

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATAMETİK
ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KÜÇÜK GECİKME İÇEREN LİNEER KESİRLİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

KÜBRA KARAPINAR

KOCAELİ 2019

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

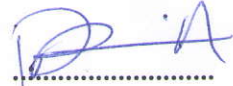
MATEMATİK
ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KÜÇÜK GECİKME İÇEREN LİNEER KESİRLİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

KÜBRA KARAPINAR

Doç. Dr. Ali DEMİR
Danışman, Kocaeli Üniv.
Prof. Dr. Serdal PAMUK
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.
Dr. Öğr. Üyesi Sertaç ERMAN
Jüri Üyesi, Medipol Üniv.





Tezin Savunulduğu Tarih: 28.01.2019

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Kesirli analiz, son yıllarda üzerinde çok fazla çalışma yapılan konulardan biri olmuştur.

Beni bu konuya yönlendiren ve bu tez ile ilgili tüm çalışmalarımın yürütülmesi sürecinde bilgi ve tecrübeleriyle her konuda bana yardımcı olan danışman hocam sayın Doç. Dr. Ali Demir'e göstermiş olduğu sabır, ilgi, destek ve önerilerinden dolayı teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Aynı zamanda yardımlarını benden esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi Sertaç Erman, Araş. Gör. Süleyman Çetinkaya ve Araş. Gör. Elif Güner'e teşekkür ederim.

Yine, üzerimde çok fazla emekleri olan, eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi olarak bana destek olan aileme teşekkür ederim.

Aralık-2018

Kübra KARAPINAR

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
GİRİŞ	1
1. STANDART ANALİZ.....	2
1.1. Temel Kesirli Analiz	2
1.1.1. Gamma fonksiyonu	3
1.1.2. Beta fonksiyonu.....	4
1.1.3. Mittag-Leffler fonksiyonu.....	4
1.1.4. Wright fonksiyonu.....	5
1.2. Kesirli Dereceden İntegral ve Türev(Diferintegral)	5
1.2.1. Riemann-Liouville kesirli integrali	5
1.2.2. Riemann-Liouville kesirli türevi	6
1.2.3. Caputo kesirli türevi	6
1.2.4. Genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli türevi.....	6
1.2.5. Genelleştirilmiş Caputo kesirli türevi	6
1.3. Diferintegrallerin Temel Özellikleri.....	7
1.3.1. Lineerlik özelliği	7
1.3.2. Bileşke özelliği	7
1.3.3. Homojenlik özelliği.....	7
1.4. Kesirli Diferansiyel Denklem.....	7
2. PERTÜRBASYON TEORİSİ.....	9
2.1. “Büyük O” ve “Küçük o” Kavramı	9
2.2. Büyük O Gösterimi ile İşlemler	12
2.3. Sık Karşılaşılan Fonksiyonlar	13
2.4. Pertürbasyon Teorisinin Temel Teoremi.....	13
2.5. Regüler Pertürbasyon Teorisi	13
2.6. Singüler Pertürbasyon Teorisi	17
3. KÜÇÜK GECİKME İÇEREN LİNEER KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ	20
3.1. Örnekler.....	25
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	44
KAYNAKLAR	45
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER	1
ÖZGEÇMİŞ	2

ŞEKİLLER DİZİNİ

- Şekil 2.1. Kalın çizgi denklemin $x_+(\epsilon)$ olan çözümünü temsil ediyor, noktalı çizgi serinin $O(\epsilon^2)$ 'de kesilmesiyle elde edilen çözümü temsil ediyor, kesikli çizgi serinin $O(\epsilon^3)$ 'de kesilmesiyle elde edilen çözümü temsil ediyor..... 15



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

B	:Beta fonksiyonu
$\mathbb{C}$	:Kompleks sayılar kümesi
$C[0,\infty)$	: $[0,\infty)$ 'dan $\mathbb{R}$ 'ye sürekli fonksiyonların kümesi
D^α	:Riemann Liouville kesirli türevi
D_*^α	:Caputo kesirli türevi
D_h^α	:Riemann Liouville diferintegrali
${}^CD_h^\alpha$	:Caputo kesirli diferintegrali
E_α	:Tek parametrelili Mittag Leffler fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}$	:İki parametrelili Mittag Leffler fonksiyonu
Γ	:Gamma fonksiyonu
J^α	:Riemann Liouville kesirli integrali
$\mathbb{N}$	:Doğal sayılar kümesi
$O(\cdot)$	:Büyük O(Pertürbasyon terimi)
$o(\cdot)$	:Küçük o(Pertürbasyon terimi)
$\mathbb{R}$	:Reel sayılar kümesi
W	:Wright fonksiyonu
$\mathbb{Z}$	:Tam sayılar kümesi

KÜÇÜK GECİKME İÇEREN LİNEER KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde konuyla ilgili temel tanımlar ve fonksiyonlar verildi. İkinci bölümde pertürbasyon teorisi için temel tanımlar ve örnekler verildi. Üçüncü bölümde ise küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri elde edildi.

Kesirli diferansiyel denklemleri içeren matematiksel modeller, tam sayı mertebeli türevleri içeren matematiksel modellere göre daha yaklaşık ve gerçekçi analiz yapmamıza imkan sağlar. Aynı zamanda küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denklemleri içeren modeller, süreçlerin geçmişinin şimdiki davranışı üzerinde olan etkisini de yansıttığı için, süreci daha iyi modeller. Bu nedenle matematik, fizik ve mühendislik gibi birçok alanda uygulaması olması bu tezde küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denklemlerin analizini yapmaya teşvik etmiştir.

Bu çalışmamızın sonucunda küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denklemler için analitik veya yaklaşık çözümler elde ettik.

Anahtar Kelimeler: Kesirli Analiz, Küçük Gecikme İçeren Diferansiyel Denklem, Pertürbasyon Teorisi.

LINEAR FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SMALL DELAY

ABSTRACT

This thesis consists of three parts.

In the first chapter, basic definitions and functions are given. In the second chapter, basic definitions and examples are given for perturbation theory. In the third chapter, solutions of linear fractional differential equations with small delay are obtained.

Mathematical models containing fractional differential equations allow us to perform more approximate and realistic analysis than mathematical models that include integer-order derivatives. At the same time the models including linear fractional differential equations with small delay are better since they reflect the impact of past on the current behavior. Therefore, its application in many fields such as mathematics, physics and engineering encourage us to analyze the behavior of linear fractional differential equations with small delay in this thesis.

As a result of this study, we obtain analytical or approximate solutions for linear fractional differential equations with small delay.

Keywords: Fractional Analysis, Differential Equation with Small Delay, Perturbation Theory.

GİRİŞ

Birinci bölümde öncelikle tezin sonraki bölümlerinde kullanılmak üzere kesirli analizin ne olduğu açıklanacak sonrasında ise kesirli türev ve integral tanımları ve bunlarla alakalı olarak bazı özel fonksiyonların tanımları verilecektir. Böylece tez için bir ön bilgi sağlanacaktır.

Bilindiği gibi türev, mühendislik, biyoloji, fizyoloji, enerji ve ekonomi gibi diğer birçok alanda kullanılan matematiksel analizin en önemli konularından biridir. Eğer fiziksel sistemlerde bir değişim söz konusu ise bu değişimi ifade edebilmek için türev kavramına ihtiyaç vardır. Türevi birçok şekilde tanımlamak mümkündür. Türevi temel düzeyde tanımlayacak olursak, bir fonksiyonun bir noktadaki anlık değişim miktarı olarak ya da bir fonksiyonun üzerindeki bir noktadan çizilen teğet doğrusunun eğimi olarak tanımlarız.

Son yıllarda, yaklaşık 300 yıllık bir geçmişi olan klasik türevin(tam sayı mertebeden türevin) yanı sıra fiziksel sistemleri daha iyi ifade eden kesirli mertebeli türev kavramı ortaya atılmış ve bu kavram üzerine çok fazla sayıda çalışma yapılmıştır.

Bu çalışmada ise pertürbasyon teorisinden de yararlanılarak lineer kesirli diferansiyel denklemlere uygulanan çok küçük bir değişimin sonuçları sunulacaktır.

1. STANDART ANALİZ

Konu olarak türev ve integrali esas alan standart analiz, tüm zamanların en iyi üç matematikçisinden biri olan Isaac Newton (1642-1677) ve Newton'dan bağımsız olarak Alman matematikçi Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) tarafından geliştirilmiştir. Newton, nümerik analizde, bir fonksiyonun en büyük ve en küçük değerini bulmamızı sağlayan, fonksiyonun köklerine yaklaşmak için en iyi yöntem olan Newton-Raphson yöntemini geliştirmiştir. Leibniz ise diferansiyel kalkülüste, Leibniz kuralı olarak literatüre geçen, çarpım kuralını geliştirmiştir. Newton ve Leibniz dışında standart analizin gelişiminde Gauss, Cauchy ve Riemann gibi matematikçiler de önemli rol oynamıştır. Analizin bir çok dalı bulunmaktadır. Bunlardan bazıları; reel analiz, kompleks analiz, nümerik analiz, fonksiyonel analiz ve kesirli analizdir. Biz burada kesirli analiz üzerinde duracağız(Barcellos ve Stein, 1997; Karcı, 2015).

1.1. Temel Kesirli Analiz

Adından da anlaşılacağı gibi türev ve integralin tam sayı olmayan mertebelere genişletilmiş formu olan ve klasik analiz kadar eski olan kesirli analiz, matematiksel analizin bir koludur.

Başlangıcı 1695 yılına kadar uzanan kesirli analiz çalışmalarının temeli, Leibniz ve L'Hopital arasındaki yazışmalarda L'Hopital'in, Leibniz'in o dönem ki yayınlarında geçen lineer fonksiyonların $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere n . mertebeden türevlerinin gösterimi için kullandığı $\frac{d^n y}{dx^n}$ notasyonunda n 'in tamsayı olmadığı durumda sonucun ne olacağını sormasıyla atılmıştır.

Yani kesirli türev temel olarak, tam sayı mertebeden türevin reel mertebeden türeve genelleştirilmiş formudur. Ancak bir fonksiyonun bir noktadaki kesirli türevinin değeri fonksiyonun tanımlı olduğu bölgeye göre değişirken, tam sayı mertebeli türevlerin değeri türev alınan noktanın komşuluğunda tanımlanır. Bu açıdan reel mertebeden türevler, tam sayı mertebeden türevlerden ayrılır. Tam sayı mertebeli

türevlere göre kesirli türevleri fiziksel olarak yorumlamak da daha zordur çünkü farklı kesirli türevler farklı fiziksel yorumlara sahiptir.

Kesirli analiz üzerine Leibniz dışında Riemann, Euler, Liouville, Laplace, Fourier gibi birçok ünlü matematikçilerin de çalışmaları olmuştur. Fiziksel süreç ve sistemlerin kesirli diferansiyel denklem içeren matematiksel modellerinin elde edilmesinde bu süreç ve sistemlerin sahip olduğu özelliklere göre Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov gibi farklı kesirli türevler kullanılır çünkü her bir kesirli türev, diğerlerine göre farklı özelliklere ve avantajlara sahiptir(Kisela, 2008).

Tam sayı mertebeli türev yerel modellemeyi, kesirli mertebeli türev ise global modellemeyi sağladığından kesirli türev içeren diferansiyel denklemler kullanılarak değişik çalışmalar yapılmıştır(Demir ve diğ., 2013; Demir ve Özbilge, 2014; Demir ve diğ., 2015; Bayrak ve Demir, 2018; Huang ve Liu, 2005; Kilbas ve diğ., 2006; Podlubny, 1999; Atangana ve Baleanu, 2016; Atangana ve Koca, 2017).

Matematiksel modelleri daha iyi ifade eden kesirli türev tanımlarından en yaygın olanları Riemann-Liouville ve Caputo tanımlarıdır. Bu tanımları vermeden önce kesirli analizde yaygın olarak kullanılan fonksiyonları tanımlayacağız.

1.1.1. Gamma fonksiyonu

İlk kez 1729 yılında, İsviçreli matematikçi ve fizikçi olan Leonhard Euler tarafından kullanılan Gamma fonksiyonu, matematikte faktöriyel fonksiyonunun, karmaşık sayılar ve tamsayı olmayan reel sayılara genelleştirilmesi ile elde edilmiş bir fonksiyondur.

Gamma fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$\Gamma(k)=\int_0^{\infty} h^{k-1} e^{-h} dh, \quad k \in \mathbb{C} \quad (1.1)$$

Eğer $k \in \mathbb{N}$ ise Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(k)=(k-1)! \quad (1.2)$$

şeklinde tanımlanır(Iddrisu ve Tetteh, 2017).

Euler tarafından 1730 yılında, $m, n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $y(x) = x^m$ fonksiyonunun n . mertebeden,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, & m \geq n \\ 0, & m < n \end{cases} \quad (1.3)$$

şeklinde tanımlanan tam sayı mertebeden türev formülünün reel sayılara genişletilmiş hali Gamma fonksiyonu kullanılarak kesirli mertebeden türev formülü olarak aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 1.1.1.1. $k, h \in \mathbb{R}$ ve $k, h \geq 0$ için $y(x) = x^h$ fonksiyonunun k . mertebeden türevi,

$$\frac{d^k y}{dx^k} = \frac{\Gamma(h+1)}{\Gamma(h-k+1)} x^{h-k} \quad (1.4)$$

şeklinde tanımlanır (Karcı, 2015).

1.1.2. Beta fonksiyonu

$\text{Re}(h) > 0$, $\text{Re}(k) > 0$ için,

$$B(h, k) = \int_0^1 \alpha^{h-1} (1-\alpha)^{k-1} d\alpha \quad (1.5)$$

şeklinde tanımlanan Beta fonksiyonu iki değişkenli bir fonksiyon olup Gamma fonksiyonu cinsinden,

$$B(h, k) = \frac{\Gamma(h)\Gamma(k)}{\Gamma(h+k)} \quad (1.6)$$

olarak tanımlanır (Vance, 2014).

1.1.3. Mittag-Leffler fonksiyonu

1903 yılında İsveç matematikçi Gösta Mittag-Leffler tarafından ortaya konulan Mittag-Leffler fonksiyonu üstel fonksiyonun bir genellemesidir. Eğer Mittag-Leffler fonksiyonu tek parametreye bağlı ise,

$$E_\alpha(n) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{n^t}{\Gamma(1+\alpha t)}, \quad n, \alpha \in \mathbb{C}, \text{Re}(\alpha) > 0 \quad (1.7)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer Mittag-Leffler fonksiyonu iki parametrelidir ise,

$$E_{\alpha,\beta}(n) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{n^t}{\Gamma(\beta + \alpha t)}, \quad n, \beta, \alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0 \quad (1.8)$$

şeklinde ifade edilir. İki parametrelidir Mittag-Leffler fonksiyonunun integral gösterimi ise,

$$E_{\alpha,\beta}(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{t^{\alpha-\beta} e^{nt}}{t^{\alpha-n}} dt, \quad n, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0 \quad (1.9)$$

şeklinde tanımlanır (Kisela, 2008).

1.1.4. Wright fonksiyonu

İngiliz matematikçi Edward Maitland Wright tarafından tanımlanmış olan ve lineer kısmi kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde önemli rol oynayan Wright fonksiyonu,

$$W(\alpha, \beta; n) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{n^t}{t! \Gamma(\beta + \alpha t)}, \quad n, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R} \quad (1.10)$$

olarak ifade edilir (Kilbas ve diğ., 2002).

1.2. Kesirli Dereceden İntegral ve Türev (Diferintegral)

Tanım 1.2.1. $x > 0$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir $f(x)$ fonksiyonu C_α uzayında ve $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için C_α^n uzayındadır denir;

$$\exists p(>\alpha) \in \mathbb{R}: f(x) = x^p f_1(x), f_1(x) \in C[0, \infty) \Leftrightarrow f^{(m)}(x) \in C_\alpha. \quad (1.11)$$

1.2.1. Riemann-Liouville kesirli integrali

$\alpha \geq -1$ için $f(t) \in C_\alpha$ fonksiyonunun α mertebeli Riemann-Liouville kesirli integrali,

$$J_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u) du, & \alpha > 0, t > 0 \\ f(t), & \alpha = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

olarak tanımlanır.

1.2.2. Riemann-Liouville kesirli türevi

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $f(t) \in C_{-1}^n$ fonksiyonunun α mertebeli Riemann-Liouville kesirli türevi,

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} J^{n-\alpha} f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-u)^{n-\alpha-1} f(u) du, & n-1 < \alpha < n \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n \end{cases} \quad (1.13)$$

olarak verilir.

1.2.3. Caputo kesirli türevi

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $f(t) \in C_{-1}^n$ fonksiyonunun α mertebeli Caputo kesirli türevi,

$$D_*^\alpha f(t) = J^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-u)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(u) du, & n-1 < \alpha < n \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n \end{cases} \quad (1.14)$$

olarak verilir (Sayevand K., 2016; Gash ve diğ., 2015).

1.2.4. Genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli türevi

$h, k, \alpha \in \mathbb{R} (h < k)$, $n = \max(0, [\alpha] + 1)$, $f(t)$ fonksiyonu (h, k) aralığında integrallenebilir, $n > 0$ için $f(t)$ fonksiyonu (h, k) aralığında hemen hemen her yerde n kez diferansiyellenebilir olsun. Buna göre $t \in (h, k)$ için Riemann-Liouville diferintegrالی,

$$D_h^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_h^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (1.15)$$

olarak tanımlanır.

1.2.5. Genelleştirilmiş Caputo kesirli türevi

$h, k, \alpha \in \mathbb{R} (h < k)$, $n = \max(0, [-\alpha])$ ve $n=0$ durumunda $f(t)$ fonksiyonu (h, k) aralığında integrallenebilir, $n > 0$ durumunda $f(t)$ fonksiyonu (h, k) aralığında hemen hemen her yerde n kez diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda $t \in (h, k)$ için Caputo diferintegrالی,

$${}^C D_h^\alpha f(k) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_h^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (1.16)$$

şeklinde tanımlanır(Kisela, 2008).

1.3. Diferintegrallerin Temel Özellikleri

1.3.1. Lineerlik özelliği

$x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ keyfi sabitler, $a \in \mathbb{C}$ için $k(a)$ ve $h(a)$ keyfi fonksiyonlar ve D diferintegral operatörü olmak üzere diferintegrallerin lineerliği,

$$D_\beta^\alpha (xk(a) + yh(a)) = xD_\beta^\alpha k(a) + yD_\beta^\alpha h(a) \quad (1.17)$$

şeklinde gösterilir.

1.3.2. Bileşke özelliği

$\alpha \in \mathbb{R}$, $h, k > 0$ ve $f(t)$ integrallenebilir bir fonksiyon olsun. D diferintegral operatörü olmak üzere diferintegrallerin bileşke özelliği,

$$D_\alpha^{-h} \left(D_\alpha^{-k} f(t) \right) = D_\alpha^{-(h+k)} f(t) \quad (1.18)$$

şeklinde verilir.

1.3.3. Homojenlik özelliği

H herhangi bir sabit olmak üzere diferintegrallerin homojenlik özelliği,

$$D_t^\alpha [Hf(t)] = H[D_t^\alpha f(t)] \quad (1.19)$$

şeklinde verilir(Kisela, 2008).

1.4. Kesirli Diferansiyel Denklemler

Bir ya da daha fazla değişkenin kesirli türevlerini içeren denklemler kesirli diferansiyel denklem olarak adlandırılır(Bayın, 2004).

Eğer kesirli diferansiyel denklem,

$$h_k(t)D^{h_k}u(t)+h_{k-1}(t)D^{h_{k-1}}u(t)+\dots+h_0(t)u(t)=f(t) \quad (1.20)$$

şeklinde veriliyorsa lineer kesirli diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Burada; D^{h_i} , $i=1,2,\dots,n$ kesirli diferansiyel denklem operatörü lineerdir.

Eğer lineer kesirli diferansiyel denklem gecikme terimi içeriyorsa bu denkleme gecikmeli lineer kesirli diferansiyel denklem denir.

Gecikme terimi içeren lineer kesirli diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek her zaman mümkün değildir. Bu nedenle gecikme terimi içeren lineer kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin analizinde önemli bir rol oynayan yaklaşık çözüm yöntemleri geliştirilmiştir.

2. PERTÜRBASYON TEORİSİ

Genelde matematik problemlerinin tam çözümü yoktur ya da tam çözümü olsa bile bu çözüm problemdeki parametrelere kompleks bir şekilde bağımlılık gösterir. Eğer problemin parametresine ε dersek ve çözüm $\varepsilon=0$ için basit bir formda yazılabiliyorsa ε 'un sıfırdan farklı fakat çok küçük değerleri için pertürbasyon teorisi kullanılır.

İlk olarak Laplace, Poisson ve Gauss tarafından araştırılan ve ilk olarak büyük gök cisimlerinin, küçük nesnelerin hareketine etkisini inceleyen gök mekaniğinde kullanılıp daha sonra birçok dönemde, birçok farklı alanda kullanılan Pertürbasyon Teorisi, bir sisteme uygulanan “çok küçük” bir değişikliğin ortaya çıkaracağı sonuçlarla ilgili olan bir tür yaklaşık hesap metodudur. Yani bu metod ile kesin çözüme yakın çözümler elde etmek amaçlanır.

Pertürbasyon Teorisi, gök mekaniği problemleri dışında; Schrödinger Denklemi, Atom Fiziği, Parçacık Fiziği, Osilasyonlar Teorisi, periyodik çözümlerin iyileştirilmesi, quasi-periyodik çözümlerin elde edilmesi ve Genel Diferansiyel Denklemler Teorisi gibi alanlarda kullanılır(Demirtaş, 2014).

2.1. “Büyük O” ve “Küçük o” Kavramı

Fonksiyonların asimptotik davranışlarını(bir eğrinin bir doğruya sonsuzda teğet olması davranışı) ifade etmek için kullanılan “büyük O” gösterimi Alman sayılar kuramcısı Edmund Landau tarafından icat edilmiş bir semboldür. Bu sebeple Landau sembolü olarak da kullanılır. Bilgisayar Bilimi ve Matematik olmak üzere iki temel uygulama alanı vardır. Bilgisayar Bilimi’nde algoritmanın bilgi işlem karmaşıklığının çözümlenmesi için kullanılırken; Matematik’de genellikle sonsuz serilerin belli bir teriminden sonraki kalan terimlerini karakterize etmek için kullanılır. Yani “büyük O” gösterimi temel olarak bir fonksiyonun ne kadar hızlı büyüdüğünü ya da ne kadar hızlı küçüldüğünü anlatır.

Örneğin, $H(k)=5k^4+7k+1$ probleminde k^4 o kadar hızlı büyür ki diğer terimlerin büyüme hızı k^4 ’e göre ihmal edilebilecek kadar düşük olacaktır. Bu

durum büyük O gösterimi kullanılarak şu şekilde ifade edilir; $H(k) \in O(k^4)$ (Mann ve Simmonds, 1998).

Büyük O kavramı için matematiksel tanım aşağıdaki şekilde verilir.

Tanım 2.1.1. $f(x)$ ve $g(x)$ reel sayılar kümesinin bir alt kümesinde tanımlı iki fonksiyon olsun. Eğer, $x > H$ için $|f(x)| \leq K|g(x)|$ olmak üzere $H, K > 0$ sabitleri varsa $x \rightarrow \infty$ iken $f(x) = O(g(x))$ denir.

Buradaki $f(x) = O(g(x))$ gösterimi f fonksiyonu $O(g)$ fonksiyonuna eşittir demek değildir.

Benzer şekilde x bir a sayısı civarında iken, $f(x)$ ve $g(x)$ reel sayılar kümesinin bir alt kümesinde tanımlı iki fonksiyon olsun. Eğer, $|x-a| < H$ için $|f(x)| \leq K|g(x)|$ olacak şekilde $H, K > 0$ sabitleri varsa $x \rightarrow a$ iken $f(x) = O(g(x))$ denir (Mann ve Simmonds, 1998).

Örnek 2.1.1. $f(x) = x^6 + 4x^3 + 5x^2 + 3$ ve $g(x) = x^6$ polinom fonksiyonlarını ele alalım.

$f(x)$ fonksiyonunun derecesinin $O(g(x))$ veya $O(x^6)$ olduğunu söyleyebiliriz. Tanım 2.1.1'i göz önüne alırsak K bir sabit ve $x > 1$ olmak üzere $|f(x)| \leq K|g(x)|$ olduğunu gösterelim.

$$\text{Çözüm. } |x^6 + 4x^3 + 5x^2 + 3| \leq |x^6| + 4|x^3| + 5|x^2| + 3, \quad x > 1 \quad (2.1)$$

Üçgen eşitsizliğinden yararlanılarak elde edilen Eşitsizlik (2.1)'i,

$$|x^6 + 4x^3 + 5x^2 + 3| \leq |x^6| + 4|x^3| + 5|x^2| + 3|x^6| \quad (2.2)$$

şeklinde düzenleyip Eşitsizlik (2.2)'nin sağ tarafındaki ifadeyi ortak terim parantezine alırsak,

$$|x^6 + 4x^3 + 5x^2 + 3| \leq (1 + 4 + 5 + 3)|x^6| \quad (2.3)$$

şeklinde olur. Eşitsizlik (2.3)'ü düzenlediğimizde ise,

$$|x^6 + 4x^3 + 5x^2 + 3| \leq 13|x^6| \quad (2.4)$$

şeklinde elde edilir.

Uyarı 2.1.1. Eğer bir f fonksiyonu diğer fonksiyonların sonlu toplamı şeklinde yazılabiliyorsa fonksiyonun derecesini sonlu toplamdaki en hızlı büyüyen fonksiyon belirler.

Örnek 2.1.2. $f(k)=12k+k^9+19+2 \log k+3k^2 \in O(k^9)$

Tanım 2.1.2. $f(x)$ ve $g(x)$ reel sayılar kümesinin bir alt kümesinde tanımlı iki fonksiyon olsun. Eğer, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}=0$ oluyorsa $x \rightarrow \infty$ iken $f(x)=o(g(x))$ denir(Mann ve Simmonds, 1998).

Örnek 2.1.3. $f(x)=x^3-x^4$, $g(x)=x$ olsun.

$x^3-x^4=o(x)$ olduğunu gösterelim.

Tanım 2.1.2 göz önüne alındığında,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-x^4}{x} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2-4x^3}{1} = \frac{0}{1} = 0 \quad (2.5)$$

olduğundan $x^3-x^4=o(x)$ dir.

“o” notasyonu ile $f'(x)$ 'in tanımı,

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+o(h), \quad h \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

şeklindedir.

$f(x+h)$ için Taylor serisi ise,

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dots+\frac{f^{(n)}(x)h^n}{n!}+o(h^n) \quad (2.7)$$

şeklindedir.

Eğer Taylor serisi bir kuvvet serisine yakınsak ise o zaman $o(h^n)$, $O(h^{n+1})$ olarak yazılabilir(Murray, 1984; Nayfeh, 1981).

2.2. Büyük O Gösterimi ile İşlemler

1. Çarpma

İki fonksiyonun büyük O gösterimlerinin çarpımı, fonksiyonların çarpımının büyük O gösterimlerine eşittir;

$$O(f(x))O(g(x))=O(f(x)g(x)) \quad (2.8)$$

$$\text{Örnek 2.3.1. } O(x^3)O(x^4)=O(x^3x^4)=O(x^7)$$

2. Toplama

İki fonksiyonun büyük O gösterimlerinin toplamı, iki fonksiyondan en hızlı büyüyenin büyük O gösterimine eşittir;

$$O(f(x))+O(g(x))=O(\max\{f(x),g(x)\}) \quad (2.9)$$

$$\text{Örnek 2.3.2. } O(x^2)+O(x^7)=O(\max\{x^2,x^7\})=O(x^7)$$

3. Bir sabit ile çarpma

Bir fonksiyonun sıfırdan farklı bir sabitle çarpımının büyük O gösterimi, fonksiyonun büyük O gösterimine eşittir;

$$O(kf(x))=O(f(x)), \quad k \neq 0 \quad (2.10)$$

$$\text{Örnek 2.3.3. } O(18f(x))=O(f(x))$$

4. Bir sabit ile toplama

Bir fonksiyonun bir sabitle toplamının büyük O gösterimi, fonksiyonun büyük O gösterimine eşittir;

$$O(k+f(x))=O(f(x)) \quad (2.11)$$

$$\text{Örnek 2.3.4. } O(30+f(x))=O(f(x)) \text{ (Nayfeh, 1981).}$$

2.3. Sık Karşılaşılan Fonksiyonlar

Aşağıda verilen fonksiyonlar büyük O gösteriminde en çok kullanılan fonksiyonlardan bazılarıdır.

$$x \log x, \log x, 1, x^2, x, x^3$$

Bu fonksiyonların büyüme hızının sıralanışı aşağıdaki gibidir:

$$1, \log x, x \log x, x, x^2, x^3, x > 1.$$

Dikkat edilmelidir ki $O(\log x)$ ile $O(\log x^n)$ ifadeleri aynıdır. Çünkü n bir sabit olduğundan $\log x^n = n \log x$ dir. Bu durumda, büyük O gösteriminde sabitin bir etkisi olmadığından $O(\log x^n) = O(n \log x) = O(\log x)$ olacaktır.

2.4. Pertürbasyon Teorisinin Temel Teoremi

Teorem 2.4.1. Eğer $A_0 + A_1 \varepsilon + \dots + A_N \varepsilon^N + O(\varepsilon^{N+1}) = 0$ ise o zaman $A_0 = A_1 = \dots = A_N = 0$ dır.

İspat. Farz edelim ki $A_0 + A_1 \varepsilon + \dots + A_N \varepsilon^N + O(\varepsilon^{N+1}) = 0$ olsun ancak tüm A_k 'lar 0 olmasın. 0 olmayan ilk terim A_H olsun. O halde,

$$\frac{A_H \varepsilon^H + A_{H+1} \varepsilon^{H+1} + \dots + A_N \varepsilon^N + O(\varepsilon^{N+1})}{\varepsilon^{N+1}} = \frac{A_H + A_{H+1} \varepsilon + \dots + A_N \varepsilon^{N-H} + O(\varepsilon^{N+1-H})}{\varepsilon^{N+1-H}} \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.12)$$

Bu “büyük O” tanımı ile çelişir. Bu çelişkinin sebebi tüm A_k 'ların 0 kabul edilmemesidir. O halde $A_0 = A_1 = \dots = A_N = 0$ dır (Mann ve Simmonds, 1984), (Jordan ve Smith, 1987).

2.5. Regüler Pertürbasyon Teorisi

Regüler pertürbasyon teorisi genelde, sistemin parametresi olan ε , sıfıra eşit iken sahip olduğu çözüm, $\varepsilon \neq 0$ ancak çok küçük olduğunda sahip olduğu çözüme çok yakınsa uygulanır. Yani regüler pertürbasyon probleminde $\varepsilon \rightarrow 0$ iken problemin çözümü, problemin $\varepsilon = 0$ da ki çözüme yakınsar. Burada amaç, problemin çözümünü, küçük gecikme terimi olan ε 'un kuvvet serisi cinsinden elde etmektir.

Yani regüler pertürbasyon teorisinde çözümün,

$$y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\dots \quad (2.13)$$

formunda ifade edilebildiği kabul edilir. Kuvvet serisindeki ilk terim problemdeki küçük gecikme terimi olan ε 'un sıfır olmasıyla elde edilen çözümdür. Diğer terimler ise gecikmeden dolayı oluşan sapmayı ifade eder(Murray, 1984).

Örnek 2.5.1. (Cebirsel Denklem) $x^2-\varepsilon x-1=0$ denklemini ele alalım.

İkinci dereceden denklem çözümü yaparsak denklemin kökleri,

$$x_+=\frac{\varepsilon}{2}+\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2}{4}}, \quad x_-=\frac{\varepsilon}{2}-\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2}{4}} \quad (2.14)$$

olarak bulunur. Bulunan köklerde Maclaurin serisine açılırsa,

$$x_+(\varepsilon)=1+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{8}+O(\varepsilon^3), \quad x_-(\varepsilon)=-1+\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{8}+O(\varepsilon^3) \quad (2.15)$$

şeklinde olur.

Şimdi aynı denkleme pertürbasyon metodunu uygulayalım. Bunun için verilen denklemin köklerini $x(\varepsilon)=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+O(\varepsilon^3)$ şeklinde seriye açalım ve denklemden yerine yazalım;

$$(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+O(\varepsilon^3))^2-\varepsilon(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+O(\varepsilon^3))-1=0 \quad (2.16)$$

Denklem (2.16)'yı düzenlediğimizde,

$$x_0^2+\varepsilon^2 x_1^2+2\varepsilon x_0 x_1+2\varepsilon^2 x_0 x_2-\varepsilon x_0-\varepsilon^2 x_1-1+O(\varepsilon^3)=0 \quad (2.17)$$

şeklinde olur. Denklem (2.17)'nin sol tarafındaki ε 'ların kuvvetlerinin katsayısını sıfıra eşitleyelim;

$$\varepsilon^0 : x_0^2-1=0 \quad (2.18)$$

$$\varepsilon^1 : 2x_0 x_1-x_0=0 \quad (2.19)$$

$$\varepsilon^2 : x_1^2+2x_0 x_2-x_1=0 \quad (2.20)$$

Denklem (2.18)'in çözümünden,

$$x_0=1, \quad x_0=-1 \quad (2.21)$$

çözümlerini, Denklem (2.19)'un çözümünden,

$$x_0=1 \text{ için } x_1=\frac{1}{2}; \quad x_0=-1 \text{ için } x_1=\frac{1}{2} \quad (2.22)$$

çözümlerini ve Denklem (2.20)'nin çözümünden ise,

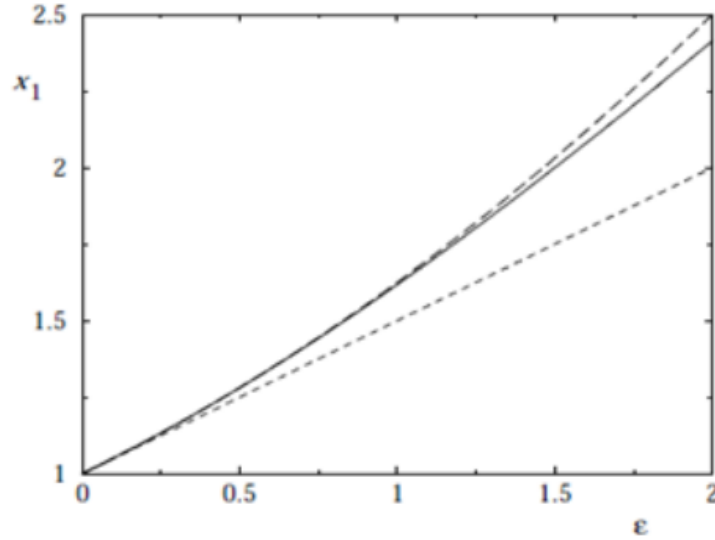
$$x_0=1, \quad x_1=\frac{1}{2} \text{ için } x_2=\frac{1}{8}; \quad x_0=-1, \quad x_1=\frac{1}{2} \text{ için } x_2=-\frac{1}{8} \quad (2.23)$$

çözümlerini elde ederiz.

Böylelikle kökler,

$$x(\varepsilon)=1+\varepsilon\frac{1}{2}+\varepsilon^2\frac{1}{8}+O(\varepsilon^3), \quad x(\varepsilon)=-1+\varepsilon\frac{1}{2}-\varepsilon^2\frac{1}{8}+O(\varepsilon^3) \quad (2.24)$$

olarak bulunur. Şekil 2.1'de elde edilen köklerin grafikleri görülmektedir.



Şekil 2.1. Kalın çizgi denklemin $x_+(\varepsilon)$ olan çözümünü temsil ediyor, noktalı çizgi serinin $O(\varepsilon^2)$ 'de kesilmesiyle elde edilen çözümü temsil ediyor, kesikli olan çizgi serinin $O(\varepsilon^3)$ 'de kesilmesiyle elde edilen çözümü temsil ediyor (https://cims.nyu.edu/~eve2/reg_pert.pdf).

Örnek 2.5.2. $(x^2+e^2)y'+xy=\epsilon x$, $y(0)=1$ başlangıç değeri denklemini ele alalım.

Denklemin köklerini $y(x,\epsilon)=y_0+\epsilon y_1+O(\epsilon^2)$ şeklinde genişletelim ve denklemde yerine yazalım;

$$(x^2+e^2)(y_0+\epsilon y_1+O(\epsilon^2))' + x(y_0+\epsilon y_1+O(\epsilon^2)) = \epsilon x \quad (2.25)$$

Denklem (2.25)'i düzenlediğimizde,

$$(x^2+e^2)y_0' + (x^2+e^2)\epsilon y_1' + xy_0 + x\epsilon y_1 - \epsilon x + O(\epsilon^2) = 0 \quad (2.26)$$

şeklinde olur. Denklem (2.26)'nın sol tarafındaki ϵ 'ların kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyelim;

$$\epsilon^0 : \begin{cases} (x^2+e^2)y_0' + xy_0 = 0 \\ y_0(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow y_0(x) = \frac{e}{\sqrt{x^2+e^2}} \quad (2.27)$$

$$\epsilon^1 : \begin{cases} (x^2+e^2)y_1' + xy_1 - x = 0 \\ y_1(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y_1(x) = 1 - \frac{e}{\sqrt{x^2+e^2}} \quad (2.28)$$

Böylelikle çözüm,

$$y(x,\epsilon) = \frac{e}{\sqrt{x^2+e^2}} + (1 - \frac{e}{\sqrt{x^2+e^2}})\epsilon + O(\epsilon^2) \quad (2.29)$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.5.3. (Cebirsel Denklem) $x^2+x-12+\epsilon=0$ denklemini ele alalım.

Denklemin köklerini $x(\epsilon)=x_0+\epsilon x_1+\epsilon^2 x_2+O(\epsilon^3)$ şeklinde genişletelim ve denklemde yerine yazalım;

$$(x_0+\epsilon x_1+\epsilon^2 x_2+O(\epsilon^3))^2 + (x_0+\epsilon x_1+\epsilon^2 x_2+O(\epsilon^3)) - 12 + \epsilon = 0 \quad (2.30)$$

Denklem (2.30)'u düzenlediğimizde,

$$x_0^2 + \epsilon^2 x_1^2 + 2(x_0 \epsilon x_1 + x_0 \epsilon^2 x_2) + x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \epsilon - 12 + O(\epsilon^3) = 0 \quad (2.31)$$

şeklinde olur. Denklem (2.31)'in sol tarafındaki ϵ 'ların kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyelim;

$$\varepsilon^0 : x_0^2 + x_0 - 12 = 0 \quad (2.32)$$

$$\varepsilon^1 : 2x_0x_1 + x_1 + 1 = 0 \quad (2.33)$$

$$\varepsilon^2 : x_1^2 + 2x_0x_2 + x_2 = 0 \quad (2.34)$$

Denklem (2.32)'nin çözümünden,

$$x_0 = 3, \quad x_0 = -4 \quad (2.35)$$

çözümlerini, Denklem (2.33)'ün çözümünden,

$$x_0 = 3 \text{ için } x_1 = -\frac{1}{7}; \quad x_0 = -4 \text{ için } x_1 = \frac{1}{7} \quad (2.36)$$

çözümlerini ve Denklem (2.34)'ün çözümünden ise,

$$x_0 = 3, \quad x_1 = -\frac{1}{7} \text{ için } x_2 = -\frac{1}{343}; \quad x_0 = -4, \quad x_1 = \frac{1}{7} \text{ için } x_2 = \frac{1}{343} \quad (2.37)$$

çözümlerini elde ederiz.

Elde edilen bu ifadelere göre denklemin köklerinden biri,

$$x(\varepsilon) = 3 - \frac{1}{7}\varepsilon - \frac{1}{343}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (2.38)$$

diğeri ise,

$$x(\varepsilon) = -4 + \frac{1}{7}\varepsilon + \frac{1}{343}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (2.39)$$

şeklinde olur.

2.6. Singüler Pertürbasyon Teorisi

Singüler pertürbasyon problemlerinin regüler pertürbasyon problemlerinden farkı problemin parametresi olan ε' un problemdeki konumudur. Eğer problemin parametresi olan ε , problemin en büyük dereceli teriminin katsayısı ise ve $\varepsilon \rightarrow 0$ iken en büyük dereceli terim de yok oluyorsa bu probleme singüler pertürbasyon problemi denir. Yani singüler pertürbasyon probleminde $\varepsilon \rightarrow 0$ iken problemin sahip olduğu çözüm, $\varepsilon = 0$ da ki sahip olduğu çözüme yakınsamaz.

Singüler pertürbasyon problemlerinde kök bulmak için öncelikle regüler pertürbasyon problemlerinde kullandığımız çözüm yöntemini kullanarak problemin köklerinden bazılarını elde ederiz. Kalan diğer kökleri bulmak içinde farklı ölçeklendirmeler kullanırız.

$f(x,\varepsilon)=0$ ifadesinin çözümleri,

$$x(\varepsilon)=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\dots \quad (2.40)$$

şeklinde düzenli açılımlara sahip olmayabilir. Ancak farklı ölçeklendirmeler kullanılarak ifade edilebilir. Bunlardan biri singüler pertürbasyon metodudur(Jordan ve Smith, 1987; Murray, 1984).

Örnek 2.6.1. $\varepsilon x^2-2x-8=0$ denklemini düşünelim.

Denklemin köklerini $x(\varepsilon)=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+O(\varepsilon^3)$ şeklinde genişletelim ve denklemden yerine yazalım;

$$\varepsilon(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+O(\varepsilon^3))^2-2(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+O(\varepsilon^3))-8=0 \quad (2.41)$$

Denklem (2.41)'i düzenlediğimizde,

$$\varepsilon x_0^2+2x_0\varepsilon^2 x_1-2x_0-2\varepsilon x_1-2\varepsilon^2 x_2-8+O(\varepsilon^3)=0 \quad (2.42)$$

şeklinde olur. Denklem (2.42)'nin sol tarafındaki ε 'ların kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyelim;

$$\varepsilon^0 : -2x_0-8=0 \quad (2.43)$$

$$\varepsilon^1 : x_0^2-2x_1=0 \quad (2.44)$$

$$\varepsilon^2 : 2x_0x_1-2x_2=0 \quad (2.45)$$

Denklem (2.43)'ün çözümünden,

$$x_0=-4 \quad (2.46)$$

çözümünü, Denklem (2.44)'ün çözümünden,

$$x_0=-4 \text{ için } x_1=8 \quad (2.47)$$

çözümünü ve Denklem (2.45)'in çözümünden ise,

$$x_0=-4, x_1=8 \text{ için } x_2=-32 \quad (2.48)$$

çözümünü elde ederiz.

Böylece köklerden biri,

$$x(\varepsilon)=-4+8\varepsilon-32\varepsilon^2+O(\varepsilon^3) \quad (2.49)$$

şeklinde olur.

Köklerden yalnızca birini bulduk. Şimdi ikinci kökü bulalım.

$$\Delta=4+32\varepsilon \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8\varepsilon}}{\varepsilon} \quad (2.50)$$

Böylelikle ikinci kök,

$$x(\varepsilon)=\frac{2}{\varepsilon}+4-8\varepsilon+32\varepsilon^2+O(\varepsilon^3) \quad (2.51)$$

şeklinde olacaktır.

3. KÜÇÜK GECİKME İÇEREN LİNEER KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, bu tezin temel amacı olan küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denklemlerin analitik ya da yaklaşık çözümlerini elde etmek için pertürbasyon teorisine de ihtiyaç duyulan bir yöntem geliştirilmiştir.

Aşağıdaki gibi küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denklemini ele alalım.

$$D^{2q}u(t) + BD^q u(t) + Cu(t) + Eu(t-\varepsilon) = 0. \quad (3.1)$$

Burada $B, C, E \in \mathbb{R}$ ($E \neq 0$) keyfi sabitler ve $0 < \varepsilon < 1$ küçük gecikme terimidir. Bu problemin yaklaşık çözümü için Denklem (3.1)'deki küçük gecikme terimi içeren fonksiyonu Taylor serisine açalım;

$$u(t-\varepsilon) \approx u(t) - \varepsilon D u(t) + O(\varepsilon^2) \quad (3.2)$$

Denklem (3.2)'yi Denklem (3.1)'de yazarsak,

$$D^{2q}u(t) + BD^q u(t) + Cu(t) + E(u(t) - \varepsilon D u(t) + O(\varepsilon^2)) = 0 \quad (3.3)$$

gecikme terimi içeren fonksiyonu içermeyen lineer kesirli diferansiyel denklemini elde ederiz. Şimdi $n \in \mathbb{N}$ için $q.n=1$ varsayımını ele alalım. Bu durumda $D = D^{qn}$ olur. Bu durumda Denklem (3.3),

$$D^{2q}u(t) + BD^q u(t) + Cu(t) + E(u(t) - \varepsilon D^{qn} u(t)) = 0 \quad (3.4)$$

formunda yazılır. ($O(\varepsilon^2)$ ihmal edilebilir.)

$u(t) = E_{q,1}(rt^q)$ fonksiyonu Denklem (3.4)'ün çözümü olsun. O zaman Denklem (3.4) için karakteristik denklem,

$$r^2 + Br + C + E(1 - \varepsilon r^n) = 0 \quad (3.5)$$

şeklinde yazılır. Bazı düzenlemeler yaparsak Denklem (3.5),

$$\epsilon r^n - \frac{1}{E} r^2 - \frac{B}{E} r - \left(\frac{C}{E} + 1 \right) = 0 \quad (3.6)$$

şeklinde yazılır. Karakteristik Denklem (3.6)'nın çözümünü elde etmek için pertürbasyon teorisini kullanacağız. Çözüm,

$$r(\epsilon) = r_0 + \epsilon r_1 + O(\epsilon^2) \quad (3.7)$$

serisi formunda temsil edilebilir.

Bu bölümde bu varsayımı kullanarak çeşitli durumlar düşüneceğiz.

Durum 3.1.

$n=1$ durumunu düşünürsek Karakteristik Denklem (3.6),

$$\epsilon r - \frac{1}{E} r^2 - \frac{B}{E} r - \left(\frac{C}{E} + 1 \right) = 0 \quad (3.8)$$

şeklinde olur. Bazı düzenlemeler sonucunda Karakteristik Denklem (3.8)'i,

$$r^2 + (B - E\epsilon)r + (C + E) = 0 \quad (3.9)$$

formunda elde ederiz. Karakteristik Denklem (3.9)'un çözümü için regüler pertürbasyon yöntemi kullanılır. Bu, çözümü Denklem (3.7) formunda arayacağımız anlamına gelir. Denklem (3.7)'yi Denklem (3.9)'da yazarsak aşağıdaki denklemi elde ederiz;

$$r_0^2 + 2\epsilon r_0 r_1 + \epsilon^2 r_1^2 + B r_0 + B \epsilon r_1 - E \epsilon r_0 - E \epsilon^2 r_1 + C + E + O(\epsilon^3) = 0. \quad (3.10)$$

Denklem (3.10)'un sol tarafındaki ϵ 'ların kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyelim;

$$\epsilon^0 : r_0^2 + B r_0 + C + E = 0 \quad (3.11)$$

$$\epsilon^1 : 2r_0 r_1 + B r_1 - E r_0 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{E r_0}{2r_0 + B}. \quad (3.12)$$

Denklem (3.11)'in çözümünden,

$$r_0^{+,-} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad (3.13)$$

çözümünü, Denklem (3.12)'nin çözümünden ise,

$$r_1^{+,-} = \frac{E\left(\frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2}\right)}{2\left(\frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2}\right) + B} = \frac{E\left(\frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2}\right)}{\pm \sqrt{\Delta}} \quad (3.14)$$

çözümünü elde ederiz. Burada $\Delta = B^2 - 4(C+E)$ dir.

Böylece Karakteristik Denklem (3.9)'un yaklaşık çözümleri,

$$r^+(\varepsilon) = r_0^+ + \varepsilon r_1^+ + O(\varepsilon^2) = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2} + \varepsilon \frac{E\left(\frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2}\right)}{\sqrt{\Delta}} + O(\varepsilon^2) \quad (3.15)$$

$$r^-(\varepsilon) = r_0^- + \varepsilon r_1^- + O(\varepsilon^2) = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2} + \varepsilon \frac{E\left(\frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2}\right)}{-\sqrt{\Delta}} + O(\varepsilon^2) \quad (3.16)$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak, küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümü aşağıdaki formda elde edilir;

$$u(t; \varepsilon) = \alpha_1 E_{1,1}(r^+(\varepsilon)t) + \alpha_2 E_{1,1}(r^-(\varepsilon)t). \quad (3.17)$$

Burada,

$$E_{1,1}(r(\varepsilon)t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r(\varepsilon)t)^k}{\Gamma(k+1)} \quad (3.18)$$

şeklindedir.

Durum 3.2.

$n=2$ durumunu düşünürsek Karakteristik Denklem (3.6),

$$\varepsilon r^2 - \frac{1}{E} r^2 - \frac{B}{E} r - \left(\frac{C}{E} + 1\right) = 0 \quad (3.19)$$

şeklinde olur. Bazı düzenlemeler sonucunda Karakteristik Denklem (3.19)'u,

$$r^2 \left(\varepsilon - \frac{1}{E} \right) - r \frac{B}{E} - \left(\frac{C}{E} + 1 \right) = 0 \quad (3.20)$$

formunda elde ederiz. Karakteristik Denklem (3.20)'nin çözümü için regüler pertürbasyon yöntemi kullanılır. Bu, çözümü Denklem (3.7) formunda arayacağımız anlamına gelir. Denklem (3.7)'yi Denklem (3.20)'de yazarsak,

$$(r_0 + \varepsilon r_1 + O(\varepsilon^2))^2 \left(\varepsilon - \frac{1}{E} \right) - (r_0 + \varepsilon r_1 + O(\varepsilon^2)) \frac{B}{E} - \left(\frac{C}{E} + 1 \right) = 0 \quad (3.21)$$

denklemini elde ederiz ve Denklem (3.21)'i düzenlediğimizde ise,

$$(r_0^2 + 2\varepsilon r_0 r_1 + \varepsilon^2 r_1^2 + O(\varepsilon^3)) \left(\varepsilon - \frac{1}{E} \right) - (r_0 + \varepsilon r_1 + O(\varepsilon^2)) \frac{B}{E} - \left(\frac{C}{E} + 1 \right) = 0 \quad (3.22)$$

denklemini elde ederiz. Denklem (3.22)'nin sol tarafındaki ε 'ların kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyelim;

$$\varepsilon^0 : r_0^2 + B r_0 + C + E = 0 \quad (3.23)$$

$$\varepsilon^1 : r_0^2 - \frac{1}{E} 2r_0 r_1 - \frac{B}{E} r_1 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{E r_0^2}{2r_0 + B}. \quad (3.24)$$

Denklem (3.23)'ün çözümünden,

$$r_0^{+,-} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad (3.25)$$

çözümlerini, Denklem (3.24)'ün çözümünden ise,

$$r_1^{+,-} = \frac{E \left(\frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2} \right)^2}{2 \left(\frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2} \right) + B} = \frac{E \left(\frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2} \right)^2}{\pm \sqrt{\Delta}} \quad (3.26)$$

çözümlerini elde ederiz. Burada $\Delta = B^2 - 4(C+E)$ dir.

Böylece Karakteristik Denklem (3.20)'nin yaklaşık çözümleri,

$$r^+(\varepsilon) = r_0^+ + \varepsilon r_1^+ + O(\varepsilon^2) = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2} + \varepsilon \frac{E \left(\frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2} \right)^2}{\sqrt{\Delta}} + O(\varepsilon^2) \quad (3.27)$$

$$r^-(\varepsilon) = r_0^- + \varepsilon r_1^- + O(\varepsilon^2) = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2} + \varepsilon \frac{E \left(\frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2} \right)^2}{-\sqrt{\Delta}} + O(\varepsilon^2) \quad (3.28)$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak, küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümü aşağıdaki formda elde edilir;

$$u(t; \varepsilon) = \alpha_1 E_{\frac{1}{2}, 1} \left(r^+(\varepsilon) t^{\frac{1}{2}} \right) + \alpha_2 E_{\frac{1}{2}, 1} \left(r^-(\varepsilon) t^{\frac{1}{2}} \right). \quad (3.29)$$

Burada

$$E_{\frac{1}{2}, 1} \left(r(\varepsilon) t^{\frac{1}{2}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r(\varepsilon) t^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k+1)} \quad (3.30)$$

şeklindedir.

Durum 3.3.

$n=3$ durumunu düşünürsek Karakteristik Denklem (3.6),

$$\varepsilon r^3 - \frac{1}{E} r^2 - \frac{B}{E} r - \left(\frac{C}{E} + 1 \right) = 0 \quad (3.31)$$

şeklinde olur. Karakteristik Denklem (3.31)'i çözmek için singüler pertürbasyon yöntemini kullanırız. Bu nedenle, ya üçüncü dereceden cebirsel denklemin çözümü için gerekli formülleri kullanarak ya da $r = \varepsilon^b X$ ifadesini ölçeklendirerek ve uygun terimleri dengeleyerek çözümü elde ederiz.

$r = \varepsilon^b X$ ölçeklendirmesini Denklem (3.31)'de yerine yazarsak

$$\varepsilon (\varepsilon^b X)^3 - \frac{1}{E} (\varepsilon^b X)^2 - \frac{B}{E} (\varepsilon^b X) - \left(\frac{C}{E} + 1 \right) = 0 \quad (3.32)$$

denklemini elde ederiz. Elde edilen bu denklemde bazı düzenlemeler yaparsak Denklem (3.32),

$$\varepsilon^{3b+1} X^3 - \frac{1}{E} \varepsilon^{2b} X^2 - \frac{B}{E} \varepsilon^b X - \left(\frac{C}{E} + 1 \right) = 0 \quad (3.33)$$

şeklinde olur. Denklem (3.33)'ü çözebilmek için öncelikle bu denklemi regüler hale getirmeliyiz. Bunun için uygun bir b değeri bulmalıyız. Uygun bir b değeri bulmak içinde değişkenlerin katsayısı olan ε 'ları dengelemeliyiz. Buradan elde edeceğimiz b değerini denklemde yerine koyduğumuzda denklemin en büyük dereceli teriminin katsayısını gecikme terimi olan ε 'dan kurtarabiliriz. Böylece Denklem (3.33) regüler hale gelmiş olur. Denklem (3.33)'ün çözümünden elde edilen $X(\varepsilon)$ çözümünü $r=\varepsilon^b X$ ölçeklendirmesinde yerine yazdığımızda (3.31) singüler pertürbasyon probleminin yaklaşık çözümlerini elde etmiş oluruz.

Denklem (3.31)'in yaklaşık çözümleri $r_1(\varepsilon), r_2(\varepsilon), r_3(\varepsilon)$ olsun. Böylece, küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümü aşağıdaki formda elde edilir;

$$u(t;\varepsilon)=\alpha_1 E_{\frac{1}{3},1} \left(r_1(\varepsilon) t^{\frac{1}{3}} \right) + \alpha_2 E_{\frac{1}{3},1} \left(r_2(\varepsilon) t^{\frac{1}{3}} \right) + \alpha_3 E_{\frac{1}{3},1} \left(r_3(\varepsilon) t^{\frac{1}{3}} \right). \quad (3.34)$$

Burada,

$$E_{\frac{1}{3},1} \left(r(\varepsilon) t^{\frac{1}{3}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r(\varepsilon) t^{\frac{1}{3}})^k}{\Gamma(\frac{1}{3}k+1)} \quad (3.35)$$

şeklinde tanımlanır.

3.1. Örnekler

Bu bölümde, bu yöntemin nasıl etkili ve doğru olduğunu göstermek için yukarıdaki üç durum için çeşitli örnekler göstereceğiz.

Örnek 3.1.1. $D^2 u(t) + 4Du(t) + u(t) + 2u(t-\varepsilon) = 0$ küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denklemini ele alalım.

$$u(t-\varepsilon) \approx u(t) - \varepsilon Du(t) + O(\varepsilon^2). \quad (3.36)$$

Taylor serisi açılımını denklemde yazıp, ifadeyi düzenlediğimizde,

$$D^2 u(t) + (4-2\varepsilon)Du(t) + 3u(t) = 0 \quad (3.37)$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin karakteristik denklemi ise,

$$r^2 + (4 - 2\varepsilon)r + 3 = 0 \quad (3.38)$$

şeklinde. Denklem (3.38)'in çözümü için regüler pertürbasyon yöntemi kullanılır. Bu, çözümü Denklem (3.7) formunda arayacağımız anlamına gelir. Denklem (3.5)'i Denklem (3.38)'de yazarsak,

$$r_0^2 + 2r_0\varepsilon r_1 + 4r_0 + 4\varepsilon r_1 - 2\varepsilon r_0 + 3 + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (3.39)$$

denklemini elde ederiz. Denklem (3.39)'un sol tarafındaki ε 'ların kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyelim;

$$\varepsilon^0 : r_0^2 + 4r_0 + 3 = 0 \quad (3.40)$$

$$\varepsilon^1 : 2r_0r_1 + 4r_1 - 2r_0 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{2r_0}{2r_0 + 4} \quad (3.41)$$

Bu durumda, Denklem (3.40)'in çözümünden,

$$r_0^+ = -1, r_0^- = -3, \quad (3.42)$$

çözümlerini, Denklem (3.41)'in çözümünden ise,

$$r_1^+ = -1, r_1^- = 3 \quad (3.43)$$

çözümlerini elde ederiz.

Böylece Karakteristik Denklem (3.38)'in yaklaşık çözümleri,

$$r^+(\varepsilon) = -1 - \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (3.44)$$

$$r^-(\varepsilon) = -3 + 3\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (3.45)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak, küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümü aşağıdaki formda elde edilir;

$$u(t; \varepsilon) = \alpha_1 E_{1,1}((-1 - \varepsilon)t) + \alpha_2 E_{1,1}((-3 + 3\varepsilon)t). \quad (3.46)$$

Örnek 3.1.2. $D^2u(t) + 6Du(t) + 3u(t) + 6u(t - \varepsilon) = 0$ küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denklemini ele alalım.

$$u(t-\varepsilon) \approx u(t) - \varepsilon D u(t) + O(\varepsilon^2) \quad (3.47)$$

Taylor serisi açılımını denklemde yazıp, ifadeyi düzenlediğimizde,

$$D^2 u(t) + (6 - 6\varepsilon) D u(t) + 9u(t) = 0 \quad (3.48)$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin karakteristik denklemi ise,

$$r^2 + (6 - 6\varepsilon)r + 9 = 0 \quad (3.49)$$

şeklindedir. Denklem (3.49)'un kökleri,

$$r^\pm(\varepsilon) = \frac{6\varepsilon - 6 \pm 6\sqrt{\varepsilon^2 - 2\varepsilon}}{2} = 3\varepsilon - 3 \pm 3i\sqrt{\varepsilon} \sqrt{2 - \varepsilon} \quad (3.50)$$

olarak bulunur.

Böylece Karakteristik Denklem (3.49)'un yaklaşık çözümleri,

$$r^+(\varepsilon) = -3 + 3\varepsilon + 3i\sqrt{2\varepsilon} - \frac{3i\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{2}} + O(\varepsilon^2) \quad (3.51)$$

$$r^-(\varepsilon) = -3 + 3\varepsilon - 3i\sqrt{2\varepsilon} + \frac{3i\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{2}} + O(\varepsilon^2) \quad (3.52)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak, küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümü aşağıdaki formda elde edilir;

$$u(t; \varepsilon) = \alpha_1 E_{1,1} \left(\left(-3 + 3\varepsilon + 3i\sqrt{2\varepsilon} - \frac{3i\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{2}} \right) t \right) + \alpha_2 E_{1,1} \left(\left(-3 + 3\varepsilon - 3i\sqrt{2\varepsilon} + \frac{3i\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{2}} \right) t \right). \quad (3.53)$$

Örnek 3.1.3. $D^2 u(t) + 2D u(t) + 2u(t) + 3u(t-\varepsilon) = 0$ küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denklemini ele alalım.

$$u(t-\varepsilon) \approx u(t) - \varepsilon D u(t) + O(\varepsilon^2) \quad (3.54)$$

Taylor serisi açılımını denklemde yazıp ifadeyi düzenlediğimizde,

$$D^2 u(t) + (2 - 3\varepsilon) D u(t) + 5u(t) = 0 \quad (3.55)$$

şeklinde olur. Elde edilen denklemin karakteristik denklemi ise

$$r^2 + (2 - 3\varepsilon)r + 5 = 0 \quad (3.56)$$

şeklinde dir. Karakteristik Denklem (3.56)'nın çözümü için regüler pertürbasyon yöntemi kullanılır. Bu, çözümü Denklem (3.7) formunda arayacağımız anlamına gelir. Denklem (3.7)'yi Denklem (3.56)'da yazarsak,

$$r_0^2 + 2r_0\varepsilon r_1 + 2r_0 + 2\varepsilon r_1 - 3\varepsilon r_0 + 5 + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (3.57)$$

ifadesini elde ederiz. Denklem (3.57)'nin sol tarafındaki serinin ardışık terimlerini sıfıra eşitleyelim;

$$\varepsilon^0 : r_0^2 + 2r_0 + 5 = 0 \quad (3.58)$$

$$\varepsilon^1 : 2r_0r_1 + 2r_1 - 3r_0 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{3r_0}{2r_0 + 2} \quad (3.59)$$

Bu durumda, Denklem (3.58)'in çözümünden,

$$r_0^+ = -1 + 2i, \quad r_0^- = -1 - 2i \quad (3.60)$$

çözümlerini, Denklemin (3.59)'un çözümünden ise,

$$r_1^+ = \frac{-3+6i}{4i}, \quad r_1^- = \frac{-3-6i}{-4i} \quad (3.61)$$

çözümlerini elde ederiz.

Böylece Karakteristik Denklem (3.56)'nın yaklaşık çözümleri,

$$r^+(\varepsilon) = -1 + 2i + \varepsilon \frac{-3+6i}{4i} + O(\varepsilon^2) \quad (3.62)$$

$$r^-(\varepsilon) = -1 - 2i + \varepsilon \frac{-3-6i}{-4i} + O(\varepsilon^2) \quad (3.63)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak, küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümü aşağıdaki formda elde edilir;

$$u(t;\varepsilon)=\alpha_1 E_{1,1}\left(\left(-1+2i+\varepsilon\frac{-3+6i}{4i}\right)t\right)+\alpha_2 E_{1,1}\left(\left(-1-2i+\varepsilon\frac{-3-6i}{-4i}\right)t\right). \quad (3.64)$$

Örnek 3.1.4. $Du(t)+3D^{\frac{1}{2}}u(t)+u(t)+u(t-\varepsilon)=0$ küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denklemini ele alalım.

$$u(t-\varepsilon)\approx u(t)-\varepsilon Du(t)+O(\varepsilon^2) \quad (3.65)$$

Taylor serisi açılımını denklemde yazıp ifadeyi düzenlediğimizde,

$$(1-\varepsilon)Du(t)+3D^{\frac{1}{2}}u(t)+2u(t)=0 \quad (3.66)$$

şeklinde olur. Elde edilen denklemin karakteristik denklemi ise,

$$(1-\varepsilon)r^2+3r+2=0 \quad (3.67)$$

şeklindedir. Karakteristik Denklem (3.67)'nin çözümü için regüler pertürbasyon yöntemi kullanılır. Bu, çözümü Denklem (3.7) formunda arayacağımız anlamına gelir. Denklem (3.7)'yi Karakteristik Denklem (3.67)'de yazarsak,

$$r_0^2+2r_0\varepsilon r_1-\varepsilon r_0^2+3r_0+3\varepsilon r_1+2+O(\varepsilon^2)=0 \quad (3.68)$$

ifadesini elde ederiz. Denklem (3.68)'in sol tarafındaki ε 'ların kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyelim;

$$\varepsilon^0 : r_0^2+3r_0+2=0 \quad (3.69)$$

$$\varepsilon^1 : 2r_0r_1-r_0^2+3r_1=0 \Rightarrow r_1=\frac{r_0^2}{2r_0+3} \quad (3.70)$$

Bu durumda, Denklem (3.69)'un çözümünden,

$$r_0^+=-1, \quad r_0^-=-2 \quad (3.71)$$

çözümlerini, Denklem (3.70)'in çözümünden ise,

$$r_1^+=1, \quad r_1^-=-4 \quad (3.72)$$

çözümlerini elde ederiz.

Böylece Karakteristik Denklem (3.67)'nin yaklaşık çözümleri,

$$r^+(\varepsilon) = -1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (3.73)$$

$$r^-(\varepsilon) = -2 - 4\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (3.74)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak, küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümü aşağıdaki formda elde edilir;

$$u(t; \varepsilon) = \alpha_1 E_{\frac{1}{2}, 1} \left((-1 + \varepsilon)t \right) + \alpha_2 E_{\frac{1}{2}, 1} \left((-2 - 4\varepsilon)t \right). \quad (3.75)$$

Örnek 3.1.5. $Du(t) + 4D^{\frac{1}{2}}u(t) + 2u(t) + 2u(t - \varepsilon) = 0$ küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denklemini ele alalım.

$$u(t - \varepsilon) \approx u(t) - \varepsilon Du(t) + O(\varepsilon^2) \quad (3.76)$$

Taylor serisi açılımını denklemde yazıp ifadeyi düzenlediğimizde,

$$(1 - 2\varepsilon)Du(t) + 4D^{\frac{1}{2}}u(t) + 4u(t) = 0 \quad (3.77)$$

şeklinde olur. Elde edilen denklemin karakteristik denklemi ise,

$$(1 - 2\varepsilon)r^2 + 4r + 4 = 0 \quad (3.78)$$

şeklinde olur. Karakteristik Denklem (3.78)'in kökleri hesaplandığında,

$$r^{\pm}(\varepsilon) = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2\varepsilon}}{2(1 - 2\varepsilon)} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2\varepsilon}}{1 - 2\varepsilon} \quad (3.79)$$

olarak bulunur.

Böylece Karakteristik Denklem (3.78)'in yaklaşık çözümleri,

$$r^+(\varepsilon) = -2 + 2\sqrt{2\varepsilon} - 4\varepsilon + 4\varepsilon\sqrt{2\varepsilon} + O(\varepsilon^2) \quad (3.80)$$

$$r^-(\varepsilon) = -2 - 2\sqrt{2\varepsilon} - 4\varepsilon - 4\varepsilon\sqrt{2\varepsilon} + O(\varepsilon^2) \quad (3.81)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak, küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümü aşağıdaki formda elde edilir;

$$u(t;\varepsilon)=\alpha_1 E_{\frac{1}{2},1}\left((-2+2\sqrt{2\varepsilon}-4\varepsilon+4\varepsilon\sqrt{2\varepsilon})t^{\frac{1}{2}}\right)+\alpha_2 E_{\frac{1}{2},1}\left((-2-2\sqrt{2\varepsilon}-4\varepsilon-4\varepsilon\sqrt{2\varepsilon})t^{\frac{1}{2}}\right) \quad (3.82)$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.1.6. $Du(t)+2D^{\frac{1}{2}}u(t)+u(t)+u(t-\varepsilon)=0$ küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denklemini ele alalım.

$$u(t-\varepsilon)\approx u(t)-\varepsilon Du(t)+O(\varepsilon^2) \quad (3.83)$$

Taylor serisi açılımını denklemde yazıp ifadeyi düzenlediğimizde,

$$(1-\varepsilon)Du(t)+2D^{\frac{1}{2}}u(t)+2u(t)=0 \quad (3.84)$$

şeklinde olur. Elde edilen denklemin karakteristik denklemi ise,

$$(1-\varepsilon)r^2+2r+2=0 \quad (3.85)$$

şeklindedir. Karakteristik Denklem (3.85)'in çözümü için regüler pertürbasyon yöntemi kullanılır. Bu, çözümü Denklem (3.7) formunda arayacağımız anlamına gelir. Denklem (3.7)'yi Denklem (3.85)'de yazarsak,

$$r_0^2+2r_0\varepsilon r_1-\varepsilon r_0^2+2r_0+2\varepsilon r_1+2+O(\varepsilon^2)=0 \quad (3.86)$$

ifadesini elde ederiz. Denklem (3.86)'nın sol tarafındaki ε 'ların kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyelim;

$$\varepsilon^0 : r_0^2+2r_0+2=0 \quad (3.87)$$

$$\varepsilon^1 : 2r_0r_1-r_0^2+2r_1=0 \Rightarrow r_1=\frac{r_0^2}{2r_0+2} \quad (3.88)$$

Bu durumda, Denklem (3.87)'nin çözümünden,

$$r_0^+=-1+i, \quad r_0^-=-1-i \quad (3.89)$$

çözümlerini, Denklem (3.88)'in çözümünden ise,

$$r_1^+ = \frac{-2i}{2i} = -1, \quad r_1^- = \frac{2i}{-2i} = -1 \quad (3.90)$$

çözümlerini elde ederiz.

Böylece Karakteristik Denklem (3.85)'in yaklaşık çözümleri,

$$r^+(\varepsilon) = -1 + i - \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (3.91)$$

$$r^-(\varepsilon) = -1 - i - \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (3.92)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak, küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümü aşağıdaki formda elde edilir;

$$u(t; \varepsilon) = \alpha_1 E_{\frac{1}{2}, 1} \left((-1 + i - \varepsilon) t^{\frac{1}{2}} \right) + \alpha_2 E_{\frac{1}{2}, 1} \left((-1 - i - \varepsilon) t^{\frac{1}{2}} \right). \quad (3.93)$$

Örnek 3.1.7. $D^{\frac{2}{3}}u(t) + 3D^{\frac{1}{3}}u(t) + u(t) + u(t - \varepsilon) = 0$ küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denklemini ele alalım.

$$u(t - \varepsilon) \approx u(t) - \varepsilon Du(t) + O(\varepsilon^2) \quad (3.94)$$

Taylor serisi açılımını denklemde yazıp ifadeyi düzenlediğimizde,

$$\varepsilon Du(t) - D^{\frac{2}{3}}u(t) - 3D^{\frac{1}{3}}u(t) - 2u(t) = 0 \quad (3.95)$$

şeklinde olur. Elde edilen denklemin karakteristik denklemi ise,

$$\varepsilon r^3 - r^2 - 3r - 2 = 0 \quad (3.96)$$

şeklindedir. Karakteristik Denklem (3.96) singüler pertürbasyon problemidir. İlk önce bu problemin bazı köklerini regüler pertürbasyon yöntemini kullanarak bulmaya çalışalım. Bu, çözümü Denklem (3.7) formunda arayacağımız anlamına gelir. Denklem (3.7)'yi Denklem (3.96)'da yazarsak,

$$\varepsilon r_0^3 - r_0^2 - 2r_0 \varepsilon r_1 - 3r_0 - 3\varepsilon r_1 - 2 + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (3.97)$$

ifadesini elde ederiz. Denklem (3.97)'nin sol tarafındaki ε 'ların kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyelim;

$$\varepsilon^0 : r_0^2 + 3r_0 + 2 = 0 \quad (3.98)$$

$$\varepsilon^1 : r_0^3 - 2r_0r_1 - 3r_1 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{r_0^3}{2r_0 + 3} \quad (3.99)$$

Bu durumda, Denklem (3.98)'in çözümünden,

$$r_0^+ = -1, \quad r_0^- = -2 \quad (3.100)$$

çözümlerini, Denklem (3.99)'un çözümünden ise,

$$r_1^+ = -1, \quad r_1^- = 8 \quad (3.101)$$

çözümlerini elde ederiz.

Böylece, Karakteristik Denklem (3.96)'nın yaklaşık çözümleri,

$$r^+(\varepsilon) = -1 - \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (3.102)$$

$$r^-(\varepsilon) = -2 + 8\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (3.103)$$

olarak elde edilir.

Şimdi Karakteristik Denklem (3.96)'nın son kökünü bulalım. Bunun için,

$$r(\varepsilon) = \varepsilon^b x \quad (3.104)$$

ifadesinden yararlanacağız. Denklem (3.104)'ü Karakteristik Denklem (3.96)'da yerine yazarsak,

$$\underbrace{\varepsilon^{3b+1}}_A x^3 - \underbrace{\varepsilon^{2b}}_B x^2 - \underbrace{3\varepsilon^b}_C x - 2 = 0 \quad (3.105)$$

ifadesini elde ederiz. Burada, b 'yi bulmak için üç olası terim çiftini inceleyeceğiz. İlk olarak, $B=C$ alırsak $b=0$ olur. Bu durumda regüler pertürbasyon yöntemini uygulayarak bulduğumuz kökleri elde ederiz. Eğer $A=C$ alırsak $b=-\frac{1}{2}$ olur ancak

B terimi baskın terimdir diğer iki terim ile dengelenemez. Son olarak $A=B$ alırsak $b=-1$ olur. $b=-1$ 'i yerine yazdığımızda denklemi,

$$\varepsilon^{-2}x^3 - \varepsilon^{-2}x^2 - 3\varepsilon^{-1}x - 2 = 0 \quad (3.106)$$

şeklinde elde ederiz. Şimdi, Denklem (3.106)'nın her iki tarafını ε^2 ile çarpalım;

$$x^3 - x^2 - 3\varepsilon x - 2\varepsilon^2 = 0. \quad (3.107)$$

Bu durumda, Denklem (3.107)'yi çözmek için,

$$x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2) \quad (3.108)$$

ifadesini kullanacağız. Denklem (3.108)'i Denklem (3.107)'de yerine yazarsak,

$$(x_0 + \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2))^3 - (x_0 + \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2))^2 - 3\varepsilon(x_0 + \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2)) - 2\varepsilon^2 = 0 \quad (3.109)$$

denklemi elde edilir. Denklem (3.109)'u düzenlediğimizde ise,

$$x_0^3 + 3x_0^2\varepsilon x_1 - x_0^2 - 2x_0\varepsilon x_1 - 3\varepsilon x_0 + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (3.110)$$

ifadesini elde ederiz. Denklem (3.110)'un sol tarafındaki ε 'ların kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyelim;

$$\varepsilon^0 : x_0^3 - x_0^2 = 0 \quad (3.111)$$

$$\varepsilon^1 : 3x_0^2x_1 - 2x_0x_1 - 3x_0 = 0 \quad (3.112)$$

Bu durumda, Denklem (3.111)'in çözümünden,

$$x_0 = 1, \quad x_0 = 0, \quad (3.113)$$

çözümlerini, Denklem (3.112)'nin çözümünden ise,

$$x_1 = 3, \quad (3.114)$$

çözümünü elde ederiz.

Böylece, Karakteristik Denklem (3.107)'nin yaklaşık çözümü,

$$x(\varepsilon)=1+3\varepsilon+O(\varepsilon^2) \quad (3.115)$$

şeklinde elde ederiz. Denklem (3.115)'i Denklem (3.106)'da yerine yazdığımızda ise,

$$r(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}+3+O(\varepsilon) \quad (3.116)$$

yaklaşık çözümünü elde ederiz.

Sonuç olarak, küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümü aşağıdaki formda elde edilir;

$$u(t;\varepsilon)=\alpha_1 E_{1,\frac{1}{3},1} \left((-1-\varepsilon)t^{\frac{1}{3}} \right) + \alpha_2 E_{1,\frac{1}{3},1} \left((-2+8\varepsilon)t^{\frac{1}{3}} \right) + \alpha_3 E_{1,\frac{1}{3},1} \left(\left(\frac{1}{\varepsilon}+3 \right) t^{\frac{1}{3}} \right). \quad (3.117)$$

Örnek 3.1.8; $D^{\frac{2}{3}}u(t)-D^{\frac{1}{3}}u(t)-u(t)+u(t-\varepsilon)=0$ küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denklemini ele alalım.

$$u(t-\varepsilon)\approx u(t)-\varepsilon Du(t)+O(\varepsilon^2) \quad (3.118)$$

Taylor serisi açılımını denklemde yazıp ifadeyi düzenlediğimizde,

$$\varepsilon Du(t)-D^{\frac{2}{3}}u(t)+D^{\frac{1}{3}}u(t)=0 \quad (3.119)$$

şeklinde olur. Elde edilen denklemin karakteristik denklemi ise,

$$\varepsilon r^3-r^2+r=0 \quad (3.120)$$

şeklindedir. Denklem (3.120)'yi ortak terim parantezine alırsak,

$$r(\varepsilon r^2-r+1)=0 \quad (3.121)$$

şeklinde olur. Bu durumda köklerden biri $r=0$ 'dır. Diğer iki kökü bulmak için,

$$\varepsilon r^2-r+1=0 \quad (3.122)$$

denklemini çözelim. Denklem (3.122) singüler pertürbasyon problemidir. İlk önce bu problemin bu köklerini regüler pertürbasyon yöntemini kullanarak bulamaya

çalışalım. Bu, çözümü Denklem (3.7) formunda arayacağımız anlamına gelir. Denklem (3.7)'yi Karakteristik Denklem (3.122)'de yerine yazarsak,

$$\varepsilon(r_0 + \varepsilon r_1 + O(\varepsilon^2))^2 - (r_0 + \varepsilon r_1 + O(\varepsilon^2)) + 1 = 0 \quad (3.123)$$

denklemini elde ederiz. Denklem (3.123)'ü düzenlediğimizde ise,

$$\varepsilon r_0^2 - r_0 - \varepsilon r_1 + 1 + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (3.124)$$

denklemini elde ederiz. Denklem (3.124)'ün sol tarafındaki ε 'ların kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyelim;

$$\varepsilon^0 : -r_0 + 1 = 0 \quad (3.125)$$

$$\varepsilon^1 : r_0^2 - r_1 = 0 \quad (3.126)$$

Bu durumda, Denklem (3.125)'in çözümünden,

$$r_0 = 1 \quad (3.127)$$

çözümlerini, Denklem (3.126)'nın çözümünden ise,

$$r_1 = 1 \quad (3.128)$$

çözümlerini elde ederiz.

Böylece, Karakteristik Denklem (3.122)'nin yaklaşık çözümü,

$$r(\varepsilon) = 1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (3.129)$$

şeklinde olur. Şimdi son kökü bulalım. Bunun için,

$$r(\varepsilon) = \varepsilon^b x \quad (3.130)$$

ifadesinden yararlanacağız. Denklem (3.130)'i Karakteristik Denklem (3.120)'de yerine yazarsak,

$$\underbrace{\varepsilon^{3b+1}}_A x^3 - \underbrace{\varepsilon^{2b}}_B x^2 + \underbrace{\varepsilon^b}_C x = 0 \quad (3.131)$$

denklemini elde ederiz. Burada, b'yi bulmak için üç olası terim çiftini inceleyeceğiz. İlk olarak, B=C'yi dengelersek b=0 olur. Bu durumda daha önce bulduğumuz kökleri elde ederiz. Eğer A=C'yi dengelersek $b=-\frac{1}{2}$ olur ancak B terimi baskın terimdir diğer iki terim ile dengelenemez. Son olarak A=B'yi dengelersek b=-1 olur. b=-1'i yerine yazdığımızda denklem,

$$\varepsilon^{-2}x^3 - \varepsilon^{-2}x^2 + \varepsilon^{-1}x = 0 \quad (3.132)$$

şeklinde olur. Şimdi, Denklem (3.132)'nin her iki tarafını ε^2 ile çarpalım;

$$x^3 - x^2 + \varepsilon x = 0 \quad (3.133)$$

Bu durumda, Denklem (3.133)'ü çözmek için,

$$x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2) \quad (3.134)$$

ifadesini kullanacağız. Denklem (3.134)'ü Denklem (3.133)'de yazarsak,

$$(x_0 + \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2))^3 - (x_0 + \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2))^2 + \varepsilon(x_0 + \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2)) = 0 \quad (3.135)$$

denklemini elde ederiz.

$$x_0^3 + 3x_0^2\varepsilon x_1 - x_0^2 - 2x_0\varepsilon x_1 + \varepsilon x_0 + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (3.136)$$

Denklem (3.136)'nın sol tarafındaki ε 'ların kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyelim;

$$\varepsilon^0 : x_0^3 - x_0^2 = 0 \quad (3.137)$$

$$\varepsilon^1 : 3x_0^2x_1 - 2x_0x_1 + x_0 = 0 \quad (3.138)$$

Bu durumda, Denklem (3.137)'nin çözümünden,

$$x_0 = 1, \quad x_0 = 0 \quad (3.139)$$

çözümlerini, Denklem (3.138)'in çözümünden ise,

$$x_1 = -1, \quad (3.140)$$

çözümünü elde ederiz.

Böylece, Karakteristik Denklem (3.133)'ün yaklaşık çözümü,

$$x(\varepsilon) = 1 - \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (3.141)$$

şeklinde olur. Denklem (3.141)'i Denklem (3.130)'da yerine yazdığımızda ise,

$$r(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - 1 + O(\varepsilon) \quad (3.142)$$

yaklaşık çözümünü elde ederiz.

Sonuç olarak, küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümü aşağıdaki formda elde edilir;

$$u(t; \varepsilon) = \alpha_1 + \alpha_2 E_{\frac{1}{3}, 1} \left((1 + \varepsilon) t^{\frac{1}{3}} \right) + \alpha_3 E_{\frac{1}{3}, 1} \left(\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) t^{\frac{1}{3}} \right). \quad (3.143)$$

Örnek 3.1.9. $D^{\frac{2}{3}}u(t) + 2D^{\frac{1}{3}}u(t) + u(t) + u(t - \varepsilon) = 0$ küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denklemini ele alalım.

$$u(t - \varepsilon) \approx u(t) - \varepsilon Du(t) + O(\varepsilon^2) \quad (3.144)$$

Taylor serisi açılımını denklemde yazıp ifadeyi düzenlediğimizde,

$$\varepsilon Du(t) - D^{\frac{2}{3}}u(t) - 2D^{\frac{1}{3}}u(t) - 2u(t) = 0 \quad (3.145)$$

şeklinde olur. Elde edilen denklemin karakteristik denklemi ise,

$$\varepsilon r^3 - r^2 - 2r - 2 = 0 \quad (3.146)$$

şeklindedir. Karakteristik Denklem (3.146) singüler pertürbasyon problemidir. İlk önce bu problemin bazı köklerini regüler pertürbasyon yöntemini kullanarak bulamaya çalışalım. Bu, çözümü Denklem (3.7) formunda arayacağımız anlamına gelir. Denklem (3.7)'yi Denklem (3.146)'da yazarsak,

$$\varepsilon r_0^3 - r_0^2 - 2r_0 \varepsilon r_1 - 2r_0 - 2\varepsilon r_1 - 2 + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (3.147)$$

ifadesini elde ederiz. Denklem (3.147)'nin sol tarafındaki ε 'ların kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyelim;

$$\varepsilon^0 : r_0^2 + 2r_0 - 2 = 0 \quad (3.148)$$

$$\varepsilon^1 : r_0^3 - 2r_0 r_1 - 2r_1 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{r_0^3}{2r_0 + 2} \quad (3.149)$$

Bu durumda, Denklem (3.148)'in çözümünden,

$$r_0^+ = -1 + i, \quad r_0^- = -1 - i, \quad (3.150)$$

çözümlerini, Denklem (3.149)'un çözümünden ise,

$$r_1^+ = 1 - i, \quad r_1^- = 1 + i \quad (3.151)$$

çözümlerini elde ederiz.

Böylece, Karakteristik Denklem (3.146)'nın yaklaşık çözümleri,

$$r^+(\varepsilon) = -1 + i + \varepsilon(1 - i) + O(\varepsilon^2) \quad (3.152)$$

$$r^-(\varepsilon) = -1 - i + \varepsilon(1 + i) + O(\varepsilon^2) \quad (3.153)$$

olarak elde edilir.

Şimdi, Karakteristik Denklem (3.146)'nın son kökünü bulalım. Bunun için,

$$r(\varepsilon) = \varepsilon^b x \quad (3.154)$$

ifadesinden yararlanacağız. Denklem (3.154)'ü Karakteristik Denklem (3.146)'da yerine yazarsak,

$$\underbrace{\varepsilon^{3b+1}}_A x^3 - \underbrace{\varepsilon^{2b}}_B x^2 - \underbrace{2\varepsilon^b}_C x - 2 = 0 \quad (3.155)$$

ifadesini elde ederiz. Burada, b 'yi bulmak için üç olası terim çiftini inceleyeceğiz. İlk olarak, $B=C$ 'yi dengelersek $b=0$ olur. Bu durumda daha önce bulduğumuz kökleri

elde ederiz. Eğer $A=C$ 'yi dengelersek $b=-\frac{1}{2}$ olur ancak B terimi baskın terimdir diğer iki terim ile dengelenemez. Son olarak $A=B$ 'yi dengelersek $b=-1$ olur. $b=-1$ 'i yerine yazdığımızda denklem,

$$\varepsilon^{-2}x^3 - \varepsilon^{-2}x^2 - 2\varepsilon^{-1}x - 2 = 0 \quad (3.156)$$

şeklinde olur. Şimdi, Denklem (3.156)'nın her iki tarafını ε^2 ile çarpalım;

$$x^3 - x^2 - 2\varepsilon x - 2\varepsilon^2 = 0 \quad (3.157)$$

Bu durumda, Denklem (3.157)'yi çözmek için,

$$x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2) \quad (3.158)$$

ifadesini kullanacağız. Denklem (3.158)'i Denklem (3.157)'de yazarsak,

$$(x_0 + \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2))^3 - (x_0 + \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2))^2 - 2\varepsilon(x_0 + \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2)) - 2\varepsilon^2 = 0 \quad (3.159)$$

şeklinde olur. Denklem (3.159)'da düzenlediğimizde ise,

$$x_0^3 + 3x_0^2\varepsilon x_1 - x_0^2 - 2x_0\varepsilon x_1 - 2\varepsilon x_0 + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (3.160)$$

ifadesini elde ederiz. Denklem (3.160)'ın sol tarafındaki ε 'ların kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyelim;

$$\varepsilon^0 : x_0^3 - x_0^2 = 0 \quad (3.161)$$

$$\varepsilon^1 : 3x_0^2x_1 - 2x_0x_1 - 2x_0 = 0 \quad (3.162)$$

Bu durumda, Denklem (3.161)'in çözümünden,

$$x_0 = 1, \quad x_0 = 0 \quad (3.163)$$

çözümlerini, Denklem (3.162)'nin çözümünden ise,

$$x_1 = 2, \quad (3.164)$$

çözümünü elde ederiz.

Böylece, Karakteristik Denklem (3.157)'nin yaklaşık çözümü,

$$x(\varepsilon)=1+2\varepsilon+O(\varepsilon^2) \quad (3.165)$$

elde ederiz. Denklem (3.165)'i Denklem (3.154)'de yerine yazdığımızda ise,

$$r(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}+2+O(\varepsilon) \quad (3.166)$$

yaklaşık çözümünü elde ederiz.

Sonuç olarak, küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümü aşağıdaki formda elde edilir;

$$u(t;\varepsilon)=\alpha_1 E_{\frac{1}{3},1} \left((-1+i+\varepsilon(1-i))t^{\frac{1}{3}} \right) + \alpha_2 E_{\frac{1}{3},1} \left((-1-i+\varepsilon(1+i))t^{\frac{1}{3}} \right) + \alpha_3 E_{\frac{1}{3},1} \left(\left(\frac{1}{\varepsilon}+2 \right) t^{\frac{1}{3}} \right). \quad (3.167)$$

Örnek 3.1.10. $D^2u(t)+3Du(t)+u(t-\varepsilon)=0$ küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denklemini ele alalım.

$$u(t-\varepsilon) \approx u(t) - \varepsilon Du(t) + O(\varepsilon^2) \quad (3.168)$$

Taylor serisi açılımını denklemde yazıp ifadeyi düzenlediğimizde,

$$D^2u(t) + (3-\varepsilon)Du(t) + u(t) = 0 \quad (3.169)$$

şeklinde olur. Elde edilen denklemin karakteristik denklemi ise,

$$r^2 + (3-\varepsilon)r + 1 = 0 \quad (3.170)$$

şeklindedir. Karakteristik Denklem (3.170)'in çözümü için regüler pertürbasyon yöntemi kullanılır. Bu, çözümü Denklem (3.7) formunda arayacağımız anlamına gelir. Denklem (3.7)'yi Karakteristik Denklem (3.170)'de yerine yazarsak,

$$r_0^2 + 2r_0\varepsilon r_1 + 3r_0 + 3\varepsilon r_1 - \varepsilon r_0 + 1 + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (3.171)$$

ifadesini elde ederiz. Denklem (3.171)'in sol tarafındaki ε 'ların kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyelim;

$$\varepsilon^0 : r_0^2 + 3r_0 + 1 = 0 \quad (3.172)$$

$$\varepsilon^1 : 2r_0r_1+3r_1-r_0=0 \Rightarrow r_1=\frac{r_0}{2r_0+3} \quad (3.173)$$

Bu durumda, Denklem (3.172)'nin çözümünden,

$$r_0^+=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, r_0^-=\frac{-3-\sqrt{5}}{2} \quad (3.174)$$

çözümlerini, Denklem (3.173)'ün çözümünden ise,

$$r_1^+=\frac{-3\sqrt{5}+5}{10}, r_1^-=\frac{3\sqrt{5}+5}{10} \quad (3.175)$$

çözümlerini elde ederiz.

Böylece, Karakteristik Denklem (3.170)'in yaklaşık çözümleri,

$$r^+(\varepsilon)=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}+\varepsilon\left(\frac{-3\sqrt{5}+5}{10}\right)+O(\varepsilon^2) \quad (3.176)$$

$$r^-(\varepsilon)=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}+\varepsilon\left(\frac{3\sqrt{5}+5}{10}\right)+O(\varepsilon^2) \quad (3.177)$$

olarak elde edilir. Böylece, küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki formda elde edilir;

$$u(t;\varepsilon)=\alpha_1 E_{1,1}\left(\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}+\varepsilon\left(\frac{-3\sqrt{5}+5}{10}\right)\right)t\right)+\alpha_2 E_{1,1}\left(\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}+\varepsilon\left(\frac{3\sqrt{5}+5}{10}\right)\right)t\right). \quad (3.178)$$

Örnek 3.1.11. $D^2u(t)+2u(t)+u(t-\varepsilon)=0$ küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denklemini ele alalım.

$$u(t-\varepsilon)\approx u(t)-\varepsilon Du(t)+O(\varepsilon^2) \quad (3.179)$$

Taylor serisi açılımını denklemde yazıp ifadeyi düzenlediğimizde,

$$D^2u(t)-\varepsilon Du(t)+3u(t)=0 \quad (3.180)$$

şeklinde olur. Elde edilen denklemin karakteristik denklemi ise,

$$r^2-\varepsilon r+3=0 \quad (3.181)$$

şeklinde. Karakteristik Denklem (3.181)'in çözümü için regüler pertürbasyon yöntemi kullanılır. Bu, çözümü Denklem (3.7) formunda arayacağımız anlamına gelir. Denklem (3.7)'yi Karakteristik Denklem (3.181)'de yerine yazarsak,

$$r_0^2 + 2r_0\epsilon r_1 - \epsilon r_0 + 3 + O(\epsilon^2) = 0 \quad (3.182)$$

ifadesini elde ederiz. Denklem (3.182)'nin sol tarafındaki ϵ 'ların kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyelim;

$$\epsilon^0 : r_0^2 + 3 = 0 \quad (3.183)$$

$$\epsilon^1 : 2r_0r_1 - r_0 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{r_0}{2r_0} \quad (3.184)$$

Bu durumda, Denklem (3.183)'ün çözümünden,

$$r_0^+ = \sqrt{3}i, r_0^- = -\sqrt{3}i \quad (3.185)$$

çözümlerini, Denklem (3.184)'ün çözümünden ise,

$$r_1^+ = \frac{1}{2}, r_1^- = \frac{1}{2} \quad (3.186)$$

çözümlerini elde ederiz.

Böylece, Karakteristik Denklem (3.181)'in yaklaşık çözümleri,

$$r^+(\epsilon) = \sqrt{3}i + \epsilon \frac{1}{2} + O(\epsilon^2) \quad (3.187)$$

$$r^-(\epsilon) = -\sqrt{3}i + \epsilon \frac{1}{2} + O(\epsilon^2) \quad (3.188)$$

olarak elde edilir. Böylece, küçük gecikme içeren lineer kesirli diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki formda elde edilir;

$$u(t; \epsilon) = \alpha_1 E_{1,1} \left(\left(\sqrt{3}i + \epsilon \frac{1}{2} \right) t \right) + \alpha_2 E_{1,1} \left(\left(-\sqrt{3}i + \epsilon \frac{1}{2} \right) t \right). \quad (3.189)$$

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Kesirli diferansiyel denklemlerin analitik çözümünü elde etmek için kesin bir method yoktur. Buna ek olarak gecikme terimi içeren kesirli diferansiyel denklemlerin analitik çözümünü bulmak çok daha karmaşıktır. Küçük gecikme terimi içeren kesirli lineer sabit katsayılı diferansiyel denklemlerin analitik veya yaklaşık çözümü Mittag-Leffler fonksiyonu ve pertürbasyon teorisi kullanılarak özel koşullar altında elde edilebildiğini bu tez çalışmasında örnekler vererek gösterdik. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar gecikme terimi içeren kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin analitik veya yaklaşık çözümünün elde edilmesinde önemli bir rol oynayacağı kaçınılmazdır. Yani bu çalışmada elde edilen çalışmalar daha karmaşık problemlerin analitik ya da yaklaşık çözümlerinin bulunmasında yol gösterici olacaktır.

KAYNAKLAR

Atangana A., Baleanu D., New Fractional Derivatives with Non-local and Non-singular Kernel, Theory and Application to Heat Transfer Model, *Thermal Science*, 2016, **20**, 763-769.

Atangana A., Koca İ., New Direction in Fractional Differentiation, *Mathematics in Nature Science*, 2017, **1**, 18-25.

Barcellos A., Stein K. S., *Calculus ve Analitik Geometri*, 2. basım, McGraw-Hill Book Company, New York, 1997.

Bayın S. Ş., *Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler*, Genişletilmiş ikinci baskı, Ders Kitapları Anonim Şirketi, Ankara, 2004.

Bayrak A., Demir A., A New Approach for Space-Time Fractional Partial Differential Equations by Residual Power Series Method, *Applied Mathematics and Computation*, 2018, **336**, 215-230.

Demir A., Erman S., Özgür B., Korkmaz E., Analysis of Fractional Partial Differential Equations by Taylor Series Expansion, Boundary Value Problems, *SpringerOpen Journal*, 2013, **68**,1-12.

Demir A., Kanca F., Özbilge E., Numerical Solution and Distinguishability In Time Fractional Parabolic Equation, Boundary Value Problems, *SpringerOpen Journal*, 2015, **142**,1-12.

Demir A., Özbilge E., Analysis of the Inverse Problem in a Time Fractional Parabolic Equation With Mixed Boundary Conditions, Boundary Value Problem, *SpringerOpen Journal*, 2014, **134**,1-9.

Demirtaş A., Doğrusal Olmayan Denklemlerin Varyasyonel İterasyon, Homotopi Pertürbasyon ve Varyasyonel Homotopi Pertürbasyon Yöntemleri İle Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2014, 356016.

Ghash U., Sarkar S., Das S., Solution of Linear Fractional Differential Equations with Modified Derivative of Jumaric Type, *American Journal of Mathematical Analysis*, 2015, **3**(3),72-84, DOI:10.12691/ajma-3-3-3.

Huang F., Liu F., The Time Fractional Diffusion Equation and Fractional Advection Dispersion Equation, *Anziam Journal*, 2005, **46**, 1-14.

Iddrisu M. M., Tetteh K. I., The Gamma Function and Its Analytical Applications, *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*, DOI:10.9734/JAMCS/2017/34779.

Jordan D. W., Smith P., Nonlinear Ordinary Differential Equations, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, DOI:10.1002/zamm.1988/0680118.

Karcı A., Kesirli Dereceli Türevin Yeni Yaklaşımının Özellikleri, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, **30**(3), 487-501, 2015.

Kilbas A. A., Saigo M., Trujillo J. J., On the Generalized Wright Fuction, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2002, **5**(4), 437-460.

Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006.

Kisela T., Fractional Differential Equations and Their Applications, Diploma Thesis, BRNO University of Tecnology, Institute of Mathematics, BRNO, 2008.

Mann J. E., Simmonds J. G., *A First Look at Perturbation Theory*, 2nd ed., Dover Publications Inc., New York, 1998.

Murray J. D., *Asymptotic Analysis, Applied Mathematical Sciences*, Vol. 48, Springer-Verlay, 1984.

Nayfeh A., *Introduction to Perturbation Techniques*, Wiley, 1981.

Podlubny I., *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, 1999.

Sambandham B., Vatsala A. S., Basic Results for Sequential Caputo Fractional Differential Equations, *Mathematics*, DOI:10.3390/math3010076

Sayevand K., Fractional Dynamical Systems: A Fresh View On The Local Qualitative Theorems, *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, DOI:10.22075/ijnaa.2016.505

Vance D., *Fractional Derivatives and Fractional Mechanics*, USA, 2014.

https://cims.nyu.edu/~eve2/reg_pert.pdf, (Ziyaret tarihi: 21 Eylül 2018)

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

Demir A., **Karapınar K.**, On the Solution of Linear Fractional Differential Equations of Order $2q$, Including Small Delay where $0 < q < 1$, *International Conference on Mathematics*, İstanbul, Türkiye, 3-6 Temmuz, 2018.



ÖZGEÇMİŞ

1993 yılında Bakırköy/İstanbul’da doğdu. İlköğretim ve lise eğitimini İstanbul’da tamamladı. 2011 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2016 yılında bölüm ikincisi olarak mezun oldu. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Programında öğrenimine başladı.

