar{t}) \tag{5.8}$$

elde edilir. Önerme 5.2.1. den $\left\{P_{\lambda_n}^{x_n}\right\}_{n\in N}$ Cauchy özelliğini sağlar. Yani hipoteze göre, $\left\{P_{\lambda_n}^{x_n}\right\}_{n\in N}$ dizisi $P_\rho^\varpi \tilde{\in} SP(\tilde{Z})$ noktasına yakınsar. φ_ψ öz dönüşümü örten olduğundan, $P_\mu^y \tilde{\in} SP(\tilde{Z})$ için $P_\rho^\varpi = \varphi_\psi\,(P_\mu^y)$ yazılabilir. Dikkate alarak

$$d\left(P_{\lambda_n}^{x_n}, P_\rho^\varpi, \bar{t}\right) = \varphi_\psi\left(P_{\lambda_{n+1}}^{x_{n+1}}\right), \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), \bar{t}) \;\tilde{\leq}\; \bar{\alpha} d\left(P_{\lambda_{n+1}}^{x_{n+1}}, P_\mu^y, \bar{t}\right)$$

$$+\bar{\beta} d(P_{\lambda_{n+1}}^{x_{n+1}}, \varphi_\psi\left(P_{\lambda_{n+1}}^{x_{n+1}}\right), \bar{t}) + \bar{\gamma} d(P_\mu^y, \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), \bar{t}) \tag{5.9}$$

$$= \bar{a} d(P_{\lambda_{n+1}}^{x_{n+1}}, P_\mu^y, \bar{t}) + \bar{\beta} d(P_{\lambda_{n+1}}^{x_{n+1}}, P_{\lambda_n}^{x_n}, \bar{t}) + \bar{\gamma} d(P_\mu^y, P_\rho^\varpi, \bar{t}) \quad \text{elde ederiz.}$$

Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ olması durumunda

$$\bar{0} \tilde{\geq} (\bar{\alpha} + \bar{\gamma}) d(P_\mu^y, P_\rho^\varpi, \bar{t}) \tag{5.10}$$

elde edilir. Sonuç olarak, iddia edildiği gibi $P_\mu^y = P_\rho^\varpi$ eşit olur.

Sonuç 5.2.3. $(\tilde{Z}, d)$ bir tam esnek parametrik metrik uzay ve φ_φ: $(\tilde{Z}, d) \to (\tilde{Z}, d)$ bir örten esnek öz dönüşümünü alalım. Eğer her $P_\lambda^x, P_\mu^y \tilde{\in} SP(\tilde{Z})$, $P_\lambda^x \neq P_\mu^y$ ve her $\bar{t} \tilde{>} \bar{0}$ için

$$d(\varphi_\psi\,(P_\lambda^x), \varphi_\psi\left(P_\mu^y\right), \bar{t}) \tilde{\leq} \bar{k} d(P_\lambda^x, P_\mu^y, \bar{t}) \tag{5.11}$$

koşulunu sağlayan bir $\bar{k} \tilde{<} \bar{1}$ sabiti varsa, bu durumda φ_φ öz dönüşümünün tek bir sabit esnek noktası vardır.

İspat. Bir önceki teoreme göre, $\bar{\alpha} = \bar{\gamma} = \bar{0}$ ve $\bar{a} = \bar{k}$ olması durumunda sabit esnek noktanın varlığı açıktır. Bu nedenle, sadece tekliğini kanıtlamak yeterlidir. Bunu yapmak için tersini varsayalım. Yani, $P_\rho^\varpi \neq P_\gamma^z$ noktaları φ_φ öz dönüşümünün esnek sabit noktaları olsun, Koşul (5.12) den aşağıdaki elde edilir.

$$d\left(P_\rho^\varpi, P_\gamma^z, \bar{t}\right) = d(\varphi_\psi\left(P_\rho^\varpi\right), \varphi_\psi\,(P_\gamma^z), \bar{t}) \tilde{\leq} \bar{k} d(P_\rho^\varpi, P_\gamma^z, \bar{t}) \tag{5.12}$$

Bu da $d(P_\rho^\varpi, P_\gamma^z, \bar{t}) = \bar{0}$ anlamına gelir, yani $P_\rho^\varpi = P_\gamma^z$ olur.

Sonuç 5.2.4. $(\widetilde{Z}, d)$ bir tam esnek parametrik metrik uzay ve $\varphi_\varphi : (\widetilde{Z}, d) \to (\widetilde{Z}, d)$ bu uzayda bir örten esnek öz dönüşüm olsun. Eğer her $P_\lambda^x, P_\mu^y \cong SP(\tilde{Z})$, $P_\lambda^x \neq P_\mu^y$ ve her $\bar{t} \gtrsim \bar{0}$ için bir $\bar{k} \gtrsim \bar{1}$ esnek sabiti ve n pozitif tamsayı

$$d(\varphi_\psi{}^n(P_\lambda^x), \varphi_\psi{}^n(P_\mu^y), \bar{t}) \gtrsim \bar{k} d(P_\lambda^x, P_\mu^y, \bar{t}) \tag{5.13}$$

koşulunu sağlarsa, bu durumda φ_φ öz dönüşümünün tek bir sabit esnek noktası vardır.

İspat. Bir önceki sonuçtan, $\varphi_\psi{}^n$ öz dönüşümünün P_ρ^ϖ gibi bir esnek noktası vardır. Ancak, $\varphi_\psi{}^n\left(\varphi_\psi\left(P_\rho^\varpi\right)\right) = \varphi_\psi\left(\varphi_\psi{}^n\left(P_\rho^\varpi\right)\right) = \varphi_\psi\left(P_\rho^\varpi\right)$. Böylece, $\varphi_\psi\left(P_\rho^\varpi\right)$ noktası $\varphi_\psi{}^n$ esnek öz dönüşümünün bir sabit esnek noktasıdır. Bundan dolayı $\varphi_\psi\left(P_\rho^\varpi\right) = P_\rho^\varpi$. $\varphi_\psi{}^n$ ve φ_φ öz dönüşümleri aynı sabit esnek noktalara sahip olduğundan, sonuç elde edilir.

Tanım 5.2.5. φ_φ ve δ_ρ, $\tilde{X}$ üzerinde öz dönüşüm olsun. O halde φ_φ ve δ_ρ öz dönüşümlerinin tüm çakışık noktalarının yer değiştirmesi durumunda, φ_φ ve δ_ρ öz dönüşümleri zayıf uyumlu oldukları söylenir; yani, $P_\lambda^x \cong SP(\tilde{X})$için $\varphi_\varphi\left(\delta_\rho(P_\lambda^x)\right) = \delta_\rho\left(\varphi_\varphi(P_\lambda^x)\right)$.

Teorem 5.2.6. $(\widetilde{Z}, d)$ bir tam EPM-uzay ve $\varphi_\varphi(\tilde{Z}) \subseteq \delta_\rho(\tilde{Z})$ olacak şekilde $\varphi_\varphi, \delta_\rho : (\widetilde{Z}, d) \to (\widetilde{Z}, d)$ zayıf uyumlu dönüşümleri olsun. Eğer her $P_\lambda^x, P_\mu^y \cong SP(\tilde{Z})$ ve bir $\bar{k} \gtrsim \bar{1}$ için aşağıdaki eşitsizlik

$$d(\delta_\rho(P_\lambda^x), \delta_\rho(P_\mu^y), \bar{t}) \gtrsim \bar{k} d(\varphi_\varphi(P_\lambda^x), \varphi_\varphi(P_\mu^y), \bar{t}) \tag{5.14}$$

sağlanıyorsa ve eğer $\varphi_\varphi(\tilde{Z})$ ya da $\delta_\rho(\tilde{Z})$ görüntülerinden biri tam ise, bu durumda $\tilde{Z}$ uzayında bu dönüşümlerin bir tek ortak sabit esnek noktası vardır.

İspat. $P_{\lambda_0}^{x_0} \cong SP(\tilde{Z})$ keyfi alınsın. $\varphi_\varphi(\tilde{Z}) \subseteq \delta_\rho(\tilde{Z})$ olduğundan,

$P_{\mu_1}^{y_1} = \delta_\rho(P_{\lambda_1}^{x_1}) = \varphi_\psi\left(P_{\lambda_0}^{x_0}\right)$ olacak şekilde $P_{\lambda_1}^{x_1}$ esnek noktasını seçelim.

Genel olarak, $P_{\mu_{n+1}}^{y_{n+1}} = \delta_\rho\left(P_{\lambda_{n+1}}^{x_{n+1}}\right) = \varphi_\psi\,(P_{\lambda_n}^{x_n})$ olmak üzere $P_{\lambda_{n+1}}^{x_{n+1}}$ seçelim. Bu durumda, Koşul (5.14) den

$$d(P_{\mu_{n+1}}^{y_{n+1}}, P_{\mu_{n+2}}^{y_{n+2}}, \bar{t}) = d(\varphi_\psi\left(P_{\lambda_n}^{x_n}\right), \varphi_\psi\,(P_{\lambda_{n+1}}^{x_{n+1}}), \bar{t}) \lesssim \frac{\bar{1}}{\bar{k}} d(\delta_\rho(P_u^v), \delta_\rho\left(P_{\mu_n}^{y_n}\right), \bar{t}) \qquad (5.15)$$

elde edilir. $\bar{\ell} = \frac{\bar{1}}{\bar{k}}$ olmak üzere Koşul (5.15) in, $(n+1)$ - kez tekrarlanması ile aşağıdaki eşitsizlik oluşur.

$$d(P_{\mu_{n+1}}^{y_{n+1}}, P_{\mu_{n+2}}^{y_{n+2}}, \bar{t}) \lesssim \bar{\ell}^{n+1} d(P_{\mu_0}^{y_0}, P_{\mu_1}^{y_1}, \bar{t}) \qquad (5.16)$$

$n > m$ için

$$d\left(P_{\mu_n}^{y_n}, P_{\mu_m}^{y_m}, \bar{t}\right) \lesssim d\left(P_{\mu_n}^{y_n}, P_{\mu_{n+1}}^{y_{n+1}}, \bar{t}\right) + d\left(P_{\mu_n}^{y_n}, P_{\mu_{n+1}}^{y_{n+1}}, \bar{t}\right) + \cdots \ldots \ldots + d(P_{\mu_{m-1}}^{y_{m-1}}, P_{\mu_m}^{y_m}, \bar{t})$$

$$\lesssim \left(\bar{\ell}^n + \bar{\ell}^{n+1} + \cdots \ldots \ldots + \bar{\ell}^{m-1}\right) d(P_{\mu_0}^{y_0}, P_{\mu_1}^{y_1}, \bar{t}) \qquad (5.17)$$

Bir önceki eşitsizlikte $n, m \to \infty$ iken limit alınırsa, $\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(P_{\lambda_n}^{x_n}, P_{\mu_m}^{y_m}, \bar{t}) = \bar{0}$ dır. Böylece, $\left\{P_{\lambda_n}^{x_n}\right\}_{n\in N}$ dizisi Cauchy özelliklerini sağlar ve $P_\rho^\varpi \,\tilde{\in}\, SP(\tilde{Y})$ için $P_{\mu_n}^{y_n} \to P_\rho^\varpi$ sağlanır. Bundan dolayı, $\lim_{n\to\infty} P_{\mu_n}^{y_n} = \lim_{n\to\infty} \varphi_\psi\,(P_{\lambda_n}^{x_n}) = \lim_{n\to\infty} \delta_\rho(P_{\lambda_n}^{x_n}) = P_\rho^\varpi$ (5.18)

$\varphi_\varphi\left(\tilde{Z}\right)$ ya da $\delta_\rho(\tilde{Z})$ esnek görüntülerinden biri tam olduğundan, $P_u^v \,\tilde{\in}\, SP(\tilde{Z})$ için $\varphi_\varphi\left(\tilde{Z}\right) \subseteq \delta_\rho(\tilde{Z})$, $\delta_\rho(P_u^v) = P_\rho^\varpi$. Koşul (4.14) den, her $\bar{t} \gtrsim \bar{0}$ için,

$$d(\varphi_\psi\,(P_u^v), \varphi_\psi\left(P_{\lambda_n}^{x_n}\right), \bar{t}) \lesssim \frac{\bar{1}}{\bar{k}} d(\delta_\rho(P_u^v), \delta_\rho\left(P_{\mu_n}^{y_n}\right), \bar{t}) \qquad (5.19)$$

Bu, $\bar{t} \gtrsim \bar{0}$ için aşağıdaki eşitsizliği ifade eder.

$$d(\varphi_\psi\,(P_u^v), P_\rho^\varpi, \bar{t}) \lesssim \frac{\bar{1}}{\bar{k}} d(\delta_\rho(P_u^v), P_\rho^\varpi, \bar{t}) \qquad (5.20)$$

Son eşitsizlik bunu $\varphi_\psi\,(P_u^v) = P_\rho^\varpi$ doğrular. Böylece, $\varphi_\psi\,(P_u^v) = \delta_\rho(P_u^v) = P_\rho^\varpi$.

$\varphi_{\varphi,}\delta_\rho$ zayıf uyumlu döüşümleri olduğundan, $\delta_\rho\left(\varphi_\psi\left(P_u^v\right)\right)=\varphi_\psi\left(\delta_\rho(P_u^v)\right)$ yani $\delta_\rho(P_\rho^\varpi)=\varphi_\psi\left(P_\rho^\varpi\right)$. P_ρ^ϖ noktası, δ_ρ ve φ_ψ öz dönüşümlerinin bir esnek noktası olduğunu gösterelim. Koşul (5.14) den,

$$d(\delta_\rho(P_\rho^\varpi),\delta_\rho\left(P_{\lambda_n}^{x_n}\right),\bar{t})\lesssim\bar{k}d(\varphi_\psi\left(P_\rho^\varpi\right),\varphi_\psi\left(P_{\lambda_n}^{x_n}\right),\bar{t})) \tag{5.21}$$

olur. Koşul (5.21) de, $n\to\infty$ limit alınırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$d(\delta_\rho(P_\rho^\varpi),P_\rho^\varpi,\bar{t})\lesssim\bar{k}d(\varphi_\psi\left(P_\rho^\varpi\right),P_\rho^\varpi,\bar{t}) \tag{5.22}$$

Bu da $\delta_\rho\left(P_\rho^\varpi\right)=P_\rho^\varpi$ anlamına gelir. Bundan dolayı, $\delta_\rho\left(P_\rho^\varpi\right)=\varphi_\psi\left(P_\rho^\varpi\right)=P_\rho^\varpi$ olur.

Tekliği. Tersinin olduğunu varsayalım. $P_\rho^\varpi\neq P_\gamma^z$ esnek noktaları, esnek öz dönüşümlerin iki ortak sabit noktası olsun. Böylece, her $\bar{t}\gtrsim\bar{0}$ için
$d(\delta_\rho\left(P_\rho^\varpi\right),\delta_\rho\left(P_\gamma^z\right),\bar{t})\ \lesssim\bar{k}d(\varphi_\psi\left(P_\rho^\varpi\right),\varphi_\psi\left(P_\gamma^z\right),\bar{t})$
bu da $P_\rho^\varpi=P_\gamma^z$ anlamına gelir. Bundan dolayı teklik sağlanmış olur.

Teorem 5.2.7. $\left(\tilde{Y},d\right)$ tam esnek parametrik metrik uzay, $\varphi_{\varphi,}\delta_\rho\colon\left(\tilde{Y},d\right)\to\left(\tilde{Y},d\right)$ örten öz dönüşümler ve $\bar{a}>\bar{1}+2\bar{k}$ ve $\bar{\beta}>\bar{1}+2\bar{k}$ olacak şekilde $\bar{a},\bar{\beta}$ ve $\bar{k}$ esnek reel sayıları olsun. Her $\bar{t}\gtrsim\bar{0}$ ve her $P_\lambda^x\lesssim SP(\tilde{Y})$ için aşağıdaki koşullar sağlansın.

$$d(\varphi_\psi\left(\delta_\rho(P_\lambda^x),\delta_\rho(P_\lambda^x),\bar{t}\right)+\bar{k}d(\varphi_\psi\left(\delta_\rho(P_\lambda^x),P_\lambda^x,\bar{t}\right)\lesssim\bar{a}d(\delta_\rho(P_\lambda^x),P_\lambda^x,\bar{t}) \tag{5.23}$$

ve

$$d(\delta_\rho\left(\varphi_\psi\left(P_\lambda^x\right),\varphi_\psi\left(P_\lambda^x\right),\bar{t}\right)+\bar{k}d(\delta_\rho(\varphi_\psi\left(P_\lambda^x\right),P_\lambda^x,\bar{t})\lesssim\bar{\beta}d(\varphi_\psi\left(P_\lambda^x\right),P_\lambda^x,\bar{t}) \tag{5.24}$$

Bu durumda, teoremdeki esnek öz dönüşümlerden biri sürekli ise, ortak bir sabit esnek noktaya sahiptirler.

İspat. $P_{\lambda_0}^{x_0}\lesssim SP(\tilde{Y})$ bir esnek noktasını seçelim.

φ_ψ öz dönüşümü örten olduğundan, $P_{\lambda_1}^{x_1} \widetilde{\in} SP(\tilde{Y})$ için $P_{\lambda_0}^{x_0} = \varphi_\psi\,(P_{\lambda_1}^{x_1})$ dir.δ_ρ öz dönüşümü örten olduğundan, $P_{\lambda_2}^{x_2} \widetilde{\in} SP(\tilde{Y})$ için $P_{\lambda_2}^{x_2} = \delta_\rho\,(P_{\lambda_1}^{x_1})$ dir. Bu işleme devam ederek, $\left\{P_{\lambda_n}^{x_n}\right\}_{n\in N}$ esnek noktaların dizisini aşağıdaki gibi kuralım.

Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$P_{\lambda_{2n}}^{x_{2n}} = \varphi_\psi\,(P_{\lambda_{2n+1}}^{x_{2n+1}}) \text{ ve } P_{\lambda_{2n+1}}^{x_{2n+1}} = \delta_\rho(P_{\lambda_{2n+2}}^{x_{2n+2}}) \tag{5.25}$$

$$d(\varphi_\psi\left(\delta_\rho\left(P_{\lambda_{2n+2}}^{x_{2n+2}}\right), \delta_\rho\left(P_{\lambda_{2n+2}}^{x_{2n+2}}\right), \bar{t}\right) + \bar{k}d(\varphi_\psi\,(\delta_\rho\left(P_{\lambda_{2n+2}}^{x_{2n+2}}\right), P_{\lambda_{2n+2}}^{x_{2n+2}}, \bar{t}) \widetilde{\geq} \bar{a}d(\delta_\rho\left(P_{\lambda_{2n+2}}^{x_{2n+2}}\right), P_{\lambda_{2n+2}}^{x_{2n+2}}, \bar{t}) \tag{5.26}$$

olur. Böylece,

$$d\left(P_{\lambda_{2n}}^{x_{2n}}, P_{\lambda_{2n+1}}^{x_{2n+1}}, \bar{t}\right) + \bar{k}d(P_{\lambda_{2n}}^{x_{2n}}, P_{\lambda_{2n+2}}^{x_{2n+2}}, \bar{t}) \widetilde{\geq} \bar{a}d(P_{\lambda_{2n+1}}^{x_{2n+1}}, P_{\lambda_{2n+2}}^{x_{2n+2}}, \bar{t}) \tag{5.27}$$

dir.

$$d\left(P_{\lambda_{2n}}^{x_{2n}}, P_{\lambda_{2n+2}}^{x_{2n+2}}, \bar{t}\right) \widetilde{\leq} d\left(P_{\lambda_{2n}}^{x_{2n}}, P_{\lambda_{2n+1}}^{x_{2n+1}}, \bar{t}\right) + d(P_{\lambda_{2n+1}}^{x_{2n+1}}, P_{\lambda_{2n+2}}^{x_{2n+2}}, \bar{t})$$

olduğundan, Koşul (5.27) den

$$d(P_{\lambda_{2n+1}}^{x_{2n+1}}, P_{\lambda_{2n+2}}^{x_{2n+2}}, \bar{t}) \widetilde{\leq} \frac{\bar{1}+\bar{k}}{\bar{a}-\bar{k}} d(P_{\lambda_{2n}}^{x_{2n}}, P_{\lambda_{2n+2}}^{x_{2n+2}}, \bar{t}) \tag{5.28}$$

Diğer yandan,

$$d\left(\delta_\rho\left(\varphi_\psi\,(P_{\lambda_{2n+1}}^{x_{2n+1}}\right), \varphi_\psi\left(P_{\lambda_{2n+1}}^{x_{2n+1}}\right), \bar{t}\right) + \bar{k}d(\delta_\rho(\varphi_\psi\left(P_{\lambda_{2n+1}}^{x_{2n+1}}\right), P_{\lambda_{2n+1}}^{x_{2n+1}}, \bar{t}) \widetilde{\geq} \bar{\beta}d(\varphi_\psi\left(P_{\lambda_{2n+1}}^{x_{2n+1}}\right), P_{\lambda_{2n+1}}^{x_{2n+1}}, \bar{t}) \tag{5.29}$$

olur. Böylece

$$d(P_{\lambda_{2n-1}}^{x_{2n-1}}, P_{\lambda_{2n}}^{x_{2n}}, \bar{t}) + \bar{k}d\left(P_{\lambda_{2n-1}}^{x_{2n-1}}, P_{\lambda_{2n+1}}^{x_{2n+1}}, \bar{t}\right) \widetilde{\geq} \bar{\beta}d\left(P_{\lambda_{2n}}^{x_{2n}}, P_{\lambda_{2n+1}}^{x_{2n+1}}, \bar{t}\right) \tag{5.30}$$

$$d\left(P_{\lambda_{2n-1}}^{x_{2n-1}}, P_{\lambda_{2n+1}}^{x_{2n+1}}, \bar{t}\right) \widetilde{\leq} d\left(P_{\lambda_{2n-1}}^{x_{2n-1}}, P_{\lambda_{2n}}^{x_{2n}}, \bar{t}\right) + d(P_{\lambda_{2n}}^{x_{2n}}, P_{\lambda_{2n+1}}^{x_{2n+1}}, \bar{t})$$

olduğundan, Koşul (5.30) dan,

$$d(P_{\lambda_{2n}}^{x_{2n}}, P_{\lambda_{2n+1}}^{x_{2n+1}}, \bar{t}) \widetilde{\leq} \frac{\bar{1}+\bar{k}}{\bar{\beta}-\bar{k}} d(P_{\lambda_{2n-1}}^{x_{2n-1}}, P_{\lambda_{2n}}^{x_{2n}}, \bar{t}) \tag{5.31}$$

olur. $\bar{\ell} = max\left\{\frac{\bar{1}+\bar{k}}{\bar{\beta}-\bar{k}}, \frac{\bar{1}+\bar{k}}{\bar{a}-\bar{k}}\right\}$ olsun. Bu durumda Koşul (5.28) ve Koşul (5.31) den, her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve her $\bar{t} \succsim \bar{0}$ için

$$d(P_{\lambda_n}^{x_n}, P_{\lambda_{n+1}}^{x_{n+1}}, \bar{t}) \lesssim \bar{\ell} d(P_{\lambda_{n-1}}^{x_{n-1}}, P_{\lambda_n}^{x_n}, \bar{t}) \tag{5.32}$$

olur. Koşul (5.31) in n-kez tekrarlanması ile

$$d(P_{\lambda_n}^{x_n}, P_{\lambda_{n+1}}^{x_{n+1}}, \bar{t}) \lesssim \bar{\ell}^n d(P_{\lambda_0}^{x_0}, P_{\lambda_1}^{x_1}, \bar{t}) \tag{5.33}$$

elde edilir.

Önerme 5.2.1. den $\left\{P_{\lambda_n}^{x_n}\right\}_{n\in N}$ dizisi Cauchy özelliğini sağlar. Bu durumda hipotezden, dizi $P_{\lambda_n}^{x_n} \to P_\rho^\varpi$ olacak şekilde bir esnek noktaya yakınsar. Böylece, $P_{\lambda_{2n+1}}^{x_{2n+1}} \to P_\rho^\varpi$ ve $P_{\lambda_{2n+2}}^{x_{2n+2}} \to P_\rho^\varpi$ dir. Eğer φ_ψ öz dönüşümü sürekli ise, bu durumda $\varphi_\psi\,(P_{\lambda_{2n+1}}^{x_{2n+1}}) \to \varphi_\psi\,(P_\rho^\varpi)$ dir. Ama $\varphi_\psi\left(P_{\lambda_{2n+1}}^{x_{2n+1}}\right) = P_{\lambda_{2n}}^{x_{2n}} \to P_\rho^\varpi$. Sonuç olarak, $\varphi_\psi\,(P_\rho^\varpi) = P_\rho^\varpi$. δ_ρ öz dönüşümünün örtenliğinden, $P_\sigma^\vartheta \Subset \tilde{Y}$ esnek noktası için $\delta_\rho(P_\sigma^\vartheta) = P_\rho^\varpi$ olur.

$d\left(\varphi_\psi\left(\delta_\rho\left(P_\sigma^\vartheta\right), \delta_\rho P_\sigma^\vartheta\right), \bar{t}\right) + \bar{k}d(\varphi_\psi\,(\delta_\rho\left(P_\sigma^\vartheta\right), P_\sigma^\vartheta, \bar{t}) \lesssim \bar{a}d(\delta_\rho\left(P_\sigma^\vartheta\right), P_\sigma^\vartheta, \bar{t})$ dır. Bu da

$\bar{k}d(P_\rho^\varpi, P_\sigma^\vartheta, \bar{t}) \lesssim \bar{a}d(P_\rho^\varpi, P_\sigma^\vartheta, \bar{t})$ anlamına gelir. Böylece $d(P_\rho^\varpi, P_\sigma^\vartheta, \bar{t}) \lesssim \frac{\bar{k}}{\bar{a}} d(P_\rho^\varpi, P_\sigma^\vartheta, \bar{t})$ elde edilir. $\bar{a} \succsim \bar{k}$ olduğundan, $d\left(P_\rho^\varpi, P_\sigma^\vartheta, \bar{t}\right) = \bar{0}$. Böylece $P_\rho^\varpi = P_\sigma^\vartheta$ olur. Bundan dolayı $\varphi_\psi\,(P_\rho^\varpi) = \delta_\rho\left(P_\rho^\varpi\right) = P_\rho^\varpi$. Böylece ispat tamamlanmış olur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma sonucunda, parametrik metrik türleri ve esnek metrik kavramlarını birleştirerek esnek parametrik metrik uzay kavramı ve bu uzayda sabit nokta kavramı açıklandı. Diğer metrik türleri üzerinde de esnek metrik uzay kavramı araştırılabilir. Ayrıca, sabit nokta dışında ortak ve çakışık nokta kavramlarının da üzerinde durulabilir.

KAYNAKLAR

Bhardwaj, R., Kumar, H. G. S., Singh B. K., Kabir Q. A., Konak P.,(2020). Fixed Point Theorems in Soft Parametric Metric Space, *Advances in Mathematics*: *Scientific Journal 9*(12*)*.

Çetkin, V. (2019). Parametric 2-Metric Spaces and Some Fixed Point Results, *New Trends in Mathematical Sciences 7*(4***)*** .

Das, S., Samanta S. K., Soft Metric, (2013) . *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics 6*.

Das, S., Samanta ,S. K., (2012). Soft Real Sets, Soft Real Numbers and Their Properties, *Journal of Fuzzy Mathematics 20(3)* ,551–576.

Franklin S.P., (1965). Spaces in which sequences suffice, *Fundam. Math. 57* ,107–115.

Hosseinzadeh , H., (2017). Fixed Point Theorems on Soft Metric Spaces, *Journal of Fixed Point Theory and Applications 19*(2) .

Hussain, N., Khaleghizadeh, S., Salimi, P., Abdou, A. A. N., (2014) . A New Approach to Fixed Point Results in Triangular intuitionistic Fuzzy Metric Spaces, *Abstract and Applied Analysis Article* ID 690138.

Jain, R., Daheirai, R. D., Ughade M., (2016) . Fixed Point, Coincidence Point and Common Fixed Point Theorems under Various Expansive Conditions in Parametric Metric Spaces and Parametric b-Metric Spaces, *Gazi University Journal of Science 29*(1).

Karaca İ., (2017) . Fixed Point Theorems and an Application in Parametric Metric Spaces, *Azerbaijan Journal of Mathematics 7*.

Kharal, A., Ahmad B., (2011). Mappings on Soft Classes, *New Mathematics and Natural Computation 7*(3), 471–481.

Maji ,P. K., Biswas, R., Roy ,A. R., (2013) . Soft Set Theory, *Computers and Mathematics with Applications 45* ,555–562.

Molodtsov, D., Soft Set Theory-First Results, *Computers and Mathematics with Applications 37* (1999) 19–31.

Rao, K. P. R., Babu, D. V., Ramudu , E. T., (2014) . Some Unique Common Fixed Point Theorems in Parametric S-Metric Spaces, *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology 3*.

Taş, N., Özgür, N. Y.,(2016). On Parametric S-Metric Spaces and Fixed-Point Type Theorems for Expansive Mappings, *Journal of Mathematics Article* ID 4746732 .

Taş, N., Özgür, N. Y., Çelik U., (2017) .New Fixed-Circle Results on S-metric Spaces, *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications 9*(2) ,10–23.

Taş, N., Özgür, N. Y., (2018) .Some Fixed-Point Results on Parametric Nb-metric Spaces, *Communications of Korean Mathematical Society 33*(3),943–960.

Taş, N., Özgür, N. Y., (2019). Some Fixed-Circle Theorems on Metric Spaces, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society 42*, 1433–1449.

Tunçay, Y., Çetkin V., (2021). Parametric Soft Metric Spaces, in: U. Mutman, C. Özkale (Eds.), *IV. The International Symposium on Engineering, Natural Sciences and Architecture*, Kocaeli, Turkey.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

Y. Tunçay, V. Çetkin, (2021). Parametric Soft Metric Spaces, in: U. Mutman, C. Özkale (Eds.), *IV. The International Symposium on Engineering, Natural Sciences and Architecture*, Kocaeli, Turkey.

Y.Tunçay, V. Çetkin, (2022). Fixed Soft Points on Parametric Soft Metric Spaces, *Journal of New Theory*, 42-51,

Y. Tunçay, V. Çetkin**,** Coincidence and common fixed soft point theorems in parametric soft metric spaces, *5th International Conference on Mathematics*, 1-3 December 2021, İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

İlk ögreniminin bir kısmını İzmit'e bir kısmını Karamürsel'de tamamladı. Orta ve lise öğrenimini Karamürsel'de tamamladı. 2015 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden Matematikçi olarak mezun oldu. Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansını tamamladı.