KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

HİPERBOLİK TERS PROBLEMLER İÇİN KATSAYI ANALİZLERİ

AKBALA YERNAZAR

KOCAELİ 2026

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

HİPERBOLİK TERS PROBLEMLER İÇİN KATSAYI ANALİZLERİ

AKBALA YERNAZAR

Prof.Dr. İrem BAĞLAN		
Danışman,	**Kocaeli Üniv.**	**.....**
Doç.Dr. Mine Aylin BAYRAK		
Jüri Üyesi,	**Kocaeli Üniv.**	**.....**
Prof.Dr. Timur CANEL		
Jüri Üyesi,	**Kocaeli Üniv.**	**.....**
Prof.Dr. Günay ÖZTÜRK		
Jüri Üyesi,	**İzmir Demokrasi Üniv.**	**.....**
Dr. Öğr. Üyesi Vildan YAZICI		
Jüri Üyesi,	**Kocaeli Sağlık ve Teknoloji Üniv.**	**.....**

Tezin Savunulduğu Tarih: 22.01.2026

ETİK BEYAN VE ARAŞTIRMA FONU DESTEĞİ

Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez/proje çalışmasında,

- Bu tezin/projenin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu,
- Çalışmanın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı,
- Bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi,
- Bu çalışmanın Kocaeli Üniversitesi'nin abone olduğu intihal yazılımı programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun olduğunu,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Tezin/Projenin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez/proje çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

☒ Bu tez/proje çalışmasının herhangi bir aşaması hiçbir kurum/kuruluş tarafından maddi/alt yapı desteği ile desteklenmemiştir.

☐ Bu tez/proje çalışması kapsamında üretilen veri ve bilgiler ..... tarafından ..... no'lu proje kapsamında maddi/alt yapı desteği alınarak gerçekleştirilmiştir.

Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

.....
(İmza)

Akbala YERNAZAR

YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI

Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/projemin tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda belirtilen koşullarla kullanıma açma izninin Kocaeli Üniversitesi'ne verdiğimi beyan ederim. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin/projemin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanımı bana ait olacaktır.
Tezin/projenin kendi özgün çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin/projenin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.
Yükseköğretim kurulu tarafından yayınlanan ***"Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge"*** kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricinde YÖK Ulusal Tez Merkezi/ Kocaeli Üniversitesi Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

☐ Enstitü yönetim kurulu kararı ile tezimin/projemin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 2 yıl ertelenmiştir.
☐ Enstitü yönetim kurulu gerekçeli kararı ile tezimin/projemin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 6 ay ertelenmiştir.
☒ Tezim/projem ile ilgili gizlilik kararı verilmemiştir.

.....
(İmza)

Akbala YERNAZAR

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu çalışmada, lineer olmayan iki hiperbolik ve iki pseudo-hiperbolik olmak üzere toplam dört ters katsayılı problem, periyodik sınır koşulları altında incelenmiştir. Ele alınan problemlerin iyi tanımlılığı, yani çözümlerinin varlığı, tekliği ve kararlılığı araştırılmıştır. Çalışmada ayrıca ele alınan ters katsayılı problemler için sayısal çözümler elde edilmiş ve bu çözümler analitik sonuçlarla karşılaştırılarak değerlendirilmiştir.

Bu çalışmada, sahip olduğu bilgi ve tecrübeleriyle yolumu aydınlatan, her aşamasında emeği geçen değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. İrem BAĞLAN'a ve çalışmanın sayısal çözümlemeler ve simülasyon aşamalarında yadsınamaz yardımlarıyla yön veren sayın Doç. Dr. Erman ASLAN'a tüm samimiyetim ve saygılarım ile teşekkürü borç bilirim.

Ocak – 2026 Akbala YERNAZAR

İÇİNDEKİLER

ETİK BEYAN VE ARAŞTIRMA FONU DESTEĞİ i
YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER iv
ŞEKİLLER DİZİNİ vi
TABLOLAR DİZİNİ vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ viii
ÖZET ix
ABSTRACT x
1. GİRİŞ 1
2. GENEL BİLGİLER 4
2.1. Temel Tanımlar ve Eşitsizlikler 4
2.2. Yöntemler 6
3. TERS KATSAYILI HİPERBOLİK PROBLEMİN İNCELENMESİ 9
3.1. Çözümün Bulunması 9
3.2. Çözümün Varlığı 11
3.3. Ardışık Yaklaşımların Yakınsaklığı 20
3.4. Kesin Çözüm ile Ardışık Çözümün Farkın Değerlendirilmesi 28
3.5. Çözümün Tekliği 32
3.6. Çözümün Kararlılığı 35
3.7. Doğrusal Olmayan Problem için Sayısal Çözüm 44
4. TERS KATSAYILI PSEUDO-HİPERBOLİK PROBLEMİN İNCELENMESİ 51
4.1. Çözümün Bulunması 51
4.2. Çözümün Varlığı 53
4.3. Ardışık Yaklaşımların Yakınsaklığı 62
4.4. Kesin Çözüm ile Ardışık Çözümün Farkın Değerlendirilmesi 70
4.5. Çözümün Tekliği 75
4.6. Çözümün Kararlılığı 78
4.7. Doğrusal Olmayan Problem için Sayısal Çözüm 90
5. HİPERBOLİK VE PSEUDO-HİPERBOLİK PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİ 96
5.1. Analitik Çözümün İncelenmesi 96
5.2. Sayısal Çözümün İncelenmesi 105
6. TERS KATSAYILI HİPERBOLİK PROBLEMİN İNCELENMESİ 111
6.1. Çözümün Bulunması 111
6.2. Çözümün Varlığı 112
6.3. Ardışık Yaklaşımların Yakınsaklığı 116
6.4. Kesin Çözüm ile Ardışık Çözümün Farkın Değerlendirilmesi 122
6.5. Çözümün Tekliği 125
6.6. Çözümün Kararlılığı 127
6.7. Doğrusal Olmayan Problem için Sayısal Çözüm 133
7. TERS KATSAYILI PSEUDO-HİPERBOLİK PROBLEMİN İNCELENMESİ 138
7.1. Çözümün Bulunması 138
7.2. Çözümün Varlığı 139

7.3.Ardışık Yaklaşımların Yakınsaklığı 144
7.4.Kesin Çözüm ile Ardışık Çözümün Farkın Değerlendirilmesi 150
7.5.Çözümün Tekliği 152
7.6.Çözümün Kararlılığı 154
7.7.Doğrusal Olmayan Problem için Sayısal Çözüm 159
8. HİPERBOLİK VE PSEUDO-HİPERBOLİK PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN ARASINDAKİ BAĞLANTI 168
8.1.Analitik Çözümün İncelenmesi 168
8.2.Sayısal Çözümün İncelenmesi 175
9. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 179
KAYNAKLAR 180
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER 183
ÖZGEÇMİŞ 185

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Ters katsayının 0 s'den 1 s'ye kadar kesin ve sayısal çözümleri 48
Şekil 3.2. (a) $t = 0,25\,s$; (b) $t = 0,5\,s$; (c) $t = 0,75\,s$ ve (d) $t = 1\,s$ durumları için kesin ve sayısal v çözümleri 49
Şekil 3.3. (a) Kesin çözüm, (b) kapalı ve (c) Crank–Nicolson şeması için v çözümleri 50
Şekil 4.1. (a) Ters katsayının, (b) mutlak hatanın ve (c) bağıl hatanın zamana bağlı değişimi 94
Şekil 4.2. (a) Kesin çözüm, (b) Denklem (4.39) ve (c) Denklem (4.40) için v değerinin zamana bağlı değişimi 94
Şekil 4.3. (a) Denklem (4.39) ve (b) Denklem (4.40) için mutlak hata 95
Şekil 4.4. (a) Denklem (4.39) ve (b) Denklem (4.40) için bağıl hata 95
Şekil 5.1. Tüm ε değerleri için ters katsayının sayısal tahminleri 108
Şekil 5.2. Tüm ε değerleri için ω sayısal çözüm değerleri: (a) $t = 0,5\,s$ ve (b) $t = 1\,s$ 108
Şekil 5.3. Tüm zamanlar ve (a) $\varepsilon = 0$; (b) $\varepsilon = 0,5$; (c) $\varepsilon = 1$; (d) $\varepsilon = 1,5$; (e) $\varepsilon = 2$; (f) $\varepsilon = 2,5$ ve (g) $\varepsilon = 3$ değerleri için ω sayısal çözüm tahminleri 109
Şekil 6.1. (a) Ters katsayının, (b) mutlak hatanın ve (c) bağıl hatanın zamana bağlı değişimi 135
Şekil 6.2. (a) Kesin çözüm ve (b) sayısal çözüm için υ değerinin zamana bağlı değişimi 136
Şekil 6.3. (a) Mutlak hatanın ve (b) bağıl hatanın zamana bağlı değişimi 136
Şekil 7.1. $\varepsilon = 3$ için (a) ters katsayının, (b) mutlak hatanın ve (c) bağıl hatanın zamana bağlı değişimi 162
Şekil 7.2. $\varepsilon = 0$ için v değerinin zamana bağlı değişimi: (a) kesin çözüm, (b) Denklem (7.32) ve (c) Denklem (7.33) sayısal çözümleri 163
Şekil 7.3. $\varepsilon = 0$ için (a) Denklem (7.32) ve (b) Denklem (7.33) mutlak hatasının zamana bağlı değişimi 163
Şekil 7.4. $\varepsilon = 0$ için (a) Denklem (7.32) ve (b) Denklem (7.33) bağıl hatasının zamana bağlı değişimi 164
Şekil 7.5. $\varepsilon = 3$ için v değerinin zamana bağlı değişimi: (a) kesin çözüm, (b) Denklem (7.32) ve (c) Denklem (7.33) sayısal çözümleri 164
Şekil 7.6. $\varepsilon = 3$ için (a) Denklem (7.32) ve (b) Denklem (7.33) mutlak hatasının zamana bağlı değişimi: 165
Şekil 7.7. $\varepsilon = 3$ için (a) Denklem (7.32) ve (b) Denklem (7.33) bağıl hatasının zamana bağlı değişimi 165
Şekil 7.8. ε değerinin ters katsayı üzerindeki etkisi (Denklem 7.33) 166
Şekil 7.9. ε değerinin v çözümü üzerindeki etkisi: (a) $t = 0,5\,s$ ve (b) $t = 1\,s$ (Denklem 7.33) 166
Şekil 7.10. ε değerinin v çözümü üzerindeki etkisi: (a) $\varepsilon = 0$; (b) $\varepsilon = 0,5$; (c) $\varepsilon = 1$; (d) $\varepsilon = 1,5$; (e) $\varepsilon = 2$; (f) $\varepsilon = 2,5$ ve (g) $\varepsilon = 3$ 167
Şekil 8.1. ε değerinin ters katsayı üzerindeki etkisi 177
Şekil 8.2. ε değerinin v çözümü üzerindeki etkisi: (a) $\varepsilon = 0$; (b) $\varepsilon = 0,5$; (c) $\varepsilon = 1$; (d) $\varepsilon = 1,5$; (e) $\varepsilon = 2$; (f) $\varepsilon = 2,5$ ve (g) $\varepsilon = 3$ 178

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo 3.1. Her iki şema için r ters katsayısının kesin çözümü, mutlak ve bağıl hatası 48
Tablo 3.2. Belirli zamanlarda v çözümün mutlak ve bağıl hatası 50

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$C^n[a,b]$	:$[a,b]$'de n.mertebeye kadar türevleri sürekli olan fonksiyonlar kümesi
ϑ	:Başlangıç koşulu
$\upsilon(\lambda,\psi)$	:Çözüm fonksiyonu
$\nu(\lambda,\psi)$	:Çözüm fonksiyonu
$\Gamma(\psi)$	:Ek koşul
V_i	:Lineer denklem sisteminin sağ taraf vektörü
ε	:Denklem parametresi
$\Delta x, \Delta z$	:Uzay ve zaman adım büyüklüğü
Δt	:Zaman adım büyüklüğü
ϖ	:Başlangıç koşulu
Υ	:Çekirdek fonksiyon
$\hbar$	:Kaynak fonksiyonu
Θ	:Problemin giriş verileri kümesi

HİPERBOLİK TERS PROBLEMLER İÇİN KATSAYI ANALİZLERİ

ÖZET

Bu çalışmada, zamana bağlı ters katsayılı doğrusal olmayan hiperbolik ve pseudo-hiperbolik denklemler ele alınmıştır. Ters problemlerin analitik çözümleri, başlangıç koşullarıyla birlikte periyodik sınır koşulları altında Fourier yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Ters katsayının belirlenmesi için ek koşul getirilmiş ve bu koşul kullanılarak ters katsayı bulunmuştur. Çözümlerin varlığı, tekliği, yakınsaklığı ve kararlılığı Picard ardışık yaklaşıklık yöntemiyle ispatlanmıştır. Ayrıca, sayısal çözümü için sonlu farklar yöntemi kullanılmıştır. Son olarak, hiperbolik ve pseudo-hiperbolik problemler arasındaki bağlantılar incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fourier Yöntemi, Hiperbolik Denklem, Periyodik Sınır Koşulu, Sonlu Farklar Yöntemi, Ters Problem.

COEFFICIENT ANALYSIS FOR HYPERBOLIC INVERSE PROBLEMS

ABSTRACT

In this study, nonlinear hyperbolic and pseudo-hyperbolic equations with time-dependent inverse coefficients are considered. The analytical solutions of the inverse problems are obtained using the Fourier method under periodic boundary conditions together with the initial conditions. The inverse coefficient is identified using an over-determination condition. Using the Picard successive approximation method, the existence, uniqueness, convergence, and stability of the obtained solutions are proved. Furthermore, the finite difference method is employed to obtain numerical solutions. Finally, the relationships between hyperbolic and pseudo-hyperbolic problems are investigated.

Keywords: Fourier Method, Hyperbolic Equation, Periodic Boundary Condition, Finite Difference Method, Inverse Problem.

1.GİRİŞ

Dalga denklemi, titreşim ve yayılma olaylarını açıklayan temel matematiksel modellerden biridir. Tel, zar, akustik dalgalar veya elektromanyetik dalgalar gibi birçok fiziksel olayın modellemesinde ortaya çıkan bu denklem, ortamda enerjinin ve bilginin nasıl yayıldığını açıklar. En basit haliyle, doğrusal, homojen bir ortamda dalga denklemi Denklem (1.1) ile gösterilmiştir:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}. \tag{1.1}$$

Bu denklem, ortamın her noktasındaki titreşimin zamanla nasıl değiştiğini ve dalganın sabit bir hızla yayıldığını gösterir. Ancak gerçekte dalgalar, ortamın özelliklerine, dış etkilere veya enerjinin zamanla dağılmasına bağlı olarak daha karmaşık davranışlar sergileyebilir. Bu durumlarda dalga denklemi, farklı katsayılar, kaynak terimleri veya doğrusal olmayan etkiler eklenerek genişletilebilir (Strauss, 2007; Tikhonov ve Samarskii, 1963).

Denklem (1.1), uygun başlangıç ve sınır koşulları çerçevesindeki çözümü genelde fiziksel problemlerin özelliklerini yeteri kadar iyi ifade etmemektedir. Çünkü, örneğin akustikte bu denklemin ısı iletimi ve akışkanlığı dikkate alındığı takdirde lineer olmayan denklemler olmaktadır. Eğer fiziksel aksiyon yeteri kadar küçük değilse (örneğin, darbe dalgalarında, süpersonik akışlarda, sesten hızlı uçakların hareketi gibi olaylarda) lineer denklemler bu olayları modellemeye imkân vermemektedir. Ayrıca lineer teori ile ısı ve akışkanlığın etkisini içermek mümkün değildir. Bu sorulara cevap vermek için lineer olmayan dalga denklemlerinin çözümünün bulunması zorunludur (Whitham, 1974; Logan, 2008; Rasulov, 2011).

XX. yüzyılın ilk yarısında ters problem ve iyi tanımlı olmayan problem ile ilgili yayınlar çıktı. Bunlar, fizik (örneğin, kuantum saçılma teorisindeki ters problemler), jeofizik (elektrik araştırması, sismik, potansiyel teorisinin ters problemleri), astronomi ve doğa bilimlerinin diğer alanlarıyla ilgiliydi (Isakov, 2006). Matematiksel fiziğin uygulamalı problemlerinde araştırmacılar, çeşitli fiziksel olguları (açık biçimde veya yaklaşık olarak) tanımlayan fonksiyonları bulmaya çalışırlar – örneğin sesin, ısının, sismik titreşimlerin, elektromanyetik dalgaların yayılması gibi. Bu sırada araştırılan ortamın özellikleri

(denklemlerin katsayıları) ve sürecin başlangıç durumu (kararsız durumda) ya da sınır özellikleri (sınırlı bir bölgede veya kararlı durumda) genellikle biliniyor kabul edilir. Ancak, çoğu zaman ortamın özellikleri bilinmez. İşte bu durumda ters problemler ortaya çıkar: yani, doğrudan problemin çözümüne ilişkin bilgilere dayanarak denklemlerin katsayılarını belirlemek gerekir. Bu problemler çoğunlukla "iyi tanımlı olmayan" niteliktedir, yani küçük ölçüm hatalarına karşı duyarlıdır ve bu hatalar çözümler üzerinde büyük sapmalara yol açabilir (Tikhonov ve Arsenin, 1977; Kabanikhin, 2009; Samarskii ve Vabishchevich, 2000). Bununla birlikte, söz konusu bilinmeyen katsayılar genellikle incelenen ortamın yoğunluk, elektriksel iletkenlik, ısıl iletkenlik gibi temel fiziksel karakteristiklerini temsil eder. Ters problemlerin çözümü yalnızca bu parametrelerin belirlenmesine değil, aynı zamanda çeşitli nesnelerin konumlarının, şekillerinin ve yapısal özelliklerinin (örneğin ısı kaynaklarının, titreşimlerin, gerilimlerin veya kirlenme bölgelerinin) tespitine de katkı sağlar. Bu nedenle, ters ve iyi tanımlı olmayan problemler; fizik, jeofizik, tıp, astronomi gibi alanlarda ve genel olarak matematiksel yöntemlerin uygulanabildiği tüm bilgi dallarında araştırmanın temel konusu haline gelmiştir. Bu bağlamda, diferansiyel denklemler alanında "iyi tanımlılık" kavramını ortaya koyan J. Hadamard, bu kavramı çözümün varlığı, tekliği ve verilerin sürekliliği koşullarıyla tanımlamıştır (Hadamard, 1902).

Bu tezde, ters katsayılı hiperbolik problemler ele alınmakta olup, literatürde hiperbolik problemlerde bilinmeyen katsayıların belirlenmesine yönelik çeşitli çalışmalar bulunmaktadır (Bakushinsky ve Leonov, 2018; Boumenir ve Tuan, 2011; Huntul, 2021; Huntul ve diğ., 2021; Hussein ve Lesnic, 2015; Tekin, 2019).

Sınır değer problemleri, genel olarak iki gruba ayrılır: lokal sınır koşullu ve lokal olmayan sınır koşullu problemler. Periyodik sınır koşulu, lokal olmayan bir sınır koşulunun bir örneğidir. Bu koşullar, döngüsel olarak tekrarlanan durumların modellenmesinde kullanılır (Hill, 1886). Bu nedenle, ters problemlerin periyodik sınır koşulları altında incelenmesi, çözümün bu tür koşullar altında nasıl davranış sergilediği, teorik ve pratik açıdan çok önemlidir. Periodik sınır koşullarına sahip problemlerin çözümünde Fourier yöntemi oldukça etkin bir araçtır. Fourier serileri, periyodik fonksiyonları temel sinüs ve kosinüs bileşenleri cinsinden ifade etmeye olanak tanır (Courant ve Hilbert, 1989; Brown ve Churchill, 1993; Stein ve Shakarchi, 2003).

1. Bölümde giriş olarak; dalga denkleminin teorik temelleri, lineer olmayan modellerin gerekliliği ve ters problemlerin matematiksel fizikteki yeri üzerine genel bilgiler verilmiştir.

2. Bölümde fonksiyon serileri, eşitsizlikler, ortogonal fonksiyonlar, Fourier yöntemi ve sonlu farklar yöntemi verilmiştir.

3. Bölümde periyodik sınır koşullu ters katsayılı lineer olmayan hiperbolik problemin analitik çözümü, ters katsayının belirlenmesi, çözümün varlığı, tekliği, kararlılığı ve sayısal çözümü verilmiştir.

4. Bölümde periyodik sınır koşullu ters katsayılı lineer olmayan pseudo-hiperbolik problemin analitik çözümü, ters katsayının belirlenmesi, çözümün varlığı, tekliği, kararlılığı ve sayısal çözümü verilmiştir.

5. Bölümde periyodik sınır koşullu ters katsayılı lineer olmayan hiperbolik ve pseudo-hiperbolik problemlerin arasındaki bağlantı gösterilmiştir.

6. Bölümde periyodik sınır koşullu ters katsayılı lineer olmayan hiperbolik problemin analitik çözümü, ters katsayının belirlenmesi, çözümün varlığı, tekliği, kararlılığı ve sayısal çözümü verilmiştir.

7. Bölümde periyodik sınır koşullu ters katsayılı lineer olmayan pseudo-hiperbolik problemin analitik çözümü, ters katsayının belirlenmesi, çözümün varlığı, tekliği, kararlılığı ve sayısal çözümü verilmiştir.

8. Bölümde periyodik sınır koşullu ters katsayılı lineer olmayan hiperbolik ve pseudo-hiperbolik problemlerin arasındaki bağlantı gösterilmiştir.

2.GENEL BİLGİLER

2.1.Temel Tanımlar ve Eşitsizlikler

Tanım 2.1. (Cauchy Eşitsizliği)

ϕ ve ψ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında karesiyle integrallenebilir ise,

$$\left|\int_a^b \phi(x)\psi(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |\phi(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |\psi(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic ve diğ., 2012; Halilov ve diğ., 1999).

Tanım 2.2. (Bessel eşitsizliği)

Eğer φ_k bir ortonormal sistem ise, yani $\left\langle \varphi_i, \varphi_j \right\rangle = \delta_{ij}$,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

o halde $f \in L^2[a,b]$ fonksiyonu için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\langle f, \varphi_k \rangle\right|^2 \le \|f\|_2^2$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic ve diğ., 2012).

Tanım 2.3. (Hölder eşitsizliği)

$\varsigma > 1$ ve $\lambda > 1$ olmak üzere $\frac{1}{\varsigma} + \frac{1}{\lambda} = 1$ koşulunu sağlayan eşlenik üstler olsun.

Eğer $\{u_k\} \in l^{\varsigma}$ ve $\{v_k\} \in l^{\lambda}$ ise, Hölder Eşitsizliği şu şekilde ifade edilir (Mitrinovic ve diğ., 2012):

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} u_k^a\right)^{\frac{1}{a}} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^b\right)^{\frac{1}{b}}.$$

Tanım 2.4. (Lipschitz eşitsizliği)

$h(t,y)$ fonksiyonu, $D \subset \mathbb{R}^2$ kümesi üzerinde y değişkeninde Lipschitz koşulunu sağlar; eğer $L > 0$ olmak üzere bir sabit mevcut olup

$$\left|h(t,y_1) - h(t,y_2)\right| \le L\left|y_1 - y_2\right|$$

eşitsizliği, (t,y_1) ve (t,y_2) noktaları D içinde olduğu sürece sağlanıyorsa. Bu durumda L, fonksiyonun Lipschitz sabiti olarak adlandırılır (Hasanoğlu, 2011).

Tanım 2.5. (Gronwall eşitsizliği)

$[0,T]$ aralığında $\phi(t)$ negatif olmayan sürekli bir fonksiyon; $\lambda(t)$ ve $\mu(t)$ negatif olmayan integrallenebilir fonksiyonlar; $\sigma(t)$ sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer her $t \in [0,T]$ için

$$\phi(t) \le \int_0^t \left(\lambda(\tau)\phi(\tau) + \mu(\tau)\right) d\tau + \sigma(t)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman

$$\max_{0\le t\le T} \phi(t) \le \left(\int_0^t \mu(\tau) d\tau + \sup\left|\sigma(t)\right| \right) \mathrm{e}^{\int_0^t \lambda(\tau) d\tau}$$

Gronwall eşitsizliği geçerlidir (Dragomir, 2003; Pachpatte, 1998).

Tanım 2.6. (Banach uzayı)

Bir normlu lineer uzaydaki her Cauchy dizisi, yani $\lim_{n,m\to\infty} \left\| f_n - f_m \right\| = 0$ koşulunu sağlayan her dizi, bu uzay içinde bir limite yakınsıyorsa, bu normlu uzaya Banach uzayı denir (Musayev ve Alp, 2000).

2.2.Yöntemler

Bu çalışmada ele alınan problemlerin analitik çözümleri için Fourier yöntemi, çözümlerin varlık, teklik, yakınsaklığı ve kararlılık analizi için Picard ardışık yaklaşımı yöntemi, sayısal çözümleri için ise sonlu farklar yöntemi kullanılmıştır.

Değişkenlerine ayırma yöntemi olarak da bilinen Fourier yöntemi, kısmi diferansiyel denklemlerin başlangıç ve sınır değer problemlerinin analitik çözümünde temel bir matematiksel tekniktir. Periyodu T olan bir periyodik $\phi(t)$ fonksiyonu,

$$\phi(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos(n\omega_0 t)+\beta_n\sin(n\omega_0 t)\right)$$

Fourier serisiyle ifade edilebilir. Burada Fourier katsayıları,

$$\alpha_0=\frac{1}{T}\int_0^T\phi(t)dt,\quad \alpha_n=\frac{2}{T}\int_0^T\phi(t)\cos(n\omega_0 t)dt \text{ ve } b_n=\frac{2}{T}\int_0^T\phi(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ fonksiyonun temel açısal frekansını ifade eder.

Teorem 2.1. (Dirichlet Teoremi)

Eğer $\phi(t)$ fonksiyonu $[-\pi,\pi]$ aralığında aşağıdaki koşulları sağlıyorsa:

a) $\phi(t)$ sürekli ya da parçalı sürekli;

b) $\phi'(t)$ türevi parçalı süreklidir.

O zaman $\phi(t)$ fonksiyonunun Fourier serisi,

$$S_N(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(\alpha_n\cos(n\omega_0 t)+\beta_n\sin(n\omega_0 t)\right)$$

her t noktasında

$$\lim_{N\to\infty}S_N(t)=\frac{\phi(t+0)+\phi(t-0)}{2}$$

limitine yakınsar (Courant ve Hilbert, 1989; Brown ve Churchill, 1993; Stein ve Shakarchi, 2003).

Diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek ve çözümlerin varlığını kanıtlamak amacıyla kullanılan Picard yöntemi, integral denklemlerine dayalı bir ardışık yaklaşım sürecidir.

$D \subset \mathbb{R}^2$ açık bir bölge, $h : D \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $(t_0, u_0) \in D$ olsun.

$$u' = h(t,u),\ u(t_0) = u_0$$

başlangıç değer problemi için $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyon dizisi

$u(t_0) = u_0$,

$$u_{n+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} h(\xi, u_n(\xi))d\xi, n = 0,1,2,...$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır. Eğer f fonksiyonu u değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlıyorsa, $\{u_n\}$ dizisi, diferansiyel denkleminin tek çözümü olan $u(x)$ fonksiyonuna yakınsar, yani $\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)$ şeklindedir (Güngör, 2025).

Sonlu fark yöntemi, diferansiyel denklemlerdeki türevleri sonlu fark yaklaşımları ile değiştirerek, diferansiyel denklemin yerine, bilgisayar aracılığıyla çözülebilecek büyük fakat sonlu sayıda cebirsel denklem sistemi elde etmeyi amaçlar. Bu tür cebirsel denklemlerde çözüm, çözüm bölgesindeki bazı komşu noktaların değerlerine bağlıdır. Bu nedenle, sonlu fark yönteminde çözüm süreci temelde üç aşamadan oluşur:

1. Diferansiyel denklemin tanımlı olduğu çözüm bölgesi, belirli aralıklarla seçilen düğüm noktalarından oluşan bir kafese (grid) bölünür.
2. Diferansiyel denklemdeki türev terimleri, uygun sonlu fark yaklaşımları kullanılarak cebirsel biçimde ifade edilir. Böylece her düğüm noktasında, bağımlı değişkenin komşu noktalarla ilişkisini tanımlayan fark denklemleri elde edilir.

3. Tanımlı koşullar denklemlere eklenir ve ortaya çıkan cebirsel denklem sistemi oluşturulur. Bu sistem, doğrudan veya yinelemeli sayısal yöntemler kullanılarak çözülür ve bağımlı değişkenin grid noktalarındaki yaklaşık değerleri elde edilir.

Sonlu farklar yönteminin teorik temelleri, çözüm bölgesinin grid yapısına bölünmesi ve türev yaklaşımlarının cebirsel denklemlere dönüştürülmesi süreçleri literatürde detaylıca ele alınmıştır (Smith, 1985; Strikwerda, 2004).

3.TERS KATSAYILI HİPERBOLİK PROBLEMİN İNCELENMESİ

3.1.Çözümün Bulunması

$\Psi > 0$ olmak üzere, $\Omega := \{0 < \lambda < \pi, 0 < \psi < \Psi\}$ bölgesinde tanımlı Denklem (3.1) ile verilen ters katsayılı hiperbolik denklem incelenmektedir:

$$\nu_{\psi\psi} - \nu_{\lambda\lambda} = r(\psi)\hbar(\lambda,\psi,\nu), \tag{3.1}$$

Denklem için başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} &\nu(\lambda,0) = \vartheta(\lambda), \\ &\partial_\psi \nu(\lambda,\psi) = \varpi(\lambda), \end{aligned} \tag{3.2}$$

periyodik sınır koşulları

$$\begin{aligned} &\nu(0,\psi) = \nu(\pi,\psi), \\ &\partial_\lambda \nu(0,\psi) = \partial_\lambda \nu(\pi,\psi), \end{aligned} \tag{3.3}$$

ve ek koşul

$$\Gamma(\psi) = \int_0^\pi \lambda \nu(\lambda,\psi) d\lambda \tag{3.4}$$

ile birlikte ele alınmaktadır. Burada ϑ, ϖ ve Γ fonksiyonları $[0,\pi]$ aralığında, $\hbar(\lambda,\psi,\nu)$ fonksiyonu $\bar{\Omega} \times \{-\infty,\infty\}$ üzerinde tanımlı verilen fonksiyonlardır.

Tanım 3.1. (3.1)-(3.4) denklemlerini sağlayan $\{r(\psi), \nu(\lambda,\psi)\}$ çiftinin bulunması problemine ters problem denir.

Tanım 3.2. $[0,\Psi]$ aralığında sürekli fonksiyonlardan oluşan küme

$$\nu(\psi) = \left\{ \left(\nu_0(\psi), \nu_{ck}(\psi), \nu_{sk}(\psi)\right)_{k=1}^{\infty} : \nu_0, \nu_{ck}, \nu_{sk} \in C[0,\Psi] \right\},$$

şeklinde tanımlansın. Bu kümede yer alan fonksiyonlar aşağıdaki koşulu sağlasın:

$$\max_{0\le\psi\le\Psi}\frac{|\nu_0(\psi)|}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\max_{0\le\psi\le\Psi}|\nu_{ck}(\psi)|+\max_{0\le\psi\le\Psi}|\nu_{sk}(\psi)|\right)<\infty.$$

Bu kümede

$$\|\nu(\psi)\|=\max_{0\le\psi\le\Psi}\frac{|u_0(\psi)|}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\max_{0\le\psi\le\Psi}|u_{ck}(\psi)|+\max_{0\le\psi\le\Psi}|u_{sk}(\psi)|\right)$$

normu tanımlandığında, bu norm altında tanımlanan B uzayı bir Banach uzayıdır (Baglan, 2015).

Problem (3.1)–(3.3)'ün çözümü Fourier yöntemiyle Denklem (3.5) şeklinde elde edilir:

$$\begin{aligned}\nu(\lambda,\psi)=&\frac{1}{2}\left(\vartheta_0+\varpi_0\psi+\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,u)r(\sigma)d\rho d\sigma\right)+\\&\sum_{k=1}^{\infty}\left(\vartheta_{ck}\cos 2k\psi+\frac{\varpi_{ck}}{2k}\sin 2k\psi\right)\cos 2k\lambda+\\&\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu)r(\sigma)d\rho d\sigma\right)\cos 2k\lambda+\\&\sum_{k=1}^{\infty}\left(\vartheta_{sk}\cos 2k\psi+\frac{\varpi_{sk}}{2k}\sin 2k\psi\right)\sin 2k\lambda+\\&\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu)r(\sigma)d\rho d\sigma\right)\sin 2k\lambda.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Burada,

$$\vartheta_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\vartheta(\lambda)d\lambda,\ \vartheta_{ck}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\vartheta(\lambda)\cos 2k\lambda d\lambda,\ \vartheta_{sk}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\vartheta(\lambda)\sin 2k\lambda d\lambda,$$

$$\varpi_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varpi(\lambda)d\lambda,\ \varpi_{ck}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varpi(\lambda)\cos 2k\lambda d\lambda,\ \varpi_{sk}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varpi(\lambda)\sin 2k\lambda d\lambda.$$

Denklem (3.1)'in her iki tarafı λ değişkeni ile çarpılarak $[0,\pi]$ aralığında integrali alınırsa,

$$\int_0^{\pi} v_{\psi\psi}\lambda d\lambda - \int_0^{\pi} v_{\lambda\lambda}\lambda d\lambda = r(\psi)\int_0^{\pi} \hbar(\lambda,\psi,v)\lambda d\lambda$$

elde edilir. Birinci integralin $\Gamma''(\psi)$ olduğu dikkate alındığında, ikinci integral için kısmi integrasyon uygulanır. Denklem (3.5) kullanılarak ters katsayı $r(\psi)$ Denklem (3.6) şeklinde elde edilir:

$$r(\psi) = \frac{\Gamma''(\psi) - \pi\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\left(\vartheta_{sk}\cos 2k\psi + \frac{\varpi_{sk}}{2k}\sin 2k\psi\right)}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,v)d\lambda} - \frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,v)r(\sigma)d\rho d\sigma}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,v)d\lambda}. \quad (3.6)$$

3.2.Çözümün Varlığı

Teorem 3.1.

K1. $\Gamma(\psi)\in C^2[0,\Psi]$, $r(\psi)\in C[0,\Psi]$,

K2. $\vartheta(\lambda)\in C^1[0,\pi]$, $\varpi(\lambda)\in C[0,\pi]$,

K3. $\hbar(\lambda,\psi,v)$ fonksiyonu $\Omega\times(-\infty,\infty)$'de her yerde sürekli olsun ve aşağıdaki koşulları sağlasın;

a) $\left|\frac{\partial^{(k)}\hbar(\lambda,\psi,v)}{\partial\lambda^{(k)}} - \frac{\partial^{(k)}\hbar(\lambda,\psi,\tilde{v})}{\partial\lambda^{(k)}}\right| \le \ell(\lambda,\psi)|v-\tilde{v}|$, $k=0,1,2.$

Burada, $\ell(\lambda,\psi)\in L_2(\Omega)$, $\ell(\lambda,\psi)\ge 0$.

b) $\hbar(\lambda,\psi,v)\in C[0,\pi]$, $\psi\in[0,\Psi]$, $|\hbar(\lambda,\psi,v)|\le M$.

c) $\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,v)d\lambda \ne 0$, $\forall\psi\in[0,\Psi]$.

K1-K3 koşulları sağlandığında, Denklem (3.1)–(3.4)'in çözümü var ve tektir.

İspat. Picard ardışık yaklaşım yöntemi kullanılarak, Denklem (3.5) ve (3.6) için ardışık yaklaşımlar aşağıdaki biçimde oluşturulur:

$$
\begin{aligned}
&\nu^{(N+1)}(\lambda,\psi)=\frac{1}{2}\left(\vartheta_0+\varpi_0\psi+\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,u^{(N)})r^{(N)}(\sigma)d\rho d\sigma\right)+\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\left(\vartheta_{ck}\cos 2k\psi+\frac{\varpi_{ck}}{2k}\sin 2k\psi\right)\cos 2k\lambda+\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,u^{(N)})r^{(N)}(\sigma)d\rho d\sigma\right)\cos 2k\lambda+\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\left(\vartheta_{sk}\cos 2k\psi+\frac{\varpi_{sk}}{2k}\sin 2k\psi\right)\sin 2k\lambda+\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,u^{(N)})r^{(N)}(\sigma)d\rho d\sigma\right)\sin 2k\lambda,
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

$$
\begin{aligned}
r(\psi)=&\frac{\Gamma''(\psi)-\pi\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\left(\cos(2k\psi)\vartheta_{sk}+\frac{\sin(2k\psi)}{2k}\varpi_{sk}\right)}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(N)})\lambda d\lambda}-\\
&\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})r^{(N)}(\sigma)d\rho d\sigma}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(N)})\lambda d\lambda}.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Burada

$$\nu_0^{(0)}(\psi)=\vartheta_0+\varpi_0\psi,$$

$$\nu_{ck}^{(0)}(\psi)=\cos(2k\psi)\vartheta_{ck}+\frac{\sin(2k\psi)}{2k}\varpi_{ck},$$

$$\nu_{sk}^{(0)}(\psi)=\cos(2k\psi)\vartheta_{sk}+\frac{\sin(2k\psi)}{2k}\varpi_{sk}.$$

Teorem gereği $\nu^{(0)}(\psi)\in \mathrm{B},\psi\in[0,\Psi]$ olduğu aşikardır.

$N=0$ için Denklem (3.7)'den,

$$\nu_0^{(1)}(\psi)=\vartheta_0+\varpi_0\psi+\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma,$$

$$\begin{aligned}\nu_{ck}^{(1)}(\psi)&=\sum_{k=1}^{\infty}\cos(2k\psi)\vartheta_{ck}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k\psi)}{2k}\varpi_{ck}+\\&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma,\end{aligned}\tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\nu_{sk}^{(1)}(\psi)&=\sum_{k=1}^{\infty}\cos(2k\psi)\vartheta_{sk}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k\psi)}{2k}\varpi_{sk}+\\&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\end{aligned}$$

elde edilir. Denklem (3.9) için $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma$ ifadesi eklenip çıkarılırsa ve mutlak değeri alınırsa,

$$\begin{aligned}\left|\nu_0^{(1)}(\psi)\right|&\le\left|\vartheta_0\right|+\left|\varpi_0\psi\right|+\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|+\\&\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\nu_{ck}^{(1)}(\psi)\right|&\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{ck}\right|+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\varpi_{ck}}{2k}\right|+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|+\\&\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\nu_{sk}^{(1)}(\psi)\right|&\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{sk}\right|+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\varpi_{sk}}{2k}\right|+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|+\\&\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|\end{aligned}$$

elde edilir. Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\nu_0^{(1)}(\psi)\right| \le \left|\vartheta_0\right| + \left|\varpi_0\psi\right| + \left(\int_0^{\psi}(\psi-\sigma)^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\left(\int_0^{\psi}(\psi-\sigma)^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{ck}^{(1)}(\psi)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{ck}\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\varpi_{ck}}{2k}\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\left(\int_0^{\psi} d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\left(\int_0^{\psi} d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{sk}^{(1)}(\psi)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{sk}\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\varpi_{sk}}{2k}\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\left(\int_0^{\psi} d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\left(\int_0^{\psi} d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. ν_{ck} ve ν_{sk} katsayıları için Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\nu_0^{(1)}(\psi)\right| \le \left|\vartheta_0\right| + \left|\varpi_0\psi\right| + 2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{ck}^{(1)}(\psi)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{ck}\right| + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varpi_{ck}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{sk}^{(1)}(\psi)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{sk}\right| + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varpi_{sk}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Burada,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Aynı şekilde, ν_{ck} ve ν_{sk} katsayıları için Bessel eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\nu_0^{(1)}(\psi)\right| \le \left|\vartheta_0\right| + \left|\varpi_0\psi\right| + 2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{ck}^{(1)}(\psi)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{ck}\right| + \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varpi_{ck}\right| + \pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{sk}^{(1)}(\psi)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{sk}\right| + \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varpi_{sk}\right| + \pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)}) - \hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Lipschitz koşulu uygulanırsa,

$$\left|\nu_{0}^{(1)}(\psi)\right| \le \left|\vartheta_{0}\right| + \left|\varpi_0\psi\right| + 2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{t}\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\ell(\rho,\sigma)\left|\nu^{(0)}(\sigma)\right|r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{ck}^{(1)}(\psi)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{ck}\right| + \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varpi_{ck}\right| + \pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\ell(\rho,\sigma)\left|\nu^{(0)}(\sigma)\right|r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{sk}^{(1)}(\psi)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{sk}\right| + \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varpi_{sk}\right| + \pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\ell(\rho,\sigma)\left|\nu^{(0)}(\sigma)\right|r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Elde edilen $\nu_0^{(1)}(\psi), \nu_{ck}^{(1)}(\psi)$ ve $\nu_{sk}^{(1)}(\psi)$ katsayılarına ilişkin olarak ayrı ayrı elde edilen eşitsizliklerin her tarafının ψ'ye göre maksimumu alınarak, başlangıçta tanımlanan

$$\left\|\nu^{(1)}(\psi)\right\| = \max_{0\le\psi\le\Psi}\frac{\left|\nu_0^{(1)}(\psi)\right|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\max_{0\le\psi\le\Psi}\left|\nu_{ck}^{(1)}(\psi)\right| + \max_{0\le\psi\le\Psi}\left|\nu_{sk}^{(1)}(\psi)\right|\right]$$

norm ifadesi altında bir arada yazılırsa,

$$\left\|\nu^{(1)}(\psi)\right\| \le \frac{\left\|\vartheta_0\right\| + \left\|\varpi_0\right\|\left|\Psi\right|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\vartheta_{ck}\right\| + \left\|\vartheta_{sk}\right\|\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\varpi_{ck}\right\| + \left\|\varpi_{sk}\right\|\right) +$$
$$\frac{\sqrt{3}\Psi\sqrt{\Psi}\left(\Psi+\sqrt{2}\pi\right)\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu^{(0)}(\psi)\right\|\left\|r^{(0)}(\psi)\right\|}{3} +$$
$$\frac{\sqrt{3}\Psi\sqrt{\Psi}\left(\Psi+\sqrt{2}\pi\right)\left\|\hbar(\lambda,\psi,0)\right\|\left\|r^{(0)}(\psi)\right\|}{3}$$

olur. Teorem 3.1'de verilen koşullar altında,

$$\left\|\nu^{(1)}(\psi)\right\| < \infty$$

olduğu görülmektedir.

Denklem (3.8) için $\vartheta_{sk} = \dfrac{\vartheta'_{ck}}{2k}$ olduğu dikkate alındığında,

$$r^{(N+1)}(\psi) = \frac{\Gamma''(\psi) - \pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(\vartheta'_{ck}\cos 2k\psi + \varpi_{sk}\sin 2k\psi\right)}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(N)})d\lambda} -$$
$$\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})r^{(N)}(\sigma)d\rho d\sigma}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(N)})d\lambda}. \tag{3.10}$$

olur. $N=0$ için Denklem (3.10),

$$r^{(1)}(\psi) = \frac{\Gamma''(\psi) - \pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(\vartheta'_{ck}\cos 2k\psi + \varpi_{sk}\sin 2k\psi\right)}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(0)})\lambda d\lambda} -$$
$$\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)(\sin 2k\rho)r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})d\rho d\sigma}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(0)})\lambda d\lambda}$$

olur. Son denklem için $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi} r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma$ ifadesi eklenip çıkarılırsa ve mutlak değeri alınırsa,

$$\left|r^{(1)}(\psi)\right| \le \frac{2}{\pi^2 M}\left|\Gamma''(\psi)\right| + \frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|\vartheta'_{ck}\right| + \left|\varpi_{sk}\right|\right) +$$
$$\frac{2}{\pi M}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)}) - \hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|\right) +$$
$$\frac{2}{\pi M}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma\right)$$

elde edilir. Burada,

$$\left|\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(0)})d\lambda\right| \le \frac{\pi^2}{2}M.$$

Elde edilen eşitsizliğe Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|r^{(1)}(\psi)\right| \le \frac{2}{\pi^2 M}\left|\Gamma''(\psi)\right| + \frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|\vartheta'_{ck}\right| + \left|\varpi_{sk}\right|\right) + \frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\psi}d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\psi}d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)r^{(0)}(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)}) - \hbar(\rho,\sigma,0)\right]d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|r^{(1)}(\psi)\right| \le \frac{2}{\pi^2 M}\left|\Gamma''(\psi)\right| + \frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|\vartheta'_{ck}\right| + \left|\varpi_{sk}\right|\right) +$$
$$\frac{4}{\pi M}\sqrt{\frac{\psi}{\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} +$$
$$\frac{4}{\pi M}\sqrt{\frac{\psi}{\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)}) - \hbar(\rho,\sigma,0)\right]\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Lipshitzs koşulu uygulanırsa,

$$\left|r^{(1)}(\psi)\right| \le \frac{2}{\pi^2 M}\left|\Gamma''(\psi)\right| + \frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|\vartheta'_{ck}\right| + \left|\varpi_{sk}\right|\right) +$$
$$\frac{4}{\pi M}\sqrt{\frac{\psi}{\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} +$$
$$\frac{4}{\pi M}\sqrt{\frac{\psi}{\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\ell(\rho,\sigma)\left|\nu^{(0)}(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Son olarak, her tarafının maksimumu alınırsa,

$$\left\|r^{(1)}(\psi)\right\| \le \frac{2}{\pi^2 M}\left\|\Gamma''(\psi)\right\| + \frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\vartheta'_{ck}\right\| + \left\|\varpi_{sk}\right\|\right) +$$
$$\frac{4|\Psi|}{M}\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}}\left\|r^{(0)}(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu^{(0)}(\psi)\right\| + \frac{4|\Psi|}{M}\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}}\left\|r^{(0)}(\psi)\right\|\left\|\hbar(\lambda,\psi,0)\right\|$$

elde edilir.

Tümevarım yöntemine göre, aynı işlemler $N+1.$iterasyona kadar sürdürülürse,

$$\left\|\nu^{(N+1)}(\psi)\right\| \le \frac{\left\|\vartheta_0\right\| + \left\|\varpi_0\right\|\left|\Psi\right|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\vartheta_{ck}\right\| + \left\|\vartheta_{sk}\right\|\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\varpi_{ck}\right\| + \left\|\varpi_{sk}\right\|\right) +$$
$$\frac{\sqrt{3}\Psi\left(\Psi\sqrt{\Psi} + \sqrt{2\Psi}\pi\right)}{3}\left\|r^{(N)}(\psi)\right\|\left\|\nu^{(N)}(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\| +$$
$$\frac{\sqrt{3}\Psi\left(\Psi\sqrt{\Psi} + \sqrt{2\Psi}\pi\right)}{3}\left\|r^{(N)}(\psi)\right\|\left\|\hbar(\lambda,\psi,0)\right\|,$$

$$\left\|r^{(N+1)}(\psi)\right\| \le \frac{2}{\pi^2 M}\left\|\Gamma''(\psi)\right\| + \frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\vartheta'_{ck}\right\| + \left\|\varpi_{sk}\right\|\right) +$$
$$\frac{4|\Psi|}{M}\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}}\left\|r^{(N)}(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu^{(N)}(\psi)\right\| + \frac{4|\Psi|}{M}\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}}\left\|r^{(N)}(\psi)\right\|\left\|\hbar(\lambda,\psi,0)\right\|$$

elde edilir. Teoremden koşulları gereği ve $\nu^{(N)}(\psi) \in \mathrm{B}$ olduğundan, $\nu^{(N+1)}(\psi) \in B$'dır.

3.3.Ardışık Yaklaşımların Yakınsaklığı

Ardışık yaklaşımların yakınsaklığını göstermek için ardışık terimler arasındaki farklar ele alınır:

$$\nu_0^{(1)}(\psi)-\nu_0^{(0)}(\psi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma,$$

$$\nu_{ck}^{(1)}(\psi)-\nu_{ck}^{(0)}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma,$$

$$\nu_{sk}^{(1)}(\psi)-\nu_{sk}^{(0)}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma.$$

Elde edilen farklara $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma$ ifadesi eklenip çıkarılırsa ve mutlak değeri alınırsa,

$$\left|\nu_0^{(1)}(\psi)-\nu_0^{(0)}(\psi)\right|\le\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right](\psi-\sigma)r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,0)(\psi-\sigma)r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\nu_{ck}^{(1)}(\psi)-\nu_{ck}^{(0)}(\psi)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\nu_{sk}^{(1)}(\psi)-\nu_{sk}^{(0)}(\psi)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|$$

elde edilir. Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\nu_0^{(1)}(\psi)-\nu_0^{(0)}(\psi)\right|\le$$

$$\left(\int_0^{\psi}(\psi-\sigma)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\left(\int_0^{\psi}(\psi-\sigma)^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{ck}^{(1)}(\psi)-\nu_{ck}^{(0)}(\psi)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\left(\int_0^{\psi}d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\left(\int_0^{\psi}d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)r^{(0)}(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{sk}^{(1)}(\psi)-\nu_{sk}^{(0)}(\psi)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\left(\int_0^{\psi}d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\left(\int_0^{\psi}d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)r^{(0)}(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. ν_{ck} ve ν_{sk} katsayıları için Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\nu_0^{(1)}(t)-\nu_0^{(0)}(t)\right|\le 2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{ck}^{(1)}(\psi)-\nu_{ck}^{(0)}(\psi)\right|\le\sqrt{\frac{\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{sk}^{(1)}(\psi)-\nu_{sk}^{(0)}(\psi)\right|\le\sqrt{\frac{\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Burada,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Aynı şekilde, ν_{ck} ve ν_{sk} katsayıları için Bessel eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\nu_{ck}^{(1)}(\psi)-\nu_{ck}^{(0)}(\psi)\right|\le\pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{sk}^{(1)}(\psi)-\nu_{sk}^{(0)}(\psi)\right|\le\pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizliklere Lipschitz koşulu uygulanırsa,

$$\left|\nu_0^{(1)}(\psi)-\nu_0^{(0)}(\psi)\right| \le 2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\ell(\rho,\sigma)\left|\nu^{(0)}(\sigma)\right|r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{ck}^{(1)}(\psi)-\nu_{ck}^{(0)}(\psi)\right| \le \pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\ell(\rho,\sigma)\left|\nu^{(0)}(\sigma)\right|r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{sk}^{(1)}(\psi)-\nu_{sk}^{(0)}(\psi)\right| \le \pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\ell(\rho,\sigma)\left|\nu^{(0)}(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizliklerin her tarafının ψ'ye göre maksimumu alınarak, bir araya getirilirse,

$$\left\|\nu^{(1)}(\psi)-\nu^{(0)}(\psi)\right\| \le \frac{\sqrt{3\pi}\Psi(\Psi\sqrt{\Psi}+\sqrt{2\Psi}\pi)}{3}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|r^{(0)}(\psi)\right\|\left\|\nu^{(0)}(\psi)\right\| +$$
$$\frac{\sqrt{3\pi}\Psi(\Psi\sqrt{\Psi}+\sqrt{2\Psi}\pi)}{3}\left\|r^{(0)}(\psi)\right\|\left\|\hbar(\lambda,\psi,0)\right\|$$

elde edilir. Bu eşitsizlik, teoremde verilen koşullar altında sınırlıdır.

$$K := \left\|\nu^{(1)}(\psi)-\nu^{(0)}(\psi)\right\| < \infty. \tag{3.11}$$

belirlensin.

Benzer şekilde, ters katsayı için ardışık fark,

$$r^{(1)}(\psi)-r^{(0)}(\psi)=\frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(1)})r^{(1)}(\sigma)d\rho d\sigma}{\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(1)})\lambda d\lambda}+$$

$$\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma}{\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})\lambda d\lambda}$$

ele alınır. Son denkleme $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}r^{(1)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})d\rho d\sigma$ ifadesi eklenip çıkarılır ve mutlak değeri alınırsa,

$$\left|r^{(1)}(\psi)-r^{(0)}(\psi)\right|\le$$

$$\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[r^{(1)}(\sigma)-r^{(0)}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(1)})d\rho d\sigma\right|+$$

$$\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)r^{(1)}(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(1)})-\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})\right]d\rho d\sigma\right|$$

elde edilir. Burada,

$$\left|\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(1)})\lambda d\lambda\right|\le\frac{M\pi^2}{2}\ \text{ ve }\left|\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(0)})\lambda d\lambda\right|\le\frac{M\pi^2}{2}.$$

Elde edilen eşitsizliğe sırasıyla Cauchy, Bessel eşitsizlikkleri ve Lipschitz koşulu uygulanırsa,

$$\left|r^{(1)}(\psi)-r^{(0)}(\psi)\right|\le\frac{2}{\pi M}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(1)})\left[r^{(1)}(\sigma)-r^{(0)}(\sigma)\right]\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\frac{2}{\pi M}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\ell(\rho,\sigma)\left|\nu^{(1)}(\sigma)\right|r^{(1)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Maksimumu alınırsa,

$$\left\|r^{(1)}(\psi)-r^{(0)}(\psi)\right\| \le R\left\|r^{(1)}(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu^{(1)}(\psi)-\nu^{(0)}(\psi)\right\| + RM\left\|r^{(1)}(\psi)-r^{(0)}(\psi)\right\|$$

elde edilir. Burada,

$$R=\frac{4|\Psi|}{M}\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}} \text{ ve } M=\left\|\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(0)})\right\|.$$

Düzenlemelerden sonra,

$$\left\|r^{(1)}(\psi)-r^{(0)}(\psi)\right\| \le \frac{R}{1-RM}\left\|r^{(1)}(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu^{(1)}(\psi)-\nu^{(0)}(\psi)\right\| \tag{3.12}$$

olur.

Yeniden,

$$\nu_0^{(2)}(\psi)-\nu_0^{(1)}(\psi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(1)})r^{(1)}(\sigma)d\rho d\sigma -$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma,$$

$$\nu_{ck}^{(2)}(\psi)-\nu_{ck}^{(1)}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(1)})r^{(1)}(\sigma)d\rho d\sigma -$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma,$$

$$\nu_{sk}^{(2)}(\psi)-\nu_{sk}^{(1)}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(1)})r^{(1)}(\sigma)d\rho d\sigma -$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma$$

farkı alınsın. $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}r^{(1)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})d\rho d\sigma$ ifadesi eklenip çıkarılırsa ve mutlak değeri alınırsa,

$$\left|\nu_0^{(2)}(\psi)-\nu_0^{(1)}(\psi)\right|\le\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(1)})-\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})\right]r^{(1)}(\sigma)(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left[r^{(1)}(\sigma)-r^{(0)}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\nu_{ck}^{(2)}(\psi)-\nu_{ck}^{(1)}(\psi)\right|\le$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})\left[r^{(1)}(\sigma)-r^{(0)}(\sigma)\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(1)})-\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})\right]r^{(1)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\nu_{sk}^{(2)}(\psi)-\nu_{sk}^{(1)}(\psi)\right|\le$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})\left[r^{(1)}(\sigma)-r^{(0)}(\sigma)\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(1)})-\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})\right]r^{(1)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|$$

elde edilir. Cauchy, Bessel, Hölder eşitsizlikleri ve Lipschitz koşulu uygulanırsa, maksimumu alınırsa,

$$\begin{aligned}\left\|\nu^{(2)}(\psi)-\nu^{(1)}(\psi)\right\|\le{}&\frac{\sqrt{3\pi}\Psi(\Psi\sqrt{\Psi}+\sqrt{2\Psi}\pi)}{3}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu^{(1)}(\psi)-\nu^{(0)}(\psi)\right\|\left\|r^{(1)}(\psi)\right\|+\\&\frac{\sqrt{3\pi}\Psi(\Psi\sqrt{\Psi}+\sqrt{2\Psi}\pi)}{3}\left\|r^{(1)}(\psi)-r^{(0)}(\psi)\right\|\left\|\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(0)})\right\|\end{aligned}\tag{3.13}$$

elde edilir. Denklem (3.12), Denklem (3.13)'te yerine yazıldığında,

$$\left\|\nu^{(2)}(\psi)-\nu^{(1)}(\psi)\right\|\le\left(\frac{A}{1-RM}\right)\left\|r^{(1)}(\psi)\right\|\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\ell(\rho,\sigma)\left|\nu^{(1)}(\sigma)-\nu^{(0)}(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\tag{3.14}$$

elde edilir. Denklem (3.11), Denklem (3.14)'te yerine yazıldığında,

$$\left\|\nu^{(2)}(\psi)-\nu^{(1)}(\psi)\right\|\le\left(\frac{A}{1-RM}\right)K\left\|r^{(1)}(\psi)\right\|\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\ell^2(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\tag{3.15}$$

elde edilir. Burada,

$$A=\frac{\sqrt{3\pi}\Psi(\Psi\sqrt{\Psi}+\sqrt{2\Psi}\pi)}{3},\quad R=\frac{4|\Psi|}{M}\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}}\ \text{ve}\ M=\left\|\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(0)})\right\|.$$

Aynı yöntemler sonraki farklar için de uygulanırsa,

$$\left\|r^{(2)}(\psi)-r^{(1)}(\psi)\right\|\le\frac{R}{1-RM}\left\|r^{(2)}(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu^{(2)}(\psi)-\nu^{(1)}(\psi)\right\|, \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\left\|\nu^{(3)}(\psi)-\nu^{(2)}(\psi)\right\|&\le A\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu^{(2)}(\psi)-\nu^{(1)}(\psi)\right\|\left\|r^{(2)}(\psi)\right\|+\\ &A\left\|\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(1)})\right\|\left\|r^{(2)}(\psi)-r^{(1)}(\psi)\right\|\end{aligned} \tag{3.17}$$

elde edilir. Denklem (3.16), Denklem (3.17)'de yerine yazıldığında,

$$\left\|\nu^{(3)}(\psi)-\nu^{(2)}(\psi)\right\|\le\left(\frac{A}{1-RM}\right)\left\|r^{(2)}(\psi)\right\|\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\ell(\rho,\sigma)\left|\nu^{(2)}(\sigma)-\nu^{(1)}(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.18}$$

elde edilir. Denklem (3.15), Denklem (3.18)'de yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}&\left\|\nu^{(3)}(\psi)-\nu^{(2)}(\psi)\right\|\le\left(\frac{A}{1-RM}\right)^2 K\left\|r^{(1)}(\psi)\right\|\left\|r^{(2)}(\psi)\right\|\\ &\times\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\ell^2(\rho,\sigma)\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\ell^2(\tilde{\rho},\tilde{\sigma})d\tilde{\rho}d\tilde{\sigma}\right)d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

elde edilir. İntegral için değişken değiştirme yöntemi uygulanırsa,

$$\left\|\nu^{(3)}(\psi)-\nu^{(2)}(\psi)\right\|\le\left(\frac{A}{1-RM}\right)^2 K\left\|r^{(1)}(\psi)\right\|\left\|r^{(2)}(\psi)\right\|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\ell^2(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir.

Eğer N+1.iterasyona kadar sürekli olarak aynı yöntemler uygulanırsa,

$$\left\|\nu^{(N+1)}(\psi)-\nu^{(N)}(\psi)\right\| \leq$$

$$\left(\frac{A}{1-RM}\right)^{N}\prod_{i=1}^{N}\left\|r^{(i)}(\psi)\right\|\frac{K}{\sqrt{N!}}\left(\left(\int_{0}^{\psi}\int_{0}^{\pi}\ell^{2}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right)^{N}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.19}$$

$$\left\|r^{(N+1)}(\psi)-r^{(N)}(\psi)\right\| \leq \frac{R}{1-RM}\left\|r^{(N)}(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu^{(N+1)}(\psi)-\nu^{(N)}(\psi)\right\| \tag{3.20}$$

elde edilir. Sonuç olarak $N\to\infty$ iken $\nu^{(N+1)}\to\nu^{(N)}$ ve $r^{(N+1)}\to r^{(N)}$ olur.

3.4. Kesin Çözüm ile Ardışık Çözümün Farkın Değerlendirilmesi

Bu bölümde, aşağıdaki limitin sağlandığı gösterilecektir:

$$\lim_{N\to\infty}\nu^{(N+1)}(\psi)=\nu(\psi),\ \lim_{N\to\infty}r^{(N+1)}(\psi)=r(\psi).$$

Öncelikle, ters katsayı için aşağıdaki fark ele alınır:

$$r(\psi)-r^{(N+1)}(\psi)=\frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\psi}\int_{0}^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu)r(\sigma)d\rho d\sigma}{\int_{0}^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda}+$$

$$\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\psi}\int_{0}^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N+1)})r^{(N+1)}(\sigma)d\rho d\sigma}{\int_{0}^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(N+1)})\lambda d\lambda}.$$

Son denkleme $\int_{0}^{\psi}\int_{0}^{\pi}r(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N+1)})d\rho d\sigma$ ifadesi eklenip çıkarılırsa ve mutlak değeri alınırsa,

$$\left|r(\psi)-r^{(N+1)}(\psi)\right| \leq$$

$$\frac{2\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\psi}\int_{0}^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)r(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu)-\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N+1)})\right]d\rho d\sigma\right|}{\pi M}+$$

$$\frac{2\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N+1)})\left[r(\sigma)-r^{(N+1)}(\sigma)\right]d\rho d\sigma\right|}{\pi M}$$

elde edilir. Burada,

$$\left|\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda\right|\le\frac{M\pi^2}{2}\ \text{ve}\ \left|\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(N+1)})\lambda d\lambda\right|\le\frac{M\pi^2}{2}.$$

Elde edilen eşitsizliğe sırasıyla Cauchy, Bessel eşitsizlikleri ile Lipschitz koşulu uygulanırsa ve maksimumu alınırsa,

$$\left\|r(\psi)-r^{(N+1)}(\psi)\right\|\le\frac{4|\Psi|}{M}\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}}\left\|r(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu(\psi)-\nu^{(N+1)}(\psi)\right\|+$$
$$\frac{4|\Psi|}{M}\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}}\left\|r(\psi)-r^{(N+1)}(\psi)\right\|\left\|\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(N+1)})\right\|$$

elde edilir. Düzenlemelerden sonra,

$$\left\|r(\psi)-r^{(N+1)}(\psi)\right\|\le\frac{R}{1-RM}\left\|r(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu(\psi)-\nu^{(N+1)}(\psi)\right\| \qquad (3.21)$$

elde edilir. Burada,

$$R=\frac{4|\Psi|}{M}\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}}\ \text{ve}\ \mathrm{M}=\left\|\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(N+1)})\right\|.$$

Kesin çözüm ile ardışık çözümün farkı alınırsa,

$$\nu_0(\psi)-\nu_0^{(N+1)}(\psi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)r(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu)d\rho d\sigma-$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)r^{(N)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})d\rho d\sigma,$$

$$\nu_{ck}(\psi)-\nu_{ck}^{(N+1)}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu)r(\sigma)d\rho d\sigma-$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})r^{(N)}(\sigma)d\rho d\sigma,$$

$$\nu_{sk}(\psi)-\nu_{sk}^{(N+1)}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu)r(\sigma)d\rho d\sigma-$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})r^{(N)}(\sigma)d\rho d\sigma$$

olur. Son denklem için

$$\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})r(\sigma)d\rho d\sigma,\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N+1)})r(\sigma)d\rho d\sigma,\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})r^{(N+1)}(\sigma)d\rho d\sigma$$

ifadeleri eklenip çıkarılırsa ve mutlak değeri alınırsa,

$$\left|\nu_0(\psi)-\nu_0^{(N+1)}(\psi)\right|\le\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)r(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu)-\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N+1)})\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[r^{(N+1)}(\sigma)-r^{(N)}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[r(\sigma)-r^{(N+1)}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)r(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N+1)})-\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})\right]d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\nu_{ck}(\psi)-\nu_{ck}^{(N+1)}(\psi)\right|\le$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu)-\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N+1)})\right]r(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[r^{(N+1)}(\sigma)-r^{(N)}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[r(\sigma)-r^{(N+1)}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N+1)})-\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})\right]r(\sigma)d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\nu_{sk}(\psi)-\nu_{sk}^{(N+1)}(\psi)\right| \leq$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,u)-\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N+1)})\right]r(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[r^{(N+1)}(\sigma)-r^{(N)}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[r(\sigma)-r^{(N+1)}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N+1)})-\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})\right]r(\sigma)d\rho d\sigma\right|$$

elde edilir. Sırasıyla Cauchy, Hölder ile Bessel eşitsizliği, Lipschitz koşulu uygulanırsa ve maksimumu alınırsa,

$$\begin{aligned}&\left\|\nu(\psi)-\nu^{(N+1)}(\psi)\right\| \leq A\left\|\nu(\psi)-\nu^{(N+1)}(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|r(\psi)\right\|+\\&A\left\|\nu^{(N+1)}(\psi)-\nu^{(N)}(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|r(\psi)\right\|+\\&A\left\|\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(N)})\right\|\left\|r^{(N+1)}(\psi)-r^{(N)}(\psi)\right\|+A\left\|\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(N)})\right\|\left\|r(\psi)-r^{(N+1)}(\psi)\right\|\end{aligned} \tag{3.22}$$

elde edilir. Denklem (3.20) ve (3.21), Denklem (3.22)'de yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}&\left\|\nu(\psi)-\nu^{(N+1)}(\psi)\right\| \leq \left(\frac{A}{1-RM}\right)\left\|\nu(\psi)-\nu^{(N+1)}(\psi)\right\|\left\|r(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|+\\&\left(\frac{ARM}{1-RM}\left\|r^{(N+1)}(\psi)\right\|+A\left\|r(\psi)\right\|\right)\left\|\nu^{(N+1)}(\psi)-\nu^{(N)}(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\end{aligned} \tag{3.23}$$

elde edilir. Denklem (3.19), Denklem (3.23)'de yerine yazıldığında,

$$\left\|\nu(\psi)-\nu^{(N+1)}(\psi)\right\| \leq \left(\frac{A}{1-RM}\right)\left\|r(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu(\psi)-\nu^{(N+1)}(\psi)\right\|+\left(\frac{A}{1-RM}\right)^{N}\times$$

$$\left(\frac{ARM}{1-RM}\left\|r^{(N+1)}(\psi)\right\|+A\left\|r(\psi)\right\|\right)\prod_{i=1}^{N}\left\|r^{(i)}(\psi)\right\|\frac{K}{\sqrt{(N+1)!}}\left(\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\ell^2(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right)^{N+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Son eşitsizliğe $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$ eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left\|v(\psi)-v^{(N+1)}(\psi)\right\|^2 \le 2\left(\frac{A}{1-RM}\right)^2\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r(\sigma)\ell(\rho,\sigma)\left|v(\sigma)-v^{(N+1)}(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)+$$

$$2\left(\left(\frac{ARM}{1-RM}\left\|r^{(N+1)}(\psi)\right\|+A\left\|r(\psi)\right\|\right)\left(\frac{A}{1-RM}\right)^N K\prod_{i=1}^{N}\left\|r^{(i)}(\psi)\right\|\frac{\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|^{N+1}}{\sqrt{N+1!}}\right)^2$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizliğe Gronwall eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left\|v(\psi)-v^{(N+1)}(\psi)\right\|^2 \le 2e^{2\left(\frac{A}{1-RM}\right)^2\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\{r(\sigma)\ell(\rho,\sigma)\}^2 d\rho d\sigma\right)}\left(\frac{ARM}{1-RM}\left\|r^{(N+1)}(\psi)\right\|+A\left\|r(\psi)\right\|\right)^2$$

$$\left(\left(\frac{A}{1-RM}\right)^N K\prod_{i=1}^{N}\left\|r^{(i)}(\psi)\right\|\frac{\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|^{N+1}}{\sqrt{N+1!}}\right)^2$$

elde edilir. Sonuç olarak, $N\to\infty$ iken, $v^{(N+1)}(\psi)$ yaklaşık çözümü $v(\psi)$ 'ye yakınsar.

3.5. Çözümün Tekliği

(3.1)–(3.4) probleminin (v,r) ve (w,l) olmak üzere iki farklı çözümünün olduğu varsayılsın. Öncelikle, ters katsayıların farkı ele alınır;

$$r(\psi)-l(\psi)=\frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,v)r(\sigma)d\rho d\sigma}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,v)\lambda d\lambda}+$$

$$\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,w)l(\sigma)d\rho d\sigma}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,w)\lambda d\lambda}.$$

Son denkleme $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}r(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,w)d\rho d\sigma$ ifadesi eklenip çıkarılırsa ve mutlak değeri alınırsa,

$$\left|r(\psi)-l(\psi)\right| \le$$

$$\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[r(\sigma)-l(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,w)\,d\rho d\sigma\right| + \tag{3.24}$$

$$\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)r(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu)-\hbar(\rho,\sigma,w)\right]d\rho d\sigma\right|$$

elde edilir. Burada,

$$\left|\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda\right| \le \frac{\pi^2 M}{2} \text{ ve } \left|\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,w)\lambda d\lambda\right| \le \frac{\pi^2 M}{2}.$$

Denklem (3.24) için sırasıyla Cauchy ve Bessel eşitsizlikleri ile Lipschitz koşulu uygulanıp elde edilen eşitsizliğin maksimumu alınırsa,

$$\left\|r(\psi)-l(\psi)\right\| \le R\left\|r(\psi)-l(\psi)\right\|\left\|\hbar(\lambda,\psi,w)\right\| + R\left\|r(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu(\psi)-w(\psi)\right\|$$

elde edilir. Düzenlemelerden sonra,

$$\left\|r(\psi)-l(\psi)\right\| \le \frac{R}{1-RM}\left\|r(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu(\psi)-w(\psi)\right\| \tag{3.25}$$

elde edilir. Burada,

$$R=\frac{4|\Psi|}{M}\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}} \text{ ve } M=\left\|\hbar(\lambda,\psi,w)\right\|.$$

ν ve w çözümlerinin farkı alınırsa;

$$\nu_0(\psi)-w_0(\psi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)r(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu)d\rho d\sigma-\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)l(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,w)d\rho d\sigma,$$

$$\nu_{ck}(\psi)-w_{ck}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu)r(\sigma)d\rho d\sigma -$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,w)l(\sigma)d\rho d\sigma,$$

$$\nu_{sk}(\psi)-w_{sk}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu)r(\sigma)d\rho d\sigma-$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,w)l(\sigma)d\rho d\sigma$$

olur. Son denklemlere $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}r(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,w)d\rho d\sigma$ ifadesi eklenip çıkarılırsa ve mutlak değeri alınırsa,

$$\left|\nu_0(\psi)-w_0(\psi)\right|\le\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)r(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu)-\hbar(\rho,\sigma,w)\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[r(\sigma)-l(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,w)d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\nu_{ck}(\psi)-w_{ck}(\psi)\right|\le$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)r(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu)-\hbar(\rho,\sigma,w)\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[r(\sigma)-l(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,w)d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\nu_{sk}(\psi)-w_{sk}(\psi)\right|\le$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)r(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu)-\hbar(\rho,\sigma,w)\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[r(\sigma)-l(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,w)d\rho d\sigma\right|$$

elde edilir. Sırasıyla Cauchy, Hölder, Bessel eşitsizlikleri ile Lipschitz koşulu uygulanıp elde edilen eşitsizliğin maksimumu alınırsa,

$$\left\|\nu(\psi)-w(\psi)\right\|\le \mathrm{A}\left\|r(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu(\psi)-w(\psi)\right\|+\mathrm{A}\left\|r(\psi)-l(\psi)\right\|\left\|\hbar(\lambda,\psi,w)\right\| \qquad (3.26)$$

elde edilir. Denklem (3.25), Denklem (3.26)'de yerine yazıldığında,

$$\|v(\psi)-w(\psi)\| \le \left(\frac{A}{1-RM}\right)\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r(\sigma)\ell(\rho,\sigma)|v(\sigma)-w(\sigma)|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. Elde edilen eşitsizliğin karesi alınarak Gronwall eşitsizliği uygulanırsa,

$$\|v(\psi)-w(\psi)\|^2 \le 0\cdot e^{\left(\frac{A}{1-RM}\right)^2\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\{r(\sigma)\ell(\rho,\sigma)\}^2 d\rho d\sigma}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $v(\psi)=w(\psi)$ ve $r(\psi)=l(\psi)$ olur.

3.6. Çözümün Kararlılığı

Teorem 3.2. Teorem 3.1 koşulları sağlanırsa, (3.1)–(3.4) probleminin (r,v) çözümü ϑ,ϖ ve Γ başlangıç verilerine göre sürekli bağımlıdır.

İspat. Teorem 3.1'in koşullarını sağlayan iki veri kümesi

$$\Theta=\{\vartheta,\varpi,\Gamma\},\quad \bar{\Theta}=\{\bar{\vartheta},\bar{\varpi},\bar{\Gamma}\}$$

olsun. Aşağıdaki sınırlamaların sağlandığı varsayılsın:

$$\|\vartheta\|_{C^1[0,\pi]} \le \mathrm{M}_1,\ \|\varpi\|_{C[0,\pi]} \le \mathrm{M}_2,\ \|\Gamma\|_{C^2[0,T]} \le \mathrm{M}_3$$

ve benzer şekilde

$$\|\bar{\vartheta}\|_{C^1[0,\pi]} \le \mathrm{M}_1,\ \|\bar{\varpi}\|_{C[0,\pi]} \le \mathrm{M}_2,\ \|\bar{\Gamma}\|_{C^2[0,T]} \le \mathrm{M}_3$$

olmak üzere $\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,\mathrm{M}_3$ pozitif sabitlerin var olduğu kabul edilsin. Buna bağlı olarak normlar

$$\|\Theta\|=\|\vartheta\|_{C[0,\pi]}+\|\varpi\|_{C[0,\pi]}+\|\Gamma\|_{C^2[0,T]},\ \|\bar{\Theta}\|=\|\bar{\vartheta}\|_{C[0,\pi]}+\|\bar{\varpi}\|_{C[0,\pi]}+\|\bar{\Gamma}\|_{C^2[0,T]}$$

şeklinde tanımlanır. (v,r) ve $(\bar{v},\bar{r})$, Θ ve $\bar{\Theta}$ verilerine karşılık gelen (3.1)–(3.4) problemine ait çözümler olsun. İlk olarak,

$$r(\psi)=\int_{0}^{\psi}\Upsilon(\psi,\sigma)r(\sigma)d\sigma+\Theta(\psi)$$

katsayısı incelenecektir. Burada,

$$\Theta(\psi)=\frac{\Gamma''(\psi)-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(\vartheta'_{ck}\cos 2k\psi+\varpi_{sk}\sin 2k\psi\right)}{\int_{0}^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda},$$

$$\Upsilon(\psi,\sigma)=\frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\hbar_{sk}(\sigma)\sin 2k(\psi-\sigma)}{\int_{0}^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda}.$$

$$r(\psi)-\overline{r}(\psi)=\int_{0}^{\psi}r(\sigma)\Upsilon(\psi,\sigma)d\sigma-\int_{0}^{\psi}\overline{r}(\sigma)\overline{\Upsilon}(\psi,\sigma)d\sigma+\Theta(\psi)-\overline{\Theta}(\psi)$$

ters katsayılar farkı için $\overline{r}(\psi)\Upsilon(\psi,\sigma)$ ifadesi eklenip çıkarılırsa,

$$r(\psi)-\overline{r}(\psi)=\int_{0}^{\psi}\Upsilon(\psi,\sigma)\left[r(\sigma)-\overline{r}(\sigma)\right]d\sigma-\int_{0}^{\psi}\left[\Upsilon(\psi,\sigma)-\overline{\Upsilon}(\psi,\sigma)\right]\overline{r}(\sigma)d\sigma+\Theta(\psi)-\overline{\Theta}(\psi)$$

elde edilir. Maksimumu alınırsa,

$$\left\|r(\psi)-\overline{r}(\psi)\right\|\le\left|\Psi\right|\left\|r(\psi)-\overline{r}(\psi)\right\|\left\|\Upsilon\right\|+\left|\Psi\right|\left\|\Upsilon-\overline{\Upsilon}\right\|\left\|\overline{r}(\psi)\right\|+\left\|\Theta-\overline{\Theta}\right\|$$

elde edilir. $\left|\Psi\right|\left\|\Upsilon\right\|\le 1$ olmak üzere,

$$\left\|r(\psi)-\overline{r}(\psi)\right\|\le\frac{1}{1-\left|\Psi\right|\left\|\Upsilon\right\|}\left\|\Theta-\overline{\Theta}\right\|+\frac{\left|\Psi\right|\left\|\overline{r}(\psi)\right\|}{1-\left|\Psi\right|\left\|\Upsilon\right\|}\left\|\Upsilon-\overline{\Upsilon}\right\| \tag{3.27}$$

elde edilir.

$$\Theta-\overline{\Theta}=\frac{\Gamma''(\psi)-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(\vartheta'_{ck}\cos 2k\psi+\varpi_{sk}\sin 2k\psi\right)}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda}-$$

$$\frac{\overline{\Gamma}''(\psi)-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(\overline{\vartheta}'_{ck}\cos 2k\psi+\overline{\varpi}_{sk}\sin 2k\psi\right)}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\overline{\nu})\lambda d\lambda},$$

$$\Theta-\overline{\Theta}=\frac{\Gamma''(\psi)\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\overline{\nu})d\lambda-\overline{\Gamma}''(\psi)\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\overline{\nu})\lambda d\lambda}+$$

$$\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}\overline{\vartheta}'_{ck}\cos 2k\psi\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta'_{ck}\cos 2k\psi\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\overline{\nu})d\lambda}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\overline{\nu})\lambda d\lambda}+$$

$$\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}\overline{\varpi}_{sk}\sin 2k\psi\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\varpi_{sk}\sin 2k\psi\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\overline{\nu})d\lambda}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\overline{\nu})\lambda d\lambda}.$$

$$\Gamma''(\psi)\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda,\qquad \vartheta'_{ck}\cos 2k\psi\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\quad\text{ve}\quad\varpi_{sk}\sin 2k\psi\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda$$

eklenip çıkarılırsa,

$$\Theta-\overline{\Theta}=\frac{-\Gamma''(\psi)\int_0^{\pi}\lambda\left[\hbar(\lambda,\psi,\nu)-\hbar(\lambda,\psi,\overline{\nu})\right]d\lambda+\left[\Gamma''(\psi)-\overline{\Gamma}''(\psi)\right]\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\overline{\nu})d\lambda}+$$

$$\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta'_{ck}\cos 2k\psi\int_0^{\pi}\lambda\left[\hbar(\lambda,\psi,\nu)-\hbar(\lambda,\psi,\overline{u})\right]\overline{\nu}d\lambda-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left[\vartheta'_{ck}-\overline{\vartheta}'_{ck}\right]\cos 2k\psi\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\overline{\nu})d\lambda}+$$

$$\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}\varpi_{sk}\sin 2k\psi\int_0^{\pi}\lambda\left[\hbar(\lambda,\psi,\nu)-\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\right]d\lambda-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varpi_{sk}-\bar{\varpi}_{sk}\right]\sin 2k\psi\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda}$$

elde edilir. Mutlak değeri alınır ve Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\Theta-\bar{\Theta}\right|\le\frac{4}{\pi^4M^2}\left[\left|\Gamma''(t)\right|\left(\int_0^{\pi}\lambda^2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\lambda,\psi,\nu)-\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\right\}^2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left|\Gamma''(\psi)-\bar{\Gamma}''(\psi)\right|\left(\int_0^{\pi}\lambda^2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\hbar^2(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|\vartheta'_{ck}\right|+\left|\varpi_{sk}\right|\right)\left(\int_0^{\pi}\lambda^2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\lambda,\psi,u)-\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\right\}^2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\left.\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|\vartheta'_{ck}-\bar{\vartheta}'_{ck}\right|+\left|\varpi_{sk}-\bar{\varpi}_{sk}\right|\right)\left(\int_0^{\pi}\lambda^2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\hbar^2(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

elde edilir. Burada,

$$\left|\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\right|\le\frac{\pi^2M}{2}\ \text{ ve }\left|\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda\right|\le\frac{\pi^2M}{2}.$$

Elde edilen eşitsizliğe Lipschitz koşulu uygulanırsa,

$$\left|\Theta-\bar{\Theta}\right|\le\frac{4}{\pi^4M^2}\sqrt{\frac{\pi^3}{3}}\left[\left|\Gamma''(\psi)\right|\left(\int_0^{\pi}\left\{\ell(\lambda,\psi)\left|\nu-\bar{\nu}\right|\right\}^2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left|\Gamma''(\psi)-\bar{\Gamma}''(\psi)\right|\left(\int_0^{\pi}\hbar^2(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|\vartheta'_{ck}\right|+\left|\varpi_{sk}\right|\right)\left(\int_0^{\pi}\left\{\ell(\lambda,\psi)\left|\nu-\bar{\nu}\right|\right\}^2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\left.\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|\vartheta'_{ck}-\bar{\vartheta}'_{ck}\right|+\left|\varpi_{sk}-\bar{\varpi}_{sk}\right|\right)\left(\int_0^{\pi}\hbar^2(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

elde edilir. Maksimumu alınırsa,

$$\left\|\Theta-\bar{\Theta}\right\| \le \frac{4}{\pi^4 M^2}\sqrt{\frac{\pi^3}{3}}\left(M\left\|\Gamma''(\psi)-\bar{\Gamma}''(\psi)\right\| + \pi M\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\vartheta'_{ck}-\bar{\vartheta}'_{ck}\right\|+\left\|\varpi_{sk}-\bar{\varpi}_{sk}\right\|\right)\right)+$$
$$\frac{4}{\pi^4 M^2}\sqrt{\frac{\pi^3}{3}}\left(M_3+\pi\left(M_1+M_2\right)\right)\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu-\bar{\nu}\right\| \tag{3.28}$$

elde edilir.

$$\Upsilon-\bar{\Upsilon}=\frac{-2\sum_{k=1}^{\infty}\sin 2k(\psi-\sigma)\int_0^{\pi}\sin(2k\lambda)\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda}-$$

$$\frac{-2\sum_{k=1}^{\infty}\sin 2k(\psi-\sigma)\int_0^{\pi}\sin(2k\lambda)\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\lambda d\lambda},$$

$$\Upsilon-\bar{\Upsilon}=\frac{2\sum_{k=1}^{\infty}\sin 2k(\psi-\sigma)\int_0^{\pi}\sin(2k\lambda)\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,t,u)\lambda d\lambda}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\lambda d\lambda}-$$

$$\frac{2\sum_{k=1}^{\infty}\sin 2k(\psi-\sigma)\int_0^{\pi}\sin(2k\lambda)\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\lambda d\lambda}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\lambda d\lambda}.$$

$\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\sin 2k\lambda d\lambda\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda$ ifadesi eklenip çıkarılırsa,

$$\Upsilon-\bar{\Upsilon}=\frac{2\sum_{k=1}^{\infty}\sin 2k(\psi-\sigma)\int_0^{\pi}\sin(2k\lambda)\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\int_0^{\pi}\left[\hbar(\lambda,\psi,\nu)-\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\right]\lambda d\lambda}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\lambda d\lambda}-$$

$$\frac{2\sum_{k=1}^{\infty}\sin 2k(\psi-\sigma)\int_0^{\pi}\sin(2k\lambda)\left[\hbar(\lambda,\psi,\nu)-\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\right]d\lambda\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\lambda d\lambda}$$

elde edilir. Mutlak değeri alınır ve Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\Upsilon-\overline{\Upsilon}\right|\leq$$
$$\frac{8\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\left\{\sin(2k\lambda)\hbar(\lambda,\psi,\nu)\right\}^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\lambda^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\lambda,\psi,\nu)-\hbar(\lambda,\psi,\overline{\nu})\right\}^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}}{\pi^4 M^2}+$$
$$\frac{8\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\left\{\sin(2k\lambda)\left[\hbar(\lambda,\psi,\nu)-\hbar(\lambda,\psi,\overline{\nu})\right]\right\}^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\lambda^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\hbar^2(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}}{\pi^4 M^2}$$

elde edilir. Ardından, Bessel eşitsizliği ile Lipschitz koşulu uygulanırsa,

$$\left|\Upsilon-\overline{\Upsilon}\right|\leq\frac{8}{\pi^4 M^2}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\pi^3}{3}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\hbar^2(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\left\{\ell(\lambda,\psi)\left|\nu-\overline{\nu}\right|\right\}^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$\frac{8}{\pi^4 M^2}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\pi^3}{3}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\left\{\ell(\lambda,\psi)\left|\nu-\overline{\nu}\right|\right\}^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\hbar^2(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Maksimumu alınırsa,

$$\left\|\Upsilon-\overline{\Upsilon}\right\|\leq\frac{16}{\sqrt{3}\pi^2 M}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu-\overline{\nu}\right\| \tag{3.29}$$

elde edilir.

Denklem (3.28) ve (3.29), Denklem (3.27)'de yazıldığında,

$$\left\|r(\psi)-\overline{r}(\psi)\right\|\leq$$
$$\frac{1}{1-\left|\Psi\right|\left\|\Upsilon\right\|}\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}\pi^3 M}\left(\left\|\Gamma''(\psi)-\overline{\Gamma}''(\psi)\right\|+\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\vartheta'_{ck}-\overline{\vartheta}'_{ck}\right\|+\left\|\varpi_{sk}-\overline{\varpi}_{sk}\right\|\right)\right)+ \tag{3.30}$$
$$\frac{1}{1-\left|\Psi\right|\left\|\Upsilon\right\|}\left(\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}\pi^3 M^2}\left(M_3+\pi\left(M_1+M_2\right)\right)+\frac{16\left|T\right|\left\|\overline{r}(\psi)\right\|}{\sqrt{3}\pi^2 M}\right)\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu-\overline{\nu}\right\|$$

elde edilir.

$$\nu(\psi)-\bar{\nu}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\vartheta_{ck}-\bar{\vartheta}_{ck}\right)\cos 2k\psi+\frac{\left(\varpi_{ck}-\bar{\varpi}_{ck}\right)}{2k}\sin 2k\psi\right)\cos 2k\lambda+$$

$$\frac{\left(\vartheta_0-\bar{\vartheta}_0\right)}{2}+\frac{\left(\varpi_0-\bar{\varpi}_0\right)\psi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\vartheta_{sk}-\bar{\vartheta}_{sk}\right)\cos 2k\psi+\frac{\left(\varpi_{sk}-\bar{\varpi}_{sk}\right)}{2k}\sin 2k\psi\right)\sin 2k\lambda+$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,\nu)(\psi-\sigma)r(\sigma)d\rho d\sigma-\frac{1}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})(\psi-\sigma)\bar{r}(\sigma)d\rho d\sigma+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu)r(\sigma)d\rho d\sigma\right)\cos 2k\lambda-$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})\bar{r}(\sigma)d\rho d\sigma\right)\cos 2k\lambda+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu)r(\sigma)d\rho d\sigma\right)\sin 2k\lambda-$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})\bar{r}(\sigma)d\rho d\sigma\right)\sin 2k\lambda.$$

Son denkleme $r(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})$ ifadesi eklenip çıkarılırsa ve mutlak değeri alınırsa,

$$\left|\nu(\psi)-\bar{\nu}(\psi)\right|\le\frac{\left|\vartheta_0-\bar{\vartheta}_0\right|}{2}+\frac{\left|(\varpi_0-\bar{\varpi}_0)\psi\right|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|\vartheta_{ck}-\bar{\vartheta}_{ck}\right|+\left|\vartheta_{sk}-\bar{\vartheta}_{sk}\right|\right)+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\left(\left|\varpi_{ck}-\bar{\varpi}_{ck}\right|+\left|\varpi_{sk}-\bar{\varpi}_{sk}\right|\right)+$$

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu)-\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})\right](\psi-\sigma)r(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})(\psi-\sigma)\left[r(\sigma)-\bar{r}(\sigma)\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu)-\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})\right]r(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[r(\sigma)-\bar{r}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu)-\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})\right]r(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[r(\sigma)-\bar{r}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})d\rho d\sigma\right|$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizliğe sırasıyla Cauchy, Hölder ve Bessel eşitsizlikleri ile Lipschitz koşulu uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
&|\nu(\psi)-\bar{\nu}(\psi)| \le \frac{\left|\vartheta_0-\bar{\vartheta}_0\right|}{2}+\frac{\left|(\varpi_0-\bar{\varpi}_0)\psi\right|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|\vartheta_{ck}-\bar{\vartheta}_{ck}\right|+\left|\vartheta_{sk}-\bar{\vartheta}_{sk}\right|\right)+\\
&\frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|\varpi_{ck}-\bar{\varpi}_{ck}\right|+\left|\varpi_{sk}-\bar{\varpi}_{sk}\right|\right)+\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r(\sigma)\ell(\rho,\sigma)|\nu-\bar{\nu}|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+\\
&\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\left[r(\sigma)-\bar{r}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+\\
&\pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r(\sigma)\ell(\rho,\sigma)|\nu-\bar{\nu}|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+\\
&\pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\left[r(\sigma)-\bar{r}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+\\
&\pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r(\sigma)\ell(\rho,\sigma)|\nu-\bar{\nu}|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+\\
&\pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\left[r(\sigma)-\bar{r}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bulunan eşitsizliğin her iki tarafından maksimum alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&\|\nu(\psi)-\bar{\nu}(\psi)\| \le \frac{\left\|\vartheta_0-\bar{\vartheta}_0\right\|}{2}+\frac{\left\|\varpi_0-\bar{\varpi}_0\right\||\Psi|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\vartheta_{ck}-\bar{\vartheta}_{ck}\right\|+\left\|\vartheta_{sk}-\bar{\vartheta}_{sk}\right\|\right)+\\
&\frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\varpi_{ck}-\bar{\varpi}_{ck}\right\|+\left\|\varpi_{sk}-\bar{\varpi}_{sk}\right\|\right)+\\
&\frac{\sqrt{3\pi}\Psi\left(\Psi\sqrt{\Psi}+\sqrt{2\Psi}\pi\right)}{3}\left\|\ell(x,\psi)\right\|\left\|r(\psi)\right\|\left\|\nu-\bar{\nu}\right\|+\\
&\frac{\sqrt{3\pi}\Psi\left(\Psi\sqrt{\Psi}+\sqrt{2\Psi}\pi\right)}{3}\left\|\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\right\|\left\|r(\psi)-\bar{r}(\psi)\right\|
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

elde edilir. Denklem (3.30), Denklem (3.31)'de yerine yazıldığında,

$$\|\nu(\psi)-\bar{\nu}(\psi)\| \le \frac{\|\vartheta_0-\bar{\vartheta}_0\|}{2}+\frac{\|\varpi_0-\bar{\varpi}_0\|\|\Psi|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\|\vartheta_{ck}-\bar{\vartheta}_{ck}\|+\|\vartheta_{sk}-\bar{\vartheta}_{sk}\|\right)+$$
$$\frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\|\varpi_{ck}-\bar{\varpi}_{ck}\|+\|\varpi_{sk}-\bar{\varpi}_{sk}\|\right)+\frac{4A\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}\pi^3\left(1-|\Psi|\|\Upsilon\|\right)}\|\Gamma''(\psi)-\bar{\Gamma}''(\psi)\|+$$
$$\frac{4A\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}\pi^2\left(1-|\Psi|\|\Upsilon\|\right)}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\|\vartheta'_{ck}-\bar{\vartheta}'_{ck}\|+\|\varpi_{sk}-\bar{\varpi}_{sk}\|\right)+ \tag{3.32}$$
$$\left(A\|r(\psi)\|+\frac{4A\sqrt{\pi}\left(M_3+\pi\left(M_1+M_2\right)\right)}{\sqrt{3}\pi^3 M\left(1-|\Psi|\|\Upsilon\|\right)}+\frac{16A|\Psi|\|\bar{r}(\psi)\|}{\sqrt{3}\pi^2\left(1-|\Psi|\|\Upsilon\|\right)}\right)\|\ell(\lambda,\psi)\|\|\nu-\bar{\nu}\|$$

elde edilir. Burada,

$$A=\frac{\sqrt{3\pi}\Psi\left(\Psi\sqrt{\Psi}+\sqrt{2\Psi\pi}\right)}{3}.$$

Eğer

$$\|\vartheta-\bar{\vartheta}\|=\frac{\|\vartheta_0-\bar{\vartheta}_0\|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\|\vartheta_{ck}-\bar{\vartheta}_{ck}\|+\|\vartheta_{sk}-\bar{\vartheta}_{sk}\|\right)+\frac{4A\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}\pi^2\left(1-|\Psi|\|\Upsilon\|\right)}\sum_{k=1}^{\infty}\|\vartheta'_{ck}-\bar{\vartheta}'_{ck}\|,$$

$$\|\varpi-\bar{\varpi}\|=\frac{|\Psi|}{2}\|\varpi_0-\bar{\varpi}_0\|+$$
$$\frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\|\varpi_{ck}-\bar{\varpi}_{ck}\|+\|\varpi_{sk}-\bar{\varpi}_{sk}\|\right)+\frac{4A\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}\pi^2\left(1-|\Psi|\|\Upsilon\|\right)}\sum_{k=1}^{\infty}\|\varpi_{sk}-\bar{\varpi}_{sk}\|$$

olarak alınırsa, burada

$$M_4=\max\left\{\frac{1}{2},1,\frac{4A\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}\pi^2\left(1-|\Psi|\|\Upsilon\|\right)}\right\},$$
$$M_5=\max\left\{\frac{|\Psi|}{2},\frac{\pi}{2\sqrt{6}},\frac{4A\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}\pi^2\left(1-|\Psi|\|\Upsilon\|\right)}\right\},$$
$$M_6=\frac{4A\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}\pi^3\left(1-|\Psi|\|\Upsilon\|\right)},$$
$$M_7=A\|r(\psi)\|+\frac{4A\sqrt{\pi}\left(M_3+\pi\left(M_1+M_2\right)\right)}{\sqrt{3}\pi^3 M\left(1-|\Psi|\|\Upsilon\|\right)}+\frac{16A|\Psi|\|\bar{r}(\psi)\|}{\sqrt{3}\pi^2\left(1-|\Psi|\|\Upsilon\|\right)}$$

belirlenir ve Denklem (3.32),

$$\left\|\nu(\psi)-\bar{\nu}(\psi)\right\| \le M_4\left\|\vartheta-\bar{\vartheta}\right\| + M_5\left\|\varpi-\bar{\varpi}\right\| + M_6\left\|\Gamma''(\psi)-\bar{\Gamma}''(\psi)\right\| + M_7\left\|\nu-\bar{\nu}\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|$$

şeklinde yazılır. Buradan $M_8 = \max\left\{M_4, M_5, M_6\right\}$ kabul edildiğinde, son eşitsizlik

$$\left\|\nu(\psi)-\bar{\nu}(\psi)\right\| \le M_8\left\|\Theta-\bar{\Theta}\right\| + M_7\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu-\bar{\nu}\right\|$$

şeklinde yazılır. $(a+b)^2 \le 2a^2+2b^2$ eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left\|\nu(\psi)-\bar{\nu}(\psi)\right\|^2 \le 2M_8^2\left\|\Theta-\bar{\Theta}\right\|^2 + 2M_7^2\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\ell(\rho,\sigma)\left|\nu(\sigma)-\bar{\nu}(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma$$

olur. Son eşitsizliğe Gronwall eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left\|\nu(\psi)-\bar{\nu}(\psi)\right\|^2 \le 2M_8^2\left\|\Theta-\bar{\Theta}\right\|^2 e^{2M_7^2\int_0^{t}\int_0^{\pi}\ell^2(\rho,\sigma)d\rho d\sigma}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\Theta \to \bar{\Theta}$ iken $\nu \to \bar{\nu}$ ve $r \to \bar{r}$ olur.

3.7. Doğrusal Olmayan Problem için Sayısal Çözüm

Bu bölümde, teorik kısımda soyut değişkenler cinsinden ele alınan problem, sayısal uygulamalara uygunluk sağlamak amacıyla, $\lambda = x$ ve $\psi = t$ olmak üzere zaman ve uzay değişkenleri cinsinden yazılmıştır.

Doğrusal olmayan problemlerin doğrudan çözümünün güç olması nedeniyle, bu çalışmada çözüm sürecinden önce problem doğrusal bir forma indirgenir. Bu amaçla

$$\frac{\partial^2 \nu^{(n)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \nu^{(n)}}{\partial x^2} + r(t)\hbar(x,t,\nu^{(n-1)}) \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned} &\nu^{(n)}(x,0) = \vartheta(x),\ x \in [0,\pi] \\ &\partial_t \nu^{(n)}(x,0) = \varpi(x),\ x \in [0,\pi] \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned} &\nu^{(n)}(0,t)=\nu^{(n)}(\pi,t), \quad t\in[0,\Psi] \\ &\partial_x\nu^{(n)}(0,t)=\partial_x\nu^{(n)}(\pi,t)=0, \quad t\in[0,\Psi] \end{aligned} \tag{3.35}$$

problemi için iteratif bir algoritma oluşturulur. $\nu^{(n)}(x,t)=w(x,t)$ ve $\hbar\left(x,t,\nu^{(n-1)}\right)=\tilde{\hbar}(x,t)$ belirleyerek (3.33)-(3.35) problemi

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+r(t)\tilde{\hbar}(x,t), \tag{3.36}$$

$$w(x,0)=\vartheta(x),\partial_t w(x,0)=\varpi(x),\ x\in[0,\pi] \tag{3.37}$$

$$w(0,t)=w(\pi,t),\ \partial_x w(0,t)=\partial_x w(\pi,t)=0,\ t\in[0,\Psi] \tag{3.38}$$

doğrusal bir problem olarak ifade edilebilir. Elde edilen doğrusal problem, sonlu farklar yöntemiyle sayısal olarak çözülür; bu aşamada, kapalı ve Crank–Nicolson olmak üzere iki farklı sonlu fark şeması uygulanır. (3.36)-(3.38) problemini çözmek için kapalı şema:

$$\frac{1}{\Delta t^2}\left(w_i^{j+2}-2w_i^{j+1}+w_i^{j}\right)=\frac{1}{\Delta x^2}\left(w_{i-1}^{j+2}-2w_i^{j+2}+w_{i+1}^{j+2}\right)+r^{j+1}\tilde{\hbar}^{j+1} \tag{3.39}$$

ve Crank-Nicolson şeması aşağıdaki gibidir:

$$\frac{1}{\Delta t^2}\left(w_i^{j+2}-2w_i^{j+1}+w_i^{j}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{w_{i-1}^{j+2}-2w_i^{j+2}+w_{i+1}^{j+2}}{\Delta x^2}+\frac{w_{i-1}^{j+1}-2w_i^{j+1}+w_{i+1}^{j+1}}{\Delta x^2}\right)+r^{j+1}\tilde{\hbar}^{j+1}. \tag{3.40}$$

Başlangıç ve sınır koşulları $[0,\pi]\times[0,\Psi]$ bölgesi için aşağıdaki şekle dönüşür:

$$w_i^1=\vartheta_i,\ \frac{w_i^2-w_i^1}{\Delta t}=\varpi_i,$$

$$w_1^j=w_{Nx}^j,\ \ w_{Nx}^j=\frac{w_2^j+w_{Nx-1}^j}{2}.$$

Ters katsayı,

$$r^{j+1}=\frac{\dfrac{\Gamma^{j+1}-2\Gamma^{j}+\Gamma^{j-1}}{\Delta t^{2}}-\pi\dfrac{w_{Nx}^{j+1}-w_{Nx-1}^{j+1}}{\Delta x}}{\left(\tilde{\hbar}in\right)^{j+1}}$$

şeklindedir. Burada $\Gamma^{j}=\Gamma\left(t_{j}\right)$, $\left(\tilde{\hbar}in\right)^{j+1}=\int_{0}^{\pi}x\tilde{\hbar}\left(x,t_{j+1}\right)dx$.

$j=0$ için

$$r^{1}=\frac{\dfrac{\Gamma^{1}-2\Gamma^{0}+\Gamma^{0}}{\Delta t^{2}}-\pi\dfrac{w_{Nx}^{1}-w_{Nx-1}^{1}}{\Delta x}}{\left(\tilde{\hbar}in\right)^{1}}.$$

$j=1$ için

$$r^{2}=\frac{\dfrac{\Gamma^{2}-2\Gamma^{1}+\Gamma^{0}}{\Delta t^{2}}-\pi\dfrac{w_{Nx}^{2}-w_{Nx-1}^{2}}{\Delta x}}{\left(\tilde{\hbar}in\right)^{1}}.$$

$\left(\tilde{\hbar}in\right)^{j+1}$'i hesaplamak için trapezoidal integrasyon formülü kullanılır.

Kapalı (3.39) ve Crank-Nicolson (3.40) sonlu fark formülünü hesaplanması için Gauss Seidel iterasyonu kullanılır. Ters katsayı ve kaynak terimi önceki zaman değerlerini kullanılarak hesaplanır. Gauss Seidel iterasyon formülü,

$$w_{i}^{j+2(s+1)}=\frac{V_{i}}{a_{ii}}-\sum_{k=1}^{i-1}\frac{a_{ik}}{a_{ii}}w_{k}^{j+2(s+1)}-\sum_{k=i+1}^{Nx}\frac{a_{ik}}{a_{ii}}w_{k}^{j+2(s)},$$

burada *s,* iterasyondur. Sayısal hesaplamalarda, zaman adımı çok küçük olduğu için

$$w_{i}^{j+2(0)}=w_{i}^{j+1}$$

şeklindedir. $s=0$ için Gauss Seidel iterasyon formülü,

$$w_{i}^{j+2(1)}=\frac{V_{i}}{a_{ii}}-\sum_{k=1}^{i-1}\frac{a_{ik}}{a_{ii}}w_{k}^{j+2(1)}-\sum_{k=i+1}^{Nx}\frac{a_{ik}}{a_{ii}}w_{k}^{j+1}$$

şeklindedir. Kapalı sonlu fark şeması için sağ taraf terimleri aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$V_i = -2w_i^{j+1} + w_i^j - r^{j+1}\Delta t^2 \tilde{h}^{j+1}.$$

Aynı şekilde, Crank-Nicolson sonlu fark şeması için sağ taraf terimleri,

$$V_i = -2w_i^{j+1} + w_i^j - \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}\left(w_{i-1}^{j+1} - 2w_i^{j+1} + w_{i+1}^{j+1}\right) - r^{j+1}\Delta t^2 \tilde{h}^{j+1}$$

olarak tanımlanır. (a_{ii}) katsayı matrisi, periyodik sınır koşullarına ve iç hesaplama düğümlerine göre kapalı şema ve Crank-Nicolson şeması için farklı oluşur.

Örnek 3.1.

$$v_{tt} - v_{xx} = r(t)e^{t^3}\sin 4x,$$

$$v(x,0) = \sin 4x, \partial_t v(x,0) = 0,$$

$$v(0,t) = v(\pi,t),\ \partial_x v(0,t) = \partial_x v(\pi,t),$$

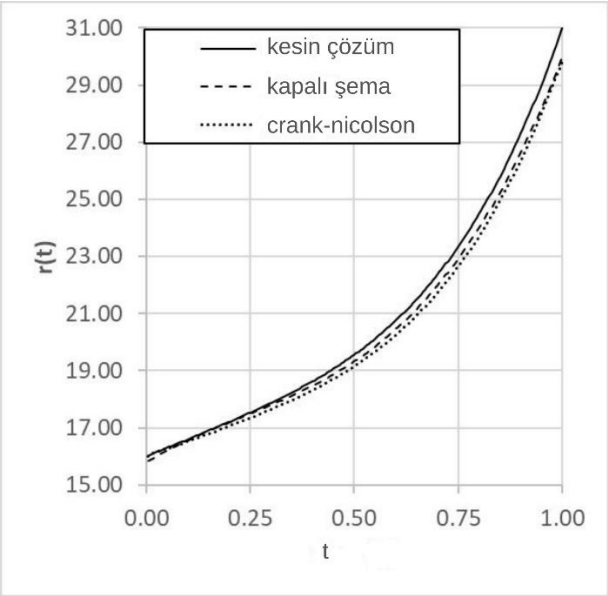
$$\Gamma(t) = -\frac{\pi}{4}e^{t^3}.$$

Bu problemin analitik çözümünü, $\{r(t), v(x,t)\} = \left\{\left(6t + 9t^4 + 16\right), e^{t^3}\sin 4x\right\}$.

Sayısal çözümde 200 adet kafes (Nx) kullanılır, dolaysıyla x yönü boyunca adım 0,0157'dır. Zaman adımı da 0,005 saniyedir. Gauss Seidel iterasyon süreci için zaman adımı başına maksimum iterasyon 100 olarak ve Gauss Seidel iterasyonunun tolerans değeri 10^{-6} olarak alınmıştır.

Şekil 3.1, ters katsayı çözümünün zamanla dağılımını göstermektedir. Ters katsayının kesin ve sayısal çözümlerini karşılaştırmak amacıyla, Tablo 3.1'de kapalı ve Crank-Nicolson şemaları için belirli zamanlardaki kesin çözüm, mutlak hata ve bağıl hata değerleri sunulmuştur. Mutlak hata ve bağıl hata her iki şema için de zamanla artmaktadır. Kapalı şemanın Crank-Nicolson şemasına kıyasla daha düşük mutlak ve bağıl hata

üretmektedir. Maksimum bağıl hata saniye 1'de kapalı ve Crank-Nicolson şemaları için sırasıyla %3,3064 ve %3,6707 olarak gerçekleşmiştir. Bağıl hata her iki şema için de %4'den azdır, bu nedenle her iki sayısal sonuç da ters katsayı için kesin sonuçlara yakındır.



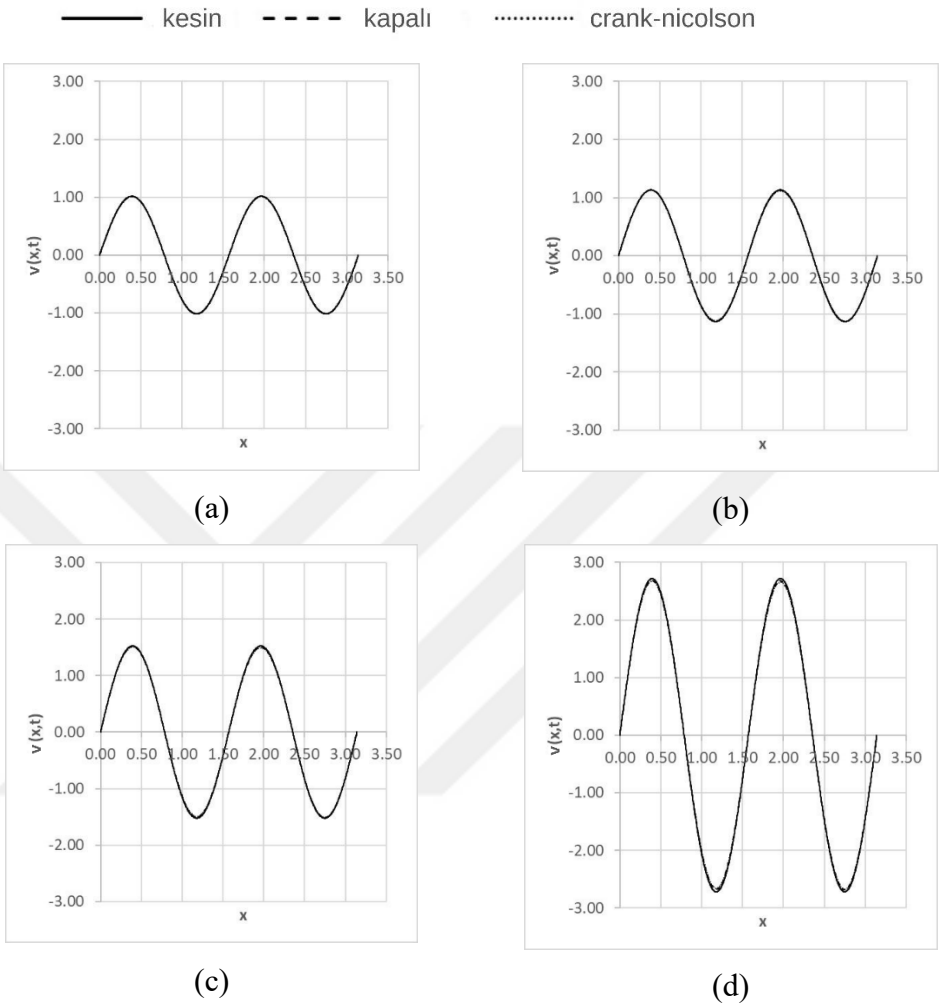
Şekil 3.1. Ters katsayının 0 s'den 1 s'ye kadar kesin ve sayısal çözümleri

Tablo 3.1. Her iki şema için r ters katsayısının kesin çözümü, mutlak ve bağıl hatası

t[s]	Kesin çözüm	Kapalı şema için mutlak hata	Kapalı şema için bağıl hata [%]	Crank-Nicolson için mutlak hata	Crank-Nicolson için bağıl hata [%]
0.1	16.6009	0.0321	0.1938	0.0776	0.4677
0.2	17.2144	0.0095	0.0554	0.1468	0.8530
0.3	17.8729	0.0677	0.3787	0.2238	1.2525
0.4	18.6304	0.1538	0.8259	0.3090	1.6589
0.5	19.5625	0.2368	1.2108	0.4046	2.0683
0.6	20.7664	0.3071	1.4789	0.5115	2.4635
0.7	22.3609	0.3766	1.6844	0.6325	2.8286
0.8	24.4864	0.4790	1.9564	0.7718	3.1519
0.9	27.3049	0.6695	2.4521	0.9366	3.4303
1.0	31.0000	1.0250	3.3064	1.1379	3.6707

Şekil 3.2, (a) $t = 0,25s$; (b) $t = 0,5s$; (c) $t = 0,75s$ ve (d) $t = 1s$ için kesin ve sayısal v çözümleri göstermektedir. Hiperbolik şekiller verilen zamanlarda hem kesin hem de sayısal çözümler için görülmektedir. Zaman arttıkça hiperbolik şekillerin derinliği de

artmaktadır. Verilen zamanda, simetrik hiperbolik şekiller üretilir. Tam ve kapalı şema ile Crank-Nicolson şemasının çözümleri birbirine çok yakındır.

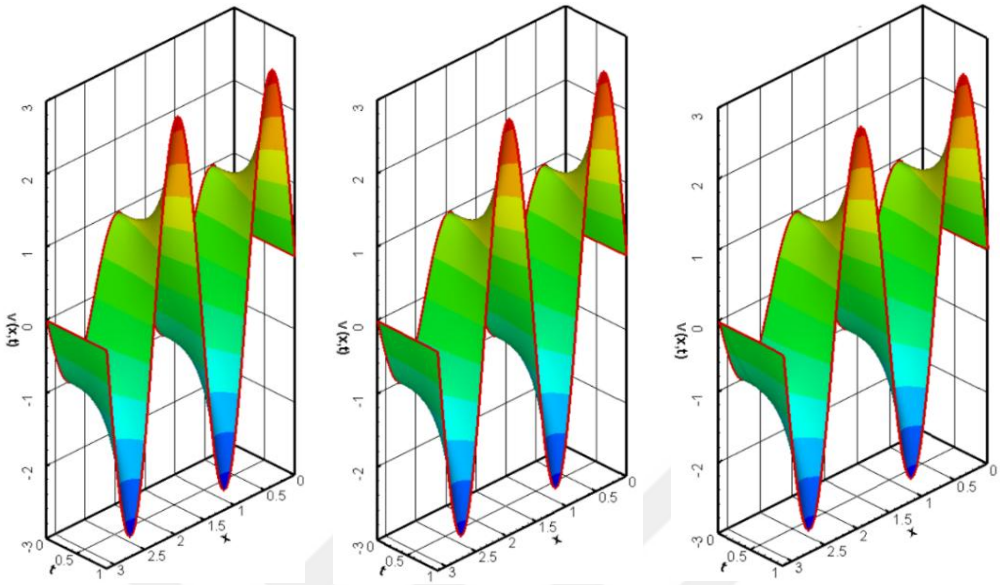


Şekil 3.2. (a) $t = 0,25s$; (b) $t = 0,5s$; (c) $t = 0,75s$ ve (d) $t = 1s$ durumları için kesin ve sayısal v çözümleri

Şekil 3.3, (a) kesin ve (b) kapalı şema ve (c) Crank-Nicolson şeması çözümleri için tüm zamanlardaki hiperbolik şekilleri göstermektedir. Benzer şekilde, v çözümünün kesin çözümü ile kapalı ve Crank-Nicolson şemaları kullanılarak elde edilen sayısal çözümleri karşılaştırmak amacıyla mutlak hata ve bağıl hata hesaplanmıştır.

Tablo 3.2, her iki sayısal şema için belirli zamanlardaki maksimum mutlak hatayı ve maksimum bağıl hatayı göstermektedir. Maksimum mutlak hata genellikle zamanla artarken, maksimum bağıl hata 0,7 s zamanına kadar sabit kalmaktadır. Maksimum bağıl hata her iki sayısal hesaplama için de 0,9 s'de ortaya çıkmakta ve kapalı şema ve Crank-

Nicolson şemasında sırasıyla 0,94621 ve 1,93535 olarak gözlenmektedir. Yine, kapalı şemanın Crank-Nicolson şemasına göre daha yakın sonuçlar ürettiği görülmüştür.



(a) (b) (c)

Şekil 3.3. (a) Kesin çözüm, (b) kapalı ve (c) Crank–Nicolson şeması için ν çözümleri

Tablo 3.2. Belirli zamanlarda ν çözümün mutlak ve bağıl hatası

t [s]	Kapalı şema için maksimum mutlak hata	Kapalı şema için maksimum bağıl hata [%]	Crank-Nicolson için maksimum mutlak hata	Crank-Nicolson için maksimum bağıl hata [%]
0.1	0.00628	-0.49781	0.01254	-0.99296
0.2	0.00633	-0.49491	0.01258	-0.98479
0.3	0.00644	-0.49309	0.01277	-0.97671
0.4	0.00668	-0.49051	0.01428	-0.96892
0.5	0.00709	-0.48738	0.01832	-0.96098
0.6	0.00984	-0.48382	0.02300	-0.95331
0.7	0.01389	-0.47992	0.02873	-0.94621
0.8	0.01998	0.72989	0.03614	1.46588
0.9	0.02924	0.94621	0.04618	1.93535
1.0	0.04357	0.75754	0.06042	1.49578

4.TERS KATSAYILI PSEUDO-HİPERBOLİK PROBLEMİN İNCELENMESİ

4.1.Çözümün Bulunması

$\Psi > 0$ olmak üzere, $\Omega := \{0 < \lambda < \pi, 0 < \psi < \Psi\}$ bölgesinde tanımlı Denklem (4.1) ile verilen ters katsayılı pseudo-hiperbolik denklem incelenmektedir:

$$\nu_{\psi\psi} - \varepsilon \nu_{\lambda\lambda\psi\psi} - \nu_{\lambda\lambda} = r(\psi)\hbar(\lambda,\psi,\nu), \tag{4.1}$$

Denklem için başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} &\nu(\lambda,0) = \vartheta(\lambda), \\ &\partial_\psi \nu(\lambda,0) = \varpi(\lambda), \end{aligned} \tag{4.2}$$

periyodik sınır koşulları

$$\begin{aligned} &\nu(0,\psi) = \nu(\pi,\psi), \\ &\partial_\lambda \nu(0,\psi) = \partial_\lambda \nu(\pi,\psi) \end{aligned} \tag{4.3}$$

ve ek koşul

$$\Gamma(\psi) = \int_0^\pi \lambda \nu(\lambda,\psi) d\lambda \tag{4.4}$$

ile birlikte ele alınmaktadır. Burada ϑ, ϖ ve Γ fonksiyonları $[0,\pi]$ aralığında, $\hbar(\lambda,\psi,\nu)$ fonksiyonu $\bar{\Omega} \times \{-\infty,\infty\}$ üzerinde tanımlı verilen fonksiyonlardır. $\varepsilon > 0$, küçük parametredir.

Problem (4.1)–(4.3)'ün çözümü Fourier yöntemiyle Denklem (4.5) şeklinde elde edilir:

$$\begin{aligned} \nu(\lambda,\psi) = {} & \frac{1}{2}\left(\vartheta_0 + \varpi_0 t + \frac{2}{\pi}\int_0^\psi \int_0^\pi (\psi - \sigma) r(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu) d\rho d\sigma \right) + \\ & \sum_{k=1}^{\infty}\left(\vartheta_{ck} \cos \wp_k \psi + \frac{\varpi_{ck}}{\wp_k} \sin \wp_k \psi \right) \cos 2k\lambda + \\ & \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\wp_k} \frac{2}{\pi} \int_0^\psi \int_0^\pi r(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu) \cos 2k\rho \sin \wp_k(\psi - \sigma) d\rho d\sigma \right) \cos 2k\lambda + \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\vartheta_{sk}\cos\wp_k\psi+\frac{\varpi_{sk}}{\alpha_k}\sin\wp_k\psi\right)\sin 2k\lambda+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}r(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu)\sin 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\tau\right)\sin 2k\lambda.$$

Burada,

$$\wp_k=\frac{2k}{\sqrt{1+4\varepsilon k^2}},$$

$$\vartheta_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\vartheta(\lambda)d\lambda,\ \vartheta_{ck}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\vartheta(\lambda)\cos 2k\lambda d\lambda,\ \vartheta_{sk}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\vartheta(\lambda)\sin 2k\lambda d\lambda,$$

$$\varpi_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varpi(\lambda)d\lambda,\varpi_{ck}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varpi(\lambda)\cos 2k\lambda d\lambda,\varpi_{sk}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varpi(\lambda)\sin 2k\lambda d\lambda.$$

Denklem (4.1)'in her iki tarafı λ değişkeni ile çarpılarak $[0,\pi]$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_0^{\pi}\nu_{\psi\psi}\lambda d\lambda-\varepsilon\int_0^{\pi}\nu_{\lambda\lambda\psi\psi}\lambda d\lambda-\int_0^{\pi}\nu_{\lambda\lambda}\lambda d\lambda=r(\psi)\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda$$

elde edilir. Birinci integralin $\Gamma''(\psi)$ olduğu dikkate alındığında, ikinci ve üçüncü integraller için kısmi integrasyon uygulanır. Denklem (4.5) kullanılarak ters katsayı $r(\psi)$ Denklem (4.6) şeklinde elde edilir:

$$r(\psi)=\frac{\Gamma''(\psi)+\varepsilon\varpi_{\psi}(\pi)-\varepsilon\varpi_{\psi}(0)}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda}+$$
$$\frac{\pi}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\left\{\left(\varepsilon\wp_k^2-1\right)\vartheta_{sk}\cos\wp_k\psi+\left(\varepsilon\wp_k-\frac{1}{\wp_k}\right)\varpi_{sk}\sin\wp_k\psi\right\}- \qquad (4.6)$$
$$\frac{\pi}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\left\{\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu)r(\sigma)d\rho d\sigma\right\}.$$

4.2.Çözümün Varlığı

Teorem 4.1.

K1. $\Gamma(\psi)\in C^2[0,\Psi]$, $r(\psi)\in C[0,\Psi]$,

K2. $\vartheta(\lambda)\in C^1[0,\pi]$, $\varpi(\lambda)\in C^1[0,\pi]$,

K3. $\hbar(\lambda,\psi,\nu)$ fonksiyonu $\Omega\times(-\infty,\infty)$'de her yerde sürekli olsun ve aşağıdaki koşulları sağlasın;

a) $\left|\frac{\partial^{(k)}\hbar(\lambda,\psi,\nu)}{\partial\lambda^{(k)}}-\frac{\partial^{(k)}\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})}{\partial\lambda^{(k)}}\right|\le|\nu-\bar{\nu}|\ell(\lambda,\psi),\ k=\overline{0,2}.$

Burada, $\ell(\lambda,\psi)\in L_2(\Omega)$, $\ell(\lambda,\psi)\ge 0$.

b) $\hbar(\lambda,\psi,\nu)\in C^1[0,\pi],\psi\in[0,\Psi]$, $|\hbar(\lambda,\psi,\nu)|\le M$.

c) $\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\ne 0,\ \forall\psi\in[0,\Psi]$.

K1-K3 koşulları sağlandığında, Denklem (4.1)-(4.4)'in çözümü var ve tektir.

İspat. Picard ardışık yaklaşım yöntemi kullanılarak, Denklem (4.5) ve (4.6) için ardışık yaklaşımlar aşağıdaki biçimde oluşturulur:

$$\begin{aligned}
\nu^{(N+1)}(\lambda,\psi)=&\frac{1}{2}\left(\vartheta_0+\varpi_0\psi+\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})r^{(N)}(\sigma)(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right)+\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\left(\cos(\wp_k\psi)\vartheta_{ck}+\frac{\sin(\wp_k\psi)}{\wp_k}\varpi_{ck}\right)\cos 2k\lambda+\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})r^{(N)}(\sigma)d\rho d\sigma\right)\cos 2k\lambda+\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\left(\cos(\wp_k\psi)\vartheta_{sk}+\frac{\sin(\wp_k\psi)}{\wp_k}\varpi_{sk}\right)\sin 2k\lambda+
\end{aligned}\tag{4.7}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})r^{(N)}(\sigma)d\rho d\sigma\right)\sin 2k\lambda,$$

$$r^{(N+1)}(\psi)=\frac{\Gamma''(\psi)+\varepsilon\varpi_{\psi}(\pi)-\varepsilon\varpi_{\psi}(0)}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(N)})\lambda d\lambda}+$$

$$\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\left\{\left(\varepsilon\wp_k^2-1\right)\vartheta_{sk}\cos\wp_k\psi+\left(\varepsilon\wp_k-\frac{1}{\wp_k}\right)\psi_{sk}\sin\wp_k\psi\right\}}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(N)})\lambda d\lambda}-$$

$$\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\left\{\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})r^{(N)}(\sigma)d\rho d\sigma\right\}}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(N)})\lambda d\lambda}. \quad (4.8)$$

Burada

$$\nu_0^{(0)}(\psi)=\vartheta_0+\varpi_0\psi,$$

$$\nu_{ck}^{(0)}(\psi)=\vartheta_{ck}\cos(2k\psi)+\frac{\varpi_{ck}}{2k}\sin(2k\psi),$$

$$\nu_{sk}^{(0)}(\psi)=\vartheta_{sk}\cos(2k\psi)+\frac{\varpi_{sk}}{2k}\sin(2k\psi).$$

Teorem gereği $\nu^{(0)}(\psi)\in \mathrm{B},\ \psi\in[0,\Psi]$ olduğu aşikardır.

$N=0$ için Denklem (4.7)'den,

$$\nu_0^{(1)}(\psi)=\vartheta_0+\varpi_0\psi+\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})d\rho d\sigma,$$

$$\nu_{ck}^{(1)}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\cos(\wp_k\psi)\vartheta_{ck}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\wp_k\psi}{\wp_k}\varpi_{ck}+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})d\rho d\sigma, \quad (4.9)$$

$$\nu_{sk}^{(1)}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta_{sk}\cos\wp_k\psi+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varpi_{sk}}{\wp_k}\sin\wp_k\psi+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})d\rho d\sigma$$

elde edilir. Denklem (4.9) için $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma$ ifadesi eklenip çıkarılırsa ve mutlak değeri alınırsa,

$$\left|\nu_0^{(1)}(\psi)\right|\le\left|\vartheta_0\right|+\left|\varpi_0\psi\right|+\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right](\psi-\sigma)r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$
$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,0)(\psi-\sigma)r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\nu_{ck}^{(1)}(\psi)\right|\le$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{ck}\right|+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\varpi_{ck}}{\wp_k}\right|+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma\right|+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)r^{(0)}(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\nu_{sk}^{(1)}(\psi)\right|\le$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{sk}\right|+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\varpi_{sk}}{\wp_k}\right|+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\mathrm{in}\,\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|$$

elde edilir. Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\nu_0^{(1)}(\psi)\right|\le\left|\vartheta_0\right|+\left|\varpi_0\psi\right|+\left(\int_0^{\psi}(\psi-\sigma)^2d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho\right\}^2d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$\left(\int_0^{\psi}(\psi-\sigma)^2d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)d\rho\right\}^2d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{ck}^{(1)}(\psi)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{ck}\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\varpi_{ck}}{\wp_k}\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\left(\int_0^{\psi} d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\left(\int_0^{\psi} d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{sk}^{(1)}(\psi)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{sk}\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\varpi_{sk}}{\wp_k}\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\left(\int_0^{\psi} d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\left(\int_0^{\psi} d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)r^{(0)}(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. ν_{ck} ve ν_{sk} katsayıları için Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\nu_0^{(1)}(\psi)\right| \le \left|\vartheta_0\right| + \left|\varpi_0\psi\right| + 2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{ck}^{(1)}(\psi)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{ck}\right| + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varpi_{ck}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\right\}^2\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{sk}^{(1)}(\psi)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{sk}\right| + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varpi_{sk}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Burada,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}.$$

Aynı şekilde, ν_{ck} ve ν_{sk} katsayıları için Bessel eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\nu_0^{(1)}(\psi)\right| \le \left|\vartheta_0\right| + \left|\varpi_0\psi\right| + 2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{ck}^{(1)}(\psi)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{ck}\right| + \sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varpi_{ck}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$2\sqrt{\frac{\pi\psi}{24}+\frac{\varepsilon\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$2\sqrt{\frac{\pi\psi}{24}+\frac{\varepsilon\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{sk}^{(1)}(\psi)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{sk}\right| + \sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varpi_{sk}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$2\sqrt{\frac{\pi\psi}{24}+\frac{\varepsilon\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$2\sqrt{\frac{\pi t}{24}+\frac{\varepsilon t}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Lipschitz koşulu uygulanırsa,

$$\left|\nu_0^{(1)}(\psi)\right|\le\left|\vartheta_0\right|+\left|\varpi_0\psi\right|+2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\ell(\rho,\sigma)\left|\nu^{(0)}(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{ck}^{(1)}(\psi)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{ck}\right|+\sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varpi_{ck}\right|+2\sqrt{\frac{\pi\psi}{24}+\frac{\varepsilon\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$2\sqrt{\frac{\pi\psi}{24}+\frac{\varepsilon\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\ell(\rho,\sigma)\left|\nu^{(0)}(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{sk}^{(1)}(\psi)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{sk}\right|+\sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varpi_{sk}\right|+2\sqrt{\frac{\pi\psi}{24}+\frac{\varepsilon\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$2\sqrt{\frac{\pi\psi}{24}+\frac{\varepsilon\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\ell(\rho,\sigma)\left|\nu^{(0)}(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

elde edilir. Elde edilen $\nu_0^{(1)}(\psi),\nu_{ck}^{(1)}(\psi)$ ve $\nu_{sk}^{(1)}(\psi)$ katsayılarına ilişkin olarak ayrı ayrı elde edilen eşitsizliklerin her tarafının ψ'ye göre maksimumu alınarak, başlangıçta tanımlanan

$$\left\|\nu^{(1)}(\psi)\right\|=\max_{0\le\psi\le\Psi}\frac{\left|\nu_0^{(1)}(\psi)\right|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\max_{0\le\psi\le\Psi}\left|\nu_{ck}^{(1)}(\psi)\right|+\max_{0\le\psi\le\Psi}\left|\nu_{sk}^{(1)}(\psi)\right|\right]$$

norm ifadesi altında bir arada yazılırsa,

$$\left\|\nu^{(1)}(\psi)\right\|\le\frac{\left\|\vartheta_0\right\|+\left\|\varpi_0\right\|\left|\Psi\right|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\vartheta_{ck}\right\|+\left\|\vartheta_{sk}\right\|\right)+\sqrt{\frac{\pi^2}{6}+\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\varpi_{ck}\right\|+\left\|\varpi_{sk}\right\|\right)+$$

$$\left(\Psi^2\sqrt{\frac{\pi\Psi}{3}}+4\Psi\sqrt{\frac{\Psi\pi^3}{24}+\pi\Psi\varepsilon}\right)\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|r^{(0)}(\psi)\right\|\left\|u^{(0)}(\psi)\right\|+$$
$$\left(\Psi^2\sqrt{\frac{\pi\Psi}{3}}+4\Psi\sqrt{\frac{\Psi\pi^3}{24}+\pi\Psi\varepsilon}\right)\left\|\hbar(\lambda,\psi,0)\right\|\left\|r^{(0)}(\psi)\right\|$$

elde edilir. Teorem 4.1'de verilen koşullar altında,

$$\left\|\nu^{(1)}(\psi)\right\|<\infty$$

olduğu görülmektedir.

Denklem (4.8) için $\vartheta_{sk}=\frac{\vartheta'_{ck}}{2k}$ ve $\hbar_{sk}=\frac{\hbar'_{ck}}{2k}$ olduğu dikkate alındığında,

$$r^{(N+1)}(\psi)=$$
$$\frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k\cos(\wp_k\psi)\vartheta'_{ck}+b_k\sin(\wp_k\psi)\varpi_{sk}\right\}+\Gamma''(\psi)+\varepsilon\varpi_{\psi}(\pi)-\varepsilon\varpi_{\psi}(0)}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(N)})d\lambda}+ \qquad (4.10)$$
$$\frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)r^{(N)}(\sigma)\hbar'(\rho,\sigma,\nu^{(N)})d\rho d\sigma\right\}}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(N)})d\lambda}$$

olur. Burada, $a_k=\frac{1}{1+4\varepsilon k^2}, b_k=\frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon k^2}}$.

$N=0$ için Denklem (4.10),

$$r^{(1)}(\psi)=\frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k\cos(\wp_k\psi)\vartheta'_{ck}+b_k\sin(\wp_k\psi)\varpi_{sk}\right\}+\Gamma''(\psi)+\varepsilon\varpi_{\psi}(\pi)-\varepsilon\varpi_{\psi}(0)}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(0)})d\lambda}+$$

$$-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)r^{(0)}(\sigma)\hbar'(\rho,\sigma,\nu^{(0)})d\rho d\sigma\right\}$$
$$\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(0)})d\lambda$$

olur. Son denklem için $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma$ ifadesi eklenip çıkarılarak ve mutlak değer alındıktan sonra Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|r^{(1)}(\psi)\right|\le\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\left(\int_0^{\psi}d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)r^{(0)}(\sigma)[\hbar'(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar'(\rho,\sigma,0)]d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\left(\int_0^{\psi}d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)r^{(0)}(\sigma)\hbar'(\rho,\sigma,0)d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$\frac{2}{\pi^2 M}\left(\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|a_k\vartheta'_{ck}\right|+\left|b_k\varpi'_{ck}\right|\right)+\left|\varepsilon\varpi_{\psi}(\pi)\right|+\left|\varepsilon\varpi_{\psi}(0)\right|+\left|\Gamma''(\psi)\right|\right)$$

elde edilir. Burada,

$$\left|\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(0)})d\lambda\right|\le\frac{\pi^2 M}{2}.$$

Elde edilen eşitsizliğe Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|r^{(1)}(\psi)\right|\le\frac{2}{\pi M}\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\vartheta'_{ck}|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\varpi'_{ck}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)+$$
$$\frac{2\left(\left|\varepsilon\varpi_{\psi}(\pi)\right|+\left|\varepsilon\varpi_{\psi}(0)\right|+\left|\Gamma''(\psi)\right|\right)}{\pi^2 M}+\frac{4}{\pi M}\sqrt{\frac{\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)r^{(0)}(\sigma)[\hbar'(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar'(\rho,\sigma,0)]\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\frac{4}{\pi M}\sqrt{\frac{\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)r^{(0)}(\sigma)\hbar'(\rho,\sigma,0)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|r^{(1)}(\psi)\right|\le\frac{2}{\pi M}\left(\mu\sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta'_{ck}\right|+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varpi'_{ck}\right|\right)+\frac{2\left(\left|\varepsilon\varpi_{\psi}(\pi)\right|+\left|\varepsilon\varpi_{\psi}(0)\right|+\left|\Gamma''(\psi)\right|\right)}{\pi^2 M}+$$

$$\frac{4}{\pi M}\sqrt{\frac{\psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\left[\hbar'(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar'(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\frac{4}{\pi M}\sqrt{\frac{\psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\hbar'(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Burada

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\mu,\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|b_k\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\eta,\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{\pi^2}{6}+\varepsilon}.$$

Lipschitz koşulu uygulanırsa,

$$\left|r^{(1)}(\psi)\right|\le\frac{2}{\pi M}\left(\mu\sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta'_{ck}\right|+\eta\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varpi'_{ck}\right|\right)+\frac{2\left(\left|\varepsilon\varpi_{\psi}(\pi)\right|+\left|\varepsilon\varpi_{\psi}(0)\right|+\left|\Gamma''(\psi)\right|\right)}{\pi^2 M}$$

$$\frac{4}{\pi M}\sqrt{\frac{\psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\ell(\rho,\sigma)\nu^{(0)}(\sigma)\right\}^2\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\frac{4}{\pi M}\sqrt{\frac{\psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\hbar'(\rho,\sigma,0)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Son olarak, her tarafının maksimumu alınırsa,

$$\left\|r^{(1)}(\psi)\right\|\le\frac{2}{\pi M}\left(\mu\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\vartheta'_{ck}\right\|+\eta\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\varpi'_{ck}\right\|\right)+\frac{2\left(\left|\varepsilon\varpi_{\psi}(\pi)\right|+\left|\varepsilon\varpi_{\psi}(0)\right|+\left|\Gamma''(\psi)\right|\right)}{\pi^2 M}+$$

$$\frac{4|\Psi|\sqrt{\Psi}}{M}\sqrt{\frac{\pi}{24}+\frac{\varepsilon}{\pi}}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|r^{(0)}(\psi)\right\|\left\|\nu^{(0)}(\psi)\right\|+\frac{4|\Psi|\sqrt{\Psi}}{M}\sqrt{\frac{\pi}{24}+\frac{\varepsilon}{\pi}}\left\|r^{(0)}(\psi)\right\|M$$

bulunur.

Tümevarım yöntemine göre, aynı işlemler $N+1.$iterasyona kadar sürdürülürse,

$$\left\|\nu^{(N+1)}(\psi)\right\| \le \frac{\left\|\vartheta_0\right\|+\left\|\varpi_0\right\|\left|\Psi\right|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\vartheta_{ck}\right\|+\left\|\vartheta_{sk}\right\|\right)+\sqrt{\frac{\pi^2}{6}+\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\varpi_{ck}\right\|+\left\|\varpi_{sk}\right\|\right)+$$
$$\left(\Psi^2\sqrt{\frac{\pi\Psi}{3}}+4\Psi\sqrt{\frac{\Psi\pi^3}{24}+\pi\Psi\varepsilon}\right)\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|r^{(N)}(\psi)\right\|\left\|\nu^{(N)}(\psi)\right\|+$$
$$\left(\Psi^2\sqrt{\frac{\pi\Psi}{3}}+4\Psi\sqrt{\frac{\Psi\pi^3}{24}+\pi\Psi\varepsilon}\right)M\left\|r^{(N)}(\psi)\right\|,$$

$$\left\|r^{(N+1)}(\psi)\right\| \le \frac{2}{\pi M}\left(\mu\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\vartheta'_{ck}\right\|+\eta\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\varpi'_{ck}\right\|\right)+\frac{2\left(\left|\varepsilon\varpi_{\psi}(\pi)\right|+\left|\varepsilon\varpi_{\psi}(0)\right|+\left|\Gamma''(\psi)\right|\right)}{\pi^2 M}+$$
$$\frac{4\left|\Psi\right|\sqrt{\Psi}}{M}\sqrt{\frac{\pi}{24}+\frac{\varepsilon}{\pi}}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|r^{(N)}(\psi)\right\|\left\|\nu^{(N)}(\psi)\right\|+4\left|\Psi\right|\sqrt{\Psi}\sqrt{\frac{\pi}{24}+\frac{\varepsilon}{\pi}}\left\|r^{(N)}(\psi)\right\|$$

elde edilir. Teoremden koşulları gereği ve $\nu^{(N)}(\psi)\in \mathrm{B}$ olduğundan, $\nu^{(N+1)}(\psi)\in B$'dır.

4.3.Ardışık Yaklaşımların Yakınsaklığı

Ardışık yaklaşımların yakınsaklığını göstermek için ardışık terimler arasındaki farklar ele alınır:

$$\nu_0^{(1)}(\psi)-\nu_0^{(0)}(\psi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}r^{(0)}(\sigma)(\psi-\tau)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})d\rho d\sigma,$$

$$\nu_{ck}^{(1)}(\psi)-\nu_{ck}^{(0)}(\psi)=\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})d\rho d\sigma,$$

$$\nu_{sk}^{(1)}(\psi)-\nu_{sk}^{(0)}(\psi)=\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})d\rho d\sigma.$$

Elde edilen farklara $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma$ ifadesi eklenip çıkarılırsa ve mutlak değeri alınırsa,

$$\left|\nu_0^{(1)}(\psi)-\nu_0^{(0)}(\psi)\right|\le\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right](\psi-\sigma)r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,0)(\psi-\sigma)r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\nu_{ck}^{(1)}(\psi)-\nu_{ck}^{(0)}(\psi)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\nu_{sk}^{(1)}(t)-\nu_{sk}^{(0)}(t)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|$$

elde edilir. Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\nu_0^{(1)}(\psi)-\nu_0^{(0)}(\psi)\right|\le$$

$$\left(\int_0^{\psi}(\psi-\sigma)^2d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}r^{(0)}(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]d\rho\right\}^2d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\left(\int_0^{\psi}(\psi-\sigma)^2d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho\right\}^2d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{ck}^{(1)}(\psi)-\nu_{ck}^{(0)}(\psi)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\left(\int_0^{\psi}d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)d\rho\right\}^2d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\left(\int_0^{\psi}d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)d\rho\right\}^2d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{sk}^{(1)}(\psi)-\nu_{sk}^{(0)}(\psi)\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\left(\int_0^{\psi}d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\left(\int_0^{\psi}d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\left(\int_0^{\psi}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)d\rho\right\}^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

elde edilir. ν_{ck} ve ν_{sk} katsayıları için Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\nu_0^{(1)}(\psi)-\nu_0^{(0)}(\psi)\right|\leq 2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{ck}^{(1)}(\psi)-\nu_{ck}^{(0)}(\psi)\right|\leq 2\sqrt{\frac{\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$2\sqrt{\frac{\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{sk}^{(1)}(\psi)-\nu_{sk}^{(0)}(\psi)\right|\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$2\sqrt{\frac{\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$2\sqrt{\frac{\psi}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\sin\wp_k(\psi-\sigma)(\sin 2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Burada,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\,.$$

Aynı şekilde, ν_{ck} ve ν_{sk} katsayıları için Bessel eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\nu_0^{(1)}(\psi)-\nu_0^{(0)}(\psi)\right|\le 2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{ck}^{(1)}(\psi)-\nu_{ck}^{(0)}(\psi)\right|\le 2\sqrt{\frac{\psi\pi}{24}+\frac{\psi}{\pi}\varepsilon}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$2\sqrt{\frac{\psi\pi}{24}+\frac{\psi}{\pi}\varepsilon}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{sk}^{(1)}(\psi)-\nu_{sk}^{(0)}(\psi)\right|\le 2\sqrt{\frac{\psi\pi}{24}+\frac{\psi}{\pi}\varepsilon}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$2\sqrt{\frac{\psi\pi}{24}+\frac{\psi}{\pi}\varepsilon}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Lipschitz koşulu uygulanırsa,

$$\left|\nu_0^{(1)}(\psi)-\nu_0^{(0)}(\psi)\right|\le 2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\ell(\rho,\sigma)\nu^{(0)}(\sigma)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\rho,\sigma,0)r^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{ck}^{(1)}(\psi)-\nu_{ck}^{(0)}(\psi)\right|\le 2\sqrt{\frac{\psi\pi}{24}+\frac{\psi}{\pi}\varepsilon}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$2\sqrt{\frac{\psi\pi}{24}+\frac{\psi}{\pi}\varepsilon}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\ell(\rho,\sigma)v^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|v_{sk}^{(1)}(\psi)-v_{sk}^{(0)}(\psi)\right|\le 2\sqrt{\frac{\psi\pi}{24}+\frac{\psi}{\pi}\varepsilon}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$2\sqrt{\frac{\psi\pi}{24}+\frac{\psi}{\pi}\varepsilon}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r^{(0)}(\sigma)\ell(\rho,\sigma)v^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizliklerin her tarafının ψ'ye göre maksimumu alınarak, bir araya getirilirse,

$$\left\|v^{(1)}(\psi)-v^{(0)}(\psi)\right\|\le\left(\Psi^2\sqrt{\frac{\pi\Psi}{3}}+4\Psi\sqrt{\frac{\Psi\pi^3}{24}+\pi\Psi\varepsilon}\right)\left\|\hbar(\lambda,\psi,0)\right\|\left\|r^{(0)}(\psi)\right\|+$$

$$\left(\Psi^2\sqrt{\frac{\pi\Psi}{3}}+4\Psi\sqrt{\frac{\Psi\pi^3}{24}+\pi\Psi\varepsilon}\right)\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|r^{(0)}(\psi)\right\|\left\|v^{(0)}(\psi)\right\|$$

elde edilir. Bu eşitsizlik, teoremde verilen koşullar altında sınırlıdır.

$$K:=\left\|v^{(1)}(\psi)-v^{(0)}(\psi)\right\|<\infty. \tag{4.11}$$

belirlensin.

Benzer şekilde, ters katsayı için ardışık fark,

$$r^{(1)}(\psi)-r^{(0)}(\psi)=$$

$$\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)r^{(1)}(\sigma)\hbar'(\rho,\sigma,v^{(1)})d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}-$$

$$\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)r^{(0)}(\sigma)\hbar'(\rho,\sigma,v^{(0)})d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

ele alınır. Son denkleme $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}r^{(1)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,v^{(0)})d\rho d\sigma$ eklenip çıkarılırsa ve mutlak değeri alınırsa,

$$\left|r^{(1)}(\psi)-r^{(0)}(\psi)\right|\leq$$

$$\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[r^{(1)}(\sigma)-r^{(0)}(\sigma)\right]\hbar'(\rho,\sigma,\nu^{(1)})d\rho d\sigma\right|+$$

$$\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)r^{(1)}(\sigma)\left[\hbar'(\rho,\sigma,\nu^{(1)})-\hbar'(\rho,\sigma,\nu^{(0)})\right]d\rho d\sigma\right|$$

elde edilir. Burada,

$$\left|\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(1)})\lambda d\lambda\right|\leq\frac{M\pi^2}{2}\ \text{ve}\ \left|\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(0)})\lambda d\lambda\right|\leq\frac{M\pi^2}{2}.$$

Elde edilen eşitsizliğe sırasıyla Cauchy, Hölder, Bessel eşitsizlikleri ile Lipschitz koşulu uygulanırsa ve maksimumu alınırsa,

$$\left\|r^{(1)}(\psi)-r^{(0)}(\psi)\right\|\leq R\left\|r^{(1)}(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu^{(1)}(\psi)-\nu^{(0)}(\psi)\right\|+RM\left\|r^{(1)}(\psi)-r^{(0)}(\psi)\right\|$$

elde edilir. Düzenlemelerden sonra,

$$\left\|r^{(1)}(\psi)-r^{(0)}(\psi)\right\|\leq\frac{R}{1-RM}\left\|r^{(1)}(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu^{(1)}(\psi)-\nu^{(0)}(\psi)\right\| \qquad (4.12)$$

elde edilir. Burada,

$$R=\frac{4|\Psi|}{M}\sqrt{\frac{\Psi\pi}{24}+\frac{\Psi\varepsilon}{\pi}}\ \text{ve}\ \mathrm{M}=\left\|\hbar'(\lambda,\psi,\nu^{(0)})\right\|.$$

Yeniden,

$$\nu_0^{(2)}(\psi)-\nu_0^{(1)}(\psi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}r^{(1)}(\sigma)(t-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(1)})d\rho d\sigma+$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})(\psi-\sigma)r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma,$$

$$\nu_{ck}^{(2)}(\psi)-\nu_{ck}^{(1)}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(1)})r^{(1)}(\sigma)d\rho d\sigma-$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})r^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma,$$

$$\nu_{sk}^{(2)}(\psi)-\nu_{sk}^{(1)}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)r^{(1)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(1)})d\rho d\sigma-$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)r^{(0)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})d\rho d\sigma$$

farkı alınsın. $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}r^{(1)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})d\rho d\sigma$ ifadesi eklenip çıkarılırsa ve ardından mutlak değeri alınırsa,

$$\left|\nu_0^{(2)}(\psi)-\nu_0^{(1)}(\psi)\right|\le\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(1)})-\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})\right]r^{(1)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})\left[r^{(1)}(\sigma)-r^{(0)}(\sigma)\right]d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\nu_{ck}^{(2)}(\psi)-\nu_{ck}^{(1)}(\psi)\right|\le$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[r^{(1)}(\sigma)-r^{(0)}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\tau)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(1)})-\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})\right]r^{(1)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\nu_{sk}^{(2)}(\psi)-\nu_{sk}^{(1)}(\psi)\right|\le$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[r^{(1)}(\sigma)-r^{(0)}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\tau)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(1)})-\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})\right]r^{(1)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|$$

olur. Cauchy, Bessel, Hölder eşitsizlikleri ve Lipschitz koşulu uygulanırsa, maksimumu alınırsa,

$$\left\|\nu^{(2)}(\psi)-\nu^{(1)}(\psi)\right\| \leq$$
$$\left(\Psi^2\sqrt{\frac{\pi\Psi}{3}}+4\Psi\sqrt{\pi\Psi\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\right)\left\|r^{(1)}(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu^{(1)}(\psi)-\nu^{(0)}(\psi)\right\|+ \tag{4.13}$$
$$\left(\Psi^2\sqrt{\frac{\pi\Psi}{3}}+4\Psi\sqrt{\pi\Psi\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\right)\left\|r^{(1)}(\psi)-r^{(0)}(\psi)\right\|\left\|\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(0)})\right\|$$

elde edilir. Denklem (4.12), Denklem (4.13)'de yerine yazıldığında,

$$\left\|\nu^{(2)}(\psi)-\nu^{(1)}(\psi)\right\| \leq \left(\frac{A}{1-RM}\right)\left\|r^{(1)}(\psi)\right\|\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\ell(\rho,\sigma)\left|\nu^{(1)}(\sigma)-\nu^{(0)}(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.14}$$

elde edilir. Denklem (4.11), Denklem (4.14)'te yerine yazıldığında,

$$\left\|\nu^{(2)}(\psi)-\nu^{(1)}(\psi)\right\| \leq \left(\frac{A}{1-RM}\right)K\left\|r^{(1)}(\psi)\right\|\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\ell^2(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.15}$$

elde edilir. Burada,

$$A=\Psi^2\sqrt{\frac{\pi\Psi}{3}}+4\Psi\sqrt{\pi\Psi\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)},\ R=\frac{4|\Psi|}{M}\sqrt{\frac{\Psi\pi}{24}+\frac{\mathrm{T}\varepsilon}{\pi}}\ \text{ve}\ \mathrm{M}=\left\|\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(0)})\right\|.$$

Aynı yöntemler sonraki fark için uygulanırsa,

$$\left\|r^{(2)}(\psi)-r^{(1)}(\psi)\right\| \leq \frac{R\left\|r^{(2)}(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|}{1-RM}\left\|\nu^{(2)}(\psi)-\nu^{(1)}(\psi)\right\|, \tag{4.16}$$

$$\left\|\nu^{(3)}(\psi)-\nu^{(2)}(\psi)\right\| \leq A\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|r^{(2)}(\psi)\right\|\left\|\nu^{(2)}(\psi)-\nu^{(1)}(\psi)\right\|+$$
$$A\left\|\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(1)})\right\|\left\|r^{(2)}(\psi)-r^{(1)}(\psi)\right\| \tag{4.17}$$

elde edilir. Denklem (4.16), Denklem (4.17)'de yerine yazıldığında,

$$\left\|\nu^{(3)}(\psi)-\nu^{(2)}(\psi)\right\| \leq \left(\frac{A}{1-RM}\right)\left\|r^{(2)}(\psi)\right\|\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\ell(\rho,\sigma)\left|\nu^{(2)}(\sigma)-\nu^{(1)}(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.18}$$

elde edilir. Denklem (4.15), Denklem (4.18)'de yerine yazıldığında,

$$\left\|v^{(3)}(\psi)-v^{(2)}(\psi)\right\| \leq$$

$$\left(\frac{A}{1-RM}\right)^2 K\left\|r^{(1)}(\psi)\right\|\left\|r^{(2)}(\psi)\right\|\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\ell^2(\rho,\sigma)\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\ell^2(\tilde{\rho},\tilde{\sigma})d\tilde{\rho}d\tilde{\sigma}\right)d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. İntegral için değişken değiştirme yöntemi uygulanırsa,

$$\left\|v^{(3)}(\psi)-v^{(2)}(\psi)\right\| \leq \left(\frac{A}{1-RM}\right)^2 K\left\|r^{(1)}(\psi)\right\|\left\|r^{(2)}(\psi)\right\|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\ell^2(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir.

Eğer N+1. iterasyona kadar sürekli olarak aynı yöntemler uygulanırsa,

$$\left\|v^{(N+1)}(\psi)-v^{(N)}(\psi)\right\| \leq \left(\frac{A}{1-RM}\right)^N K\prod_{i=1}^{N}\left\|r^{(i)}(\psi)\right\|\frac{1}{\sqrt{N!}}\left(\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\ell^2(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right)^N\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.19}$$

$$\left\|r^{(N+1)}(\psi)-r^{(N)}(\psi)\right\| \leq \frac{R}{1-RM}\left\|r^{(N)}(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|v^{(N+1)}(\psi)-v^{(N)}(\psi)\right\| \tag{4.20}$$

edilir. Sonuç olarak, $N\to\infty$ iken $v^{(N+1)}\to v^{(N)}$ ve $r^{(N+1)}\to r^{(N)}$ olur.

4.4.Kesin Çözüm ile Ardışık Çözümün Farkın Değerlendirilmesi

Bu bölümde, aşağıdaki limitin sağlandığı gösterilecektir:

$$\lim_{N\to\infty} v^{(N+1)}(\psi,\varepsilon)=v(\psi,\varepsilon),\ \lim_{N\to\infty} r^{(N+1)}(\psi)=r(\psi).$$

Öncelikle, ters katsayı için aşağıdaki fark ele alınır:

$$r(\psi)-r^{(N+1)}(\psi)=\frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}2k\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu)r(\sigma)d\rho d\sigma}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda}+$$

$$\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}2k\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N+1)})r^{(N+1)}(\sigma)d\rho d\sigma}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(N+1)})\lambda d\lambda}.$$

Son denklem için $\hbar_{sk}=\frac{\hbar'_{ck}}{2k}$ olduğu dikkate alınırsa,

$$r(\psi)-r^{(N+1)}(\psi)=\frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)r(\sigma)\hbar'(\rho,\sigma,\nu)d\rho d\sigma}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda}+$$

$$\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)r^{(N+1)}(\sigma)\hbar'(\rho,\sigma,\nu^{(N+1)})d\rho d\sigma}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(N+1)})\lambda d\lambda}$$

olur. $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}r(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N+1)})d\rho d\sigma$ ifadesi eklenip çıkarılarsa ve mutlak değeri alınırsa,

$$\left|r(t)-r^{(N+1)}(t)\right|\le$$

$$\frac{2\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{t}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(t-\sigma)\sin(2k\rho)\left[r(\sigma)-r^{(N+1)}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,u^{(N+1)})d\rho d\sigma\right|}{\pi M}+$$

$$\frac{2\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{t}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(t-\sigma)\sin(2k\rho)r(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,u)-\hbar(\rho,\sigma,u^{(N+1)})\right]d\rho d\sigma\right|}{\pi M}$$

elde edilir. Burada,

$$\left|\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda\right|\le\frac{\pi^2M}{2}\quad\text{ve}\quad\left|\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(N+1)})\lambda d\lambda\right|\le\frac{\pi^2M}{2}.$$

Elde edilen eşitsizliğe sırasıyla Cauchy, Hölder, Bessel eşitsizlikleri ile Lipschitz koşulu uygulanarak maksimumu alınırsa,

$$\left\|r(\psi)-r^{(N+1)}(\psi)\right\| \le \frac{4|\Psi|}{M}\sqrt{\frac{\Psi\pi}{6}+\frac{\Psi\varepsilon}{\pi}}\left\|r(\psi)-r^{(N+1)}(\psi)\right\|\left\|\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(N+1)})\right\| +$$

$$\frac{4|\Psi|}{M}\sqrt{\frac{\Psi\pi}{6}+\frac{\Psi\varepsilon}{\pi}}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|r(\psi)\right\|\left\|\nu(\psi)-\nu^{(N+1)}(\psi)\right\|$$

elde edilir. Düzenlemelerden sonra,

$$\left\|r(\psi)-r^{(N+1)}(\psi)\right\| \le \frac{R\left\|r(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|}{1-RM}\left\|\nu(\psi)-\nu^{(N+1)}(\psi)\right\| \tag{4.21}$$

elde edilir. Burada,

$$R=\frac{4|\Psi|}{M}\sqrt{\frac{\Psi\pi}{6}+\frac{\Psi\varepsilon}{\pi}} \text{ ve } M=\left\|\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(N+1)})\right\|.$$

Kesin çözüm ile ardışık çözümün farkı alınırsa,

$$\nu_0(\psi)-\nu_0^{(N+1)}(\psi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)r(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu)d\rho d\sigma -$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)r^{(N)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})d\rho d\sigma,$$

$$\nu_{ck}(\psi)-\nu_{ck}^{(N+1)}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)r(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu)d\rho d\sigma -$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)r^{(N)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})d\rho d\sigma,$$

$$\nu_{sk}(\psi)-\nu_{sk}^{(N+1)}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)r(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu)d\rho d\sigma -$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)r^{(N)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})d\rho d\sigma$$

olur. Son denklem için

$$\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}r(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})d\rho d\sigma,\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}r(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N+1)})d\rho d\sigma,\ \int_0^{\psi}\int_0^{\pi}r^{(N+1)}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})d\rho d\sigma$$

ifadeleri eklenip çıkarılırsa ve mutlak değeri alınırsa,

$$\left|\nu_0(\psi)-\nu_0^{(N+1)}(\psi)\right|\le\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)r(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu)-\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N+1)})\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[r^{(N+1)}(\sigma)-r^{(N)}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[r(\sigma)-r^{(N+1)}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)r(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N+1)})-\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})\right]d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\nu_{ck}(\psi)-\nu_{ck}^{(N+1)}(\psi)\right|\le$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[r(\sigma)-r^{(N+1)}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu)-\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N+1)})\right]r(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[r^{(N+1)}(\sigma)-r^{(N)}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N+1)})-\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})\right]r(\sigma)d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\nu_{sk}(\psi)-\nu_{sk}^{(N+1)}(\psi)\right|\le$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[r(\sigma)-r^{(N+1)}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu)-\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N+1)})\right]r(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[r^{(N+1)}(\sigma)-r^{(N)}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N+1)})-\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})\right]r(\sigma)d\rho d\sigma\right|$$

elde edilir. Sırasıyla Cauchy, Hölder ile Bessel eşitsizlikleri ile Lipschitz koşulu uygulanılarak maksimumu alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&\left\|\nu(\psi)-\nu^{(N+1)}(\psi)\right\| \leq \\
&\left(\Psi^2\sqrt{\frac{\pi\Psi}{3}}+4\Psi\sqrt{\pi\Psi\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\right)\|r(\psi)\|\|\ell(\lambda,\psi)\|\left\|\nu(\psi)-\nu^{(N+1)}(\psi)\right\|+ \\
&\left(\Psi^2\sqrt{\frac{\pi\Psi}{3}}+4\Psi\sqrt{\pi\Psi\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\right)\left\|r^{(N+1)}(\psi)-r^{(N)}(\psi)\right\|\left\|\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(N)})\right\|+ \\
&\left(\Psi^2\sqrt{\frac{\pi\Psi}{3}}+4\Psi\sqrt{\pi\Psi\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\right)\left\|r(\psi)-r^{(N+1)}(\psi)\right\|\left\|\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(N)})\right\|+ \\
&\left(\Psi^2\sqrt{\frac{\pi\Psi}{3}}+4\Psi\sqrt{\pi\Psi\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\right)\|r(\psi)\|\|\ell(\lambda,\psi)\|\left\|\nu^{(N+1)}(\psi)-\nu^{(N)}(\psi)\right\|
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

elde edilir. Denklem (4.20) ve (4.21), Denklem (4.22)'de yerine yazıldığında,

$$
\begin{aligned}
&\left\|\nu(\psi)-\nu^{(N+1)}(\psi)\right\| \leq \left(\frac{A}{1-RM}\right)\|\ell(\lambda,\psi)\|\|r(\psi)\|\left\|\nu(\psi)-\nu^{(N+1)}(\psi)\right\|+ \\
&\left(\frac{ARM}{1-RM}\|\ell(\lambda,\psi)\|\left\|r^{(N+1)}(\psi)\right\|+A\|r(\psi)\|\|\ell(\lambda,\psi)\|\right)\left\|\nu^{(N+1)}(\psi)-\nu^{(N)}(\psi)\right\|
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

elde edilir. Burada,

$$
A=\Psi^2\sqrt{\frac{\pi\Psi}{3}}+4\Psi\sqrt{\pi\Psi\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}.
$$

Denklem (4.19), Denklem (4.23)'de yerine yazıldığında,

$$
\begin{aligned}
&\left\|\nu(\psi)-\nu^{(N+1)}(\psi)\right\| \leq \left(\frac{A}{1-RM}\right)\|\ell(\lambda,\psi)\|\|r(\psi)\|\left\|\nu(\psi)-\nu^{(N+1)}(\psi)\right\|+ \\
&\left(\frac{ARM}{1-RM}\left\|r^{(N+1)}(\psi)\right\|+A\|r(\psi)\|\right)\left(\frac{A}{1-RM}\right)^N K\prod_{i=1}^{N}\left\|r^{(i)}(\psi)\right\|\frac{\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|^{N+1}}{\sqrt{(N+1)!}}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son eşitsizliğe $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$ eşitsizliği uygulanırsa,

$$
\left\|\nu(\psi)-\nu^{(N+1)}(\psi)\right\|^2 \leq 2\left(\frac{A}{1-RM}\right)^2\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r(\sigma)\ell(\rho,\sigma)\left|\nu(\sigma)-\nu^{(N+1)}(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)+
$$

$$2\left(\left(\frac{ARM}{1-RM}\left\|r^{(N+1)}(\psi)\right\|+A\left\|r(\psi)\right\|\right)\left(\frac{A}{1-RM}\right)^{N}K\prod_{i=1}^{N}\left\|r^{(i)}(\psi)\right\|\frac{\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|^{N+1}}{\sqrt{(N+1)!}}\right)^{2}$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizliğe Gronwall eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left\|\nu(\psi)-\nu^{(N+1)}(\psi)\right\|^{2}\le 2Ae^{2\left(\frac{A}{1-RM}\right)^{2}\left(\int_{0}^{\psi}\int_{0}^{\pi}\{r(\sigma)\ell(\rho,\sigma)\}^{2}d\rho d\sigma\right)}\left(\frac{RM}{1-RM}\left\|r^{(N+1)}(\psi)\right\|+\left\|r(\psi)\right\|\right)^{2}$$

$$\left(\left(\frac{A}{1-RM}\right)^{N}K\prod_{i=1}^{N}\left\|r^{(i)}(\psi)\right\|\frac{\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|^{N+1}}{\sqrt{(N+1)!}}\right)^{2}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $N\to\infty$ iken, $\nu^{(N+1)}(\psi)$ yaklaşık çözümü $\nu(\psi)$'ye yakınsar.

4.5.Çözümün Tekliği

(4.1)–(4.4) probleminin (ν,r) ve (w,l) olmak üzere iki farklı çözümünün olduğu varsayılsın. Öncelikle, ters katsayıların farkı ele alınır;

$$r(\psi)-l(\psi)=\frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\left\{\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\psi}\int_{0}^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\tau)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu)r(\sigma)d\rho d\sigma\right\}}{\int_{0}^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda}-$$

$$\frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\left\{\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\psi}\int_{0}^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,w)l(\sigma)d\rho d\sigma\right\}}{\int_{0}^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,w)\lambda d\lambda}.$$

Son denklem için $\hbar'_{sk}=\frac{\hbar'_{ck}}{2k}$ olduğu dikkate alındığında,

$$r(\psi)-l(\psi)=\frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\psi}\int_{0}^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\tau)\cos(2k\rho)\hbar'(\rho,\sigma,\nu)r(\sigma)d\rho d\sigma}{\int_{0}^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda}-$$

$$\frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\tau)\cos(2k\rho)\hbar'(\rho,\sigma,w)l(\sigma)d\rho d\sigma}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,w)\lambda d\lambda}$$

olur. Denkleme $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi} r(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,w)d\rho d\sigma$ ifadesi eklenip çıkarılır ve mutlak değeri alınırsa,

$$\begin{aligned}&\left|r(\psi)-l(\psi)\right|\le\\&\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left[r(\sigma)-l(\sigma)\right]\hbar'(\rho,\sigma,w)\cos 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right|+\\&\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}r(\sigma)\left[\hbar'(\rho,\sigma,\nu)-\hbar'(\rho,\sigma,w)\right]\cos 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right|\end{aligned}\tag{4.24}$$

olur. Burada,

$$\left|\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda\right|\le\frac{\pi^2}{2}M\ \text{ ve }\left|\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,w)\lambda d\lambda\right|\le\frac{\pi^2}{2}M.$$

Denklem (4.24) için sırasıyla Cauchy, Hölder, Bessel eşitsizlikleri ile Lipschitz koşulu uygulanıp elde edilen eşitsizliğin maksimumu alınırsa,

$$\begin{aligned}&\left\|r(\psi)-l(\psi)\right\|\le\frac{4|\Psi|}{M}\sqrt{\frac{\Psi\pi}{24}+\frac{\Psi\varepsilon}{\pi}}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|r(\psi)\right\|\left\|\nu(\psi)-w(\psi)\right\|+\\&\frac{4|\Psi|}{M}\sqrt{\frac{\Psi\pi}{24}+\frac{\Psi\varepsilon}{\pi}}\left\|\hbar'(\lambda,\psi,w)\right\|\left\|r(\psi)-l(\psi)\right\|\end{aligned}$$

elde edilir. Düzenlemelerden sonra,

$$\left\|r(\psi)-l(\psi)\right\|\le\frac{R}{1-RM}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|r(\psi)\right\|\left\|\nu(\psi)-w(\psi)\right\|\tag{4.25}$$

elde edilir. Burada,

$$R=\frac{4|\Psi|}{M}\sqrt{\frac{\Psi\pi}{24}+\frac{\Psi\varepsilon}{\pi}}\ \text{ ve }\ M=\left\|\hbar'(\lambda,\psi,w)\right\|.$$

ν ve w çözümlerinin farkı alınırsa,

$$\nu_0(\psi)-w_0(\psi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,\nu)(\psi-\sigma)r(\sigma)d\rho d\sigma-\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,w)(\psi-\sigma)l(\sigma)d\rho d\sigma,$$

$$\nu_{ck}(\psi)-w_{ck}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu)r(\sigma)d\rho d\sigma-$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,w)l(\sigma)d\rho d\sigma,$$

$$\nu_{sk}(\psi)-w_{sk}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu)r(\sigma)d\rho d\sigma-$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,w)l(\sigma)d\rho d\sigma$$

olur. Denklemlere $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}r(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,w)d\rho d\sigma$ ifadesi eklenip çıkarılırsa ve mutlak değeri alınırsa,

$$\left|\nu_0(\psi)-w_0(\psi)\right|\le\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)r(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu)-\hbar(\rho,\sigma,w)\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[r(\sigma)-l(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,w)d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\nu_{ck}(\psi)-w_{ck}(\psi)\right|\le$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\tau)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu)-\hbar(\rho,\sigma,w)\right]r(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[r(\sigma)-l(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,w)d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\nu_{sk}(\psi)-w_{sk}(\psi)\right|\le$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu)-\hbar(\rho,\sigma,w)\right]r(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[r(\sigma)-l(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,w)d\rho d\sigma\right|$$

elde edilir. Eşitsizliklere sırasıyla Cauchy, Hölder, Bessel eşitsizlikleri ile Lipschitz koşulu uygulanıp maksimumu alınırsa,

$$\begin{aligned}\left\|v(\psi)-w(\psi)\right\| \le & \left(\Psi^2\sqrt{\frac{\pi\Psi}{3}}+4|\Psi|\sqrt{\pi\Psi\left(\frac{\pi^2}{6}+\varepsilon\right)}\right)\left\|r(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|v(\psi)-w(\psi)\right\|+ \\ & \left(\Psi^2\sqrt{\frac{\pi\Psi}{3}}+4|\Psi|\sqrt{\pi\Psi\left(\frac{\pi^2}{6}+\varepsilon\right)}\right)\left\|r(\psi)-l(\psi)\right\|\left\|\hbar(\lambda,\psi,w)\right\|\end{aligned} \tag{4.26}$$

elde edilir. Denklem (4.25), Denklem (4.26)'de yerine yazıldığında,

$$\left\|v(\psi)-w(\psi)\right\| \le \left(\frac{A}{1-RM}\right)\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{r(\sigma)\ell(\rho,\sigma)\left|v(\sigma)-w(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. Burada, $A=\Psi^2\sqrt{\frac{\pi\Psi}{3}}+4|\Psi|\sqrt{\pi\Psi\left(\frac{\pi^2}{6}+\varepsilon\right)}$.

Elde edilen eşitsizliğin karesi alınarak Gronwall eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left\|v(\psi)-w(\psi)\right\|^2 \le 0\cdot e^{\left(\frac{A}{1-RM}\right)^2\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\{r(\sigma)\ell(\rho,\sigma)\}^2 d\rho d\sigma}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $v(\psi)=w(\psi)$ ve $r(\psi)=l(\psi)$ olur.

4.6.Çözümün Kararlılığı

Teorem 4.2. Teorem 4.1 koşulları sağlanırsa, (4.1)–(4.4) probleminin (r,v) çözümü ϑ,ϖ ve Γ başlangıç verilerine göre sürekli bağımlıdır.

İspat. Teorem 4.1'in koşullarını sağlayan iki veri kümesi

$\Theta=\{\vartheta,\varpi,\Gamma\}$, $\bar{\Theta}=\{\bar{\vartheta},\bar{\varpi},\bar{\Gamma}\}$

olsun. Aşağıdaki sınırlamaların sağlandığı varsayılsın:

$$\|\vartheta\|_{C^1[0,\pi]} \le \mathrm{M}_1,\ \|\varpi\|_{C^1[0,\pi]} \le \mathrm{M}_2,\ \|\Gamma\|_{C^2[0,T]} \le \mathrm{M}_3$$

ve benzer şekilde

$$\|\bar{\vartheta}\|_{C^1[0,\pi]} \le \mathrm{M}_1,\ \|\bar{\varpi}\|_{C^1[0,\pi]} \le \mathrm{M}_2,\ \|\bar{\Gamma}\|_{C^2[0,T]} \le \mathrm{M}_3$$

olmak üzere $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3$ pozitif sabitlerin var olduğu kabul edilsin. Buna bağlı olarak normlar

$$\|\Theta\| = \|\vartheta\|_{C^1[0,\pi]} + \|\varpi\|_{C^1[0,\pi]} + \|\Gamma\|_{C^2[0,T]},\ \|\bar{\Theta}\| = \|\bar{\vartheta}\|_{C^1[0,\pi]} + \|\bar{\varpi}\|_{C^1[0,\pi]} + \|\bar{\Gamma}\|_{C^2[0,T]}$$

şeklinde tanımlanır. (ν, r) ve $(\bar{\nu}, \bar{r})$, Θ ve $\bar{\Theta}$ verilerine karşılık gelen (4.1)–(4.4) problemine ait çözümler olsun. İlk olarak,

$$r(\psi) = \int_0^{\psi} \Upsilon(\psi, \sigma) r(\sigma) d\sigma + \Theta(\psi)$$

katsayısı incelenecektir. Burada,

$$\Theta(\psi) = \frac{\Gamma''(\psi) + \varepsilon\varpi_{\psi}(\pi) - \varepsilon\varpi_{\psi}(0)}{\int_0^{\pi} \lambda\hbar(\lambda, \psi, \nu) d\lambda} +$$

$$\frac{\pi \sum_{k=1}^{\infty} (2k) \left(\left(\varepsilon \wp_k^2 - 1 \right) \vartheta_{sk} \cos \wp_k \psi + \left(\varepsilon \wp_k - \frac{1}{\wp_k} \right) \varpi_{sk} \sin \wp_k \psi \right)}{\int_0^{\pi} \lambda\hbar(\lambda, \psi, \nu) d\lambda},$$

$$\Upsilon(\psi, \sigma) = \frac{-\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{\wp_k} \hbar_{sk}(\sigma) \sin \wp_k (\psi - \sigma)}{\int_0^{\pi} \lambda\hbar(\lambda, \psi, \nu) d\lambda}.$$

$$r(\psi)-\bar{r}(\psi)=\int_0^{\psi} r(\sigma)\Upsilon(\psi,\sigma)d\sigma-\int_0^{\psi}\bar{r}(\sigma)\bar{\Upsilon}(\psi,\sigma)d\sigma+\Theta(\psi)-\bar{\Theta}(\psi)$$

ters katsayılar farkı için $\bar{r}(\psi)\Upsilon(\psi,\sigma)$ ifadesi eklenip çıkarılırsa,

$$r(\psi)-\bar{r}(\psi)=\int_0^{\psi}\Upsilon(\psi,\sigma)\left[r(\sigma)-\bar{r}(\sigma)\right]d\sigma-\int_0^{\psi}\left[\Upsilon(\psi,\sigma)-\bar{\Upsilon}(\psi,\sigma)\right]\bar{r}(\sigma)d\sigma+\Theta(\psi)-\bar{\Theta}(\psi)$$

elde edilir. Maksimumu alınırsa,

$$\left\|r(\psi)-\bar{r}(\psi)\right\|\le\left|\Psi\right|\left\|r(\psi)-\bar{r}(\psi)\right\|\left\|\Upsilon\right\|+\left|\Psi\right|\left\|\Upsilon-\bar{\Upsilon}\right\|\left\|\bar{r}(\psi)\right\|+\left\|\Theta-\bar{\Theta}\right\|$$

elde edilir. $\left|\Psi\right|\left\|\Upsilon\right\|\le 1$ olmak üzere,

$$\left\|r(\psi)-\bar{r}(\psi)\right\|\le\frac{1}{1-\left|\Psi\right|\left\|\Upsilon\right\|}\left\|\Theta-\bar{\Theta}\right\|+\frac{\left|\Psi\right|\left\|\bar{r}(\psi)\right\|}{1-\left|\Psi\right|\left\|\Upsilon\right\|}\left\|\Upsilon-\bar{\Upsilon}\right\| \tag{4.27}$$

elde edilir.

$$\Theta-\bar{\Theta}=\frac{\Gamma''(\psi)+\varepsilon\varpi_{\psi}(\pi)-\varepsilon\varpi_{\psi}(0)+\pi\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\left(a_k\vartheta'_{ck}\cos\wp_k\psi+b_k\varpi_{sk}\sin\wp_k\psi\right)}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda}-$$

$$\frac{\bar{\Gamma}''(\psi)+\varepsilon\bar{\varpi}_{\psi}(\pi)-\varepsilon\bar{\varpi}_{\psi}(0)+\pi\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\left(a_k\bar{\vartheta}'_{ck}\cos\wp_k\psi+b_k\bar{\varpi}_{sk}\sin\wp_k\psi\right)}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\psi d\psi}.$$

Burada, $a_k=\varepsilon\wp_k^2-1$, $b_k=\varepsilon\wp_k-\frac{1}{\wp_k}$. Son denklem için $\vartheta_{sk}=\frac{\vartheta'_{ck}}{2k}$ ve $\varpi_{sk}=\frac{\varpi'_{ck}}{2k}$ olduğu dikkate alındığında,

$$\Theta-\bar{\Theta}=\frac{\Gamma''(\psi)+\varepsilon\varpi_{\psi}(\pi)-\varepsilon\varpi_{\psi}(0)+\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\vartheta'_{ck}\cos\wp_k\psi+b_k\varpi'_{ck}\sin\wp_k\psi\right)}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda}-$$

$$\frac{\bar{\Gamma}''(\psi)+\varepsilon\bar{\varpi}_{\psi}(\pi)-\varepsilon\bar{\varpi}_{\psi}(0)+\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\bar{\vartheta}'_{ck}\cos\wp_k\psi+b_k\bar{\varpi}'_{ck}\sin\wp_k\psi\right)}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda}.$$

elde edilir.

$$\Theta-\bar{\Theta}=\frac{\Gamma''(\psi)\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda-\bar{\Gamma}''(\psi)\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda}+$$

$$\frac{\varepsilon\varpi_{\psi}(\pi)\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda-\varepsilon\bar{\varpi}_{\psi}(\pi)\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda}+$$

$$\frac{\varepsilon\bar{\varpi}_{\psi}(0)\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda-\varepsilon\varpi_{\psi}(0)\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda+}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda}+$$

$$\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}a_k\bar{\vartheta}'_{ck}\cos\wp_k\psi\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda-\pi\sum_{k=1}^{\infty}a_k\vartheta'_{ck}\cos\wp_k\psi\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda}+$$

$$\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}b_k\bar{\varpi}'_{ck}\sin\wp_k\psi\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda-\pi\sum_{k=1}^{\infty}b_k\varpi'_{ck}\sin\wp_k\psi\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda}.$$

Son denkleme $\Gamma''(\psi)\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda$, $\vartheta'_{ck}\cos 2k\psi\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda$ ve $\varpi_{sk}\sin 2k\psi\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda$, $\varepsilon\varpi_{\psi}(0)\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda$ ve $\varepsilon\varpi_{\psi}(\pi)\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda$ ifadeleri eklenip çıkarılırsa,

$$\Theta-\bar{\Theta}=\frac{-\Gamma''(\psi)\int_0^{\pi}\lambda\left[\hbar(\lambda,\psi,\nu)-\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\right]d\lambda+\left[\Gamma''(\psi)-\bar{\Gamma}''(\psi)\right]\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda}+$$

$$\frac{-\varepsilon\varpi_{\psi}(\pi)\int_0^{\pi}\lambda\left[\hbar(\lambda,\psi,\nu)-\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\right]d\lambda-\varepsilon\left[\varpi_{\psi}(\pi)-\bar{\varpi}_{\psi}(\pi)\right]\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda}+$$

$$\frac{-\varepsilon\varpi_{\psi}(0)\int_0^{\pi}\lambda\left[\hbar(\lambda,\psi,\nu)-\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\right]d\lambda+\varepsilon\left[\varpi_{\psi}(0)-\bar{\varpi}_{\psi}(0)\right]\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda+}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda}+$$

$$\frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}a_k\vartheta'_{ck}\cos\wp_k\psi\int_0^{\pi}\lambda\left[\hbar(\lambda,\psi,\nu)-\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\right]d\lambda}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda}+$$

$$\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left[\vartheta'_{ck}-\bar{\vartheta}'_{ck}\right]\cos\wp_k\psi\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda}+$$

$$\frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}b_k\varpi'_{ck}\sin\wp_k\psi\int_0^{\pi}\lambda\left[\hbar(\lambda,\psi,\nu)-\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\right]d\lambda}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda}+$$

$$\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}b_k\left[\varpi'_{ck}-\bar{\varpi}'_{ck}\right]\sin\wp_k\psi\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda}$$

elde edilir. Mutlak değeri alınır ve Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\Theta-\bar{\Theta}\right|\leq\frac{4}{\pi^4M^2}\left[\left|\Gamma''(t)\right|\left(\int_0^{\pi}\lambda^2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\lambda,\psi,\nu)-\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\right\}^2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left|\Gamma''(\psi)-\bar{\Gamma}''(\psi)\right|\left(\int_0^{\pi}\lambda^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\hbar^2(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\varepsilon\left|\varpi_{\psi}(\pi)\right|\left(\int_0^{\pi}\lambda^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\lambda,\psi,\nu)-\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\right\}^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\varepsilon\left|\varpi_{\psi}(\pi)-\bar{\varpi}_{\psi}(\pi)\right|\left(\int_0^{\pi}\lambda^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\hbar^2(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\varepsilon\left|\varpi_{\psi}(0)\right|\left(\int_0^{\pi}\lambda^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\lambda,\psi,\nu)-\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\right\}^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\varepsilon\left|\varpi_{\psi}(0)-\bar{\varpi}_{\psi}(0)\right|\left(\int_0^{\pi}\lambda^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\hbar^2(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\left|\vartheta'_{ck}\right|+b_k\left|\varpi'_{ck}\right|\right)\left(\int_0^{\pi}\lambda^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\lambda,\psi,\nu)-\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\right\}^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\left|\vartheta'_{ck}-\bar{\vartheta}'_{ck}\right|+b_k\left|\varpi'_{ck}-\bar{\varpi}'_{ck}\right|\right)\left(\int_0^{\pi}\lambda^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\hbar^2(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg]$$

elde edilir. Burada,

$$\left|\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda\right|\le\frac{M\pi^2}{2}\ \text{ve}\ \left|\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\lambda d\lambda\right|\le\frac{M\pi^2}{2}.$$

Elde edilen eşitsizliğe Hölder eşitsizliğiyle ile Lipschitz koşulu uygulanırsa,

$$\left|\Theta-\bar{\Theta}\right|\le$$

$$\frac{4}{\pi^4M^2}\sqrt{\frac{\pi^3}{3}}\Bigg[\left|\Gamma''(t)\right|\left(\int_0^{\pi}\left\{\ell(\lambda,\psi)\left|\nu(\psi)-\bar{\nu}(\psi)\right|\right\}^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\left|\Gamma''(\psi)-\bar{\Gamma}''(\psi)\right|\left(\int_0^{\pi}\hbar^2(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+\varepsilon\left|\varpi_{\psi}(\pi)\right|\left(\int_0^{\pi}\left\{\ell(\lambda,\psi)\left|\nu(\psi)-\bar{\nu}(\psi)\right|\right\}^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\varepsilon\left|\varpi_{\psi}(\pi)-\bar{\varpi}_{\psi}(\pi)\right|\left(\int_0^{\pi}\hbar^2(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+\varepsilon\left|\varpi_{\psi}(0)\right|\left(\int_0^{\pi}\left\{\ell(\lambda,\psi)\left|\nu(\psi)-\bar{\nu}(\psi)\right|\right\}^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\varepsilon\left|\varpi_{\psi}(0)-\bar{\varpi}_{\psi}(0)\right|\left(\int_0^{\pi}\hbar^2(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+\pi\mu\sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta'_{ck}\right|\left(\int_0^{\pi}\left\{\ell(\lambda,\psi)\left|\nu(\psi)-\bar{\nu}(\psi)\right|\right\}^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\pi\eta\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varpi'_{ck}\right|\left(\int_0^{\pi}\left\{\ell(\lambda,\psi)\left|\nu(\psi)-\bar{\nu}(\psi)\right|\right\}^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+\pi\mu\sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta'_{ck}-\bar{\vartheta}'_{ck}\right|\left(\int_0^{\pi}\hbar^2(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\pi\eta\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varpi'_{ck}-\bar{\varpi}'_{ck}\right|\left(\int_0^{\pi}\hbar^2(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg]$$

elde edilir. Maksimumu alınırsa,

$$\begin{aligned}&\left\|\Theta-\bar{\Theta}\right\|\le\\&\frac{4}{\pi^4M^2}\sqrt{\frac{\pi^3}{3}}\left(M\left\|\Gamma''(\psi)-\bar{\Gamma}''(\psi)\right\|+\varepsilon\left\|\varpi_{\psi}(\pi)-\bar{\varpi}_{\psi}(\pi)\right\|+\varepsilon\left\|\varpi_{\psi}(0)-\bar{\varpi}_{\psi}(0)\right\|\right)+\\&\frac{4\mu}{\pi^3M}\sqrt{\frac{\pi^3}{3}}\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\vartheta'_{ck}-\bar{\vartheta}'_{ck}\right\|+\frac{4\eta}{\pi^3M}\sqrt{\frac{\pi^3}{3}}\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\varpi'_{ck}-\bar{\varpi}'_{ck}\right\|+\\&\frac{4}{\pi^4M^2}\sqrt{\frac{\pi^3}{3}}\left(2\varepsilon M_2+M_3+\pi\left(\mu M_1+\eta M_2\right)\right)\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu(\psi)-\bar{\nu}(\psi)\right\|\end{aligned}\tag{4.28}$$

elde edilir.

$$\Upsilon-\bar{\Upsilon}=\frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\wp_k}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\int_0^{\pi}\hbar'(\lambda,\psi,\nu)\cos 2k\lambda d\lambda}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda}-$$

$$\frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\wp_k}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\int_0^{\pi}\hbar'(\lambda,\psi,\bar{\nu})\cos 2k\lambda d\lambda}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\lambda d\lambda},$$

$$\Upsilon-\bar{\Upsilon}=\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\hbar'(\lambda,\psi,\bar{\nu})\cos 2k\lambda d\lambda\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\lambda d\lambda}-$$

$$\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\hbar'(\lambda,\psi,\overline{\nu})\cos 2k\lambda d\lambda\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\overline{\nu})d\lambda}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\overline{\nu})\lambda d\lambda}.$$

Denkleme $\int_0^{\pi}\hbar'(\lambda,\psi,\nu)\cos 2k\lambda d\lambda\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda$ ifadesi eklenip çıkarılırsa,

$$\Upsilon-\overline{\Upsilon}=\frac{2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\int_0^{\pi}\hbar'(\lambda,\psi,\nu)\cos 2kxdx\int_0^{\pi}x\left[\hbar'(\lambda,\psi,\nu)-\hbar'(\lambda,\psi,\overline{\nu})\right]d\lambda}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\overline{\nu})\lambda d\lambda}-$$

$$\frac{2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\int_0^{\pi}\left[\hbar'(\lambda,\psi,\nu)-\hbar'(\lambda,\psi,\overline{\nu})\right]\cos 2k\lambda d\lambda\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\lambda d\lambda\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\overline{\nu})\lambda d\lambda}$$

elde edilir. Mutlak değeri alınır ve Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\Upsilon-\overline{\Upsilon}\right|\leq\frac{8}{\pi^4M^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\left(\int_0^{\pi}d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\left\{\hbar'(\lambda,\psi,\nu)\cos 2k\lambda\right\}^2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\left(\int_0^{\pi}\lambda^2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\left\{\hbar'(\lambda,\psi,\nu)-\hbar'(\lambda,\psi,\overline{\nu})\right\}^2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\frac{8}{\pi^4M^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\left(\int_0^{\pi}\lambda^2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\left\{\hbar'(\lambda,\psi,\nu)\right\}^2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\left(\int_0^{\pi}d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\left\{\left[\hbar'(\lambda,\psi,\nu)-\hbar'(\lambda,\psi,\overline{\nu})\right]\cos 2k\lambda\right\}^2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Ardından, Hölder, Bessel eşitsizliği ile Lipschitz koşulu uygulanırsa,

$$\left|\Upsilon-\overline{\Upsilon}\right|\leq$$

$$\frac{8}{\pi^4M^2}\sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\sqrt{\frac{\pi^3}{3}}\sqrt{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\left\{\hbar'(\lambda,\psi,\overline{\nu})\right\}^2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\left\{\ell(\lambda,\psi)\left|u(t)-\overline{u}(t)\right|\right\}^2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\frac{8}{\pi^4 M^2}\sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\sqrt{\frac{\pi^3}{3}}\sqrt{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\left\{\ell(\lambda,\psi)\left|\nu(\psi)-\bar{\nu}(\psi)\right|\right\}^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\left\{\hbar'(\lambda,\psi,\bar{\nu})\right\}^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Maksimumu alınırsa,

$$\left\|\Upsilon-\bar{\Upsilon}\right\|\le\frac{16}{\sqrt{3}\pi^2 M}\sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu(\psi)-\bar{\nu}(\psi)\right\| \tag{4.29}$$

elde edilir.

Denklem (4.28) ve (4.29), Denklem (4.27)'de yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
&\left\|r(\psi)-\bar{r}(\psi)\right\|\le\frac{1}{1-\left|\Psi\right|\left\|\Upsilon\right\|}\frac{4}{\pi^3 M^2}\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\left(2\varepsilon M_2+M_3+\pi\left(\mu M_1+\lambda M_2\right)\right)+\right.\\
&\left.4\pi\sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}M\left|\Psi\right|\left\|\bar{r}(\psi)\right\|\right)\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu(\psi)-\bar{\nu}(\psi)\right\|+\\
&\frac{1}{1-\left|\Psi\right|\left\|\Upsilon\right\|}\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}\pi^3 M}\left(\left\|\Gamma''(t)-\bar{\Gamma}''(t)\right\|+\pi\mu\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\vartheta'_{ck}-\bar{\vartheta}'_{ck}\right\|+\pi\eta\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\varpi'_{ck}-\bar{\varpi}'_{ck}\right\|\right)+\\
&\frac{1}{1-\left|\Psi\right|\left\|\Upsilon\right\|}\frac{4\varepsilon\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}\pi^3 M^2}\left(\left\|\varpi_{\psi}(\pi)-\bar{\varpi}_{\psi}(\pi)\right\|+\left\|\varpi_{\psi}(0)-\bar{\varpi}_{\psi}(0)\right\|\right)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\nu(\psi)-\bar{\nu}(\psi)=\frac{\left(\vartheta_0-\bar{\vartheta}_0\right)+\left(\varpi_0-\bar{\varpi}_0\right)\psi}{2}+\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\vartheta_{ck}-\bar{\vartheta}_{ck}\right)\cos\wp_k\psi+\frac{\left(\varpi_{ck}-\bar{\varpi}_{ck}\right)}{\wp_k}\sin\wp_k\psi\right)\cos 2k\lambda+\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\vartheta_{sk}-\bar{\vartheta}_{sk}\right)\cos\wp_k\psi+\frac{\left(\varpi_{sk}-\bar{\varpi}_{sk}\right)}{\wp_k}\sin\wp_k\psi\right)\sin 2k\lambda+\\
&\frac{1}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,\nu)(\psi-\sigma)r(\sigma)d\rho d\sigma-\frac{1}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})(\psi-\sigma)\bar{r}(\sigma)d\rho d\sigma+\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu)r(\sigma)d\rho d\sigma\right)\cos 2k\lambda-\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})\bar{r}(\sigma)d\rho d\sigma\right)\cos 2k\lambda+
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu)r(\sigma)d\rho d\sigma\right)\sin 2k\lambda -$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})\bar{r}(\sigma)d\rho d\sigma\right)\sin 2k\lambda.$$

Son denkleme $r(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})$ ifadesi eklenip çıkarılarak mutlak değeri alınırsa,

$$|\nu(\psi)-\bar{\nu}(\psi)|\le\frac{|\vartheta_0-\bar{\vartheta}_0|}{2}+\frac{|(\varpi_0-\bar{\varpi}_0)\psi|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(|\vartheta_{ck}-\bar{\vartheta}_{ck}|+|\vartheta_{sk}-\bar{\vartheta}_{sk}|\right)+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\left(|\varpi_{ck}-\bar{\varpi}_{ck}|+|\varpi_{sk}-\bar{\varpi}_{sk}|\right)+$$

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu)-\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})\right](\psi-\sigma)r(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left[r(\sigma)-\bar{r}(\sigma)\right](\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\nu)-\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})\right]r(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[r(\sigma)-\bar{r}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)r(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,u)-\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[r(\sigma)-\bar{r}(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})d\rho d\sigma\right|$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizliğe sırasıyla Cauchy, Hölder ve Bessel eşitsizlikleri ile Lipschitz koşulu uygulanırsa ve maksimumu alınırsa,

$$\|\nu(\psi)-\bar{\nu}(\psi)\|\le\frac{\|\vartheta_0-\bar{\vartheta}_0\|}{2}+\frac{\|\varpi_0-\bar{\varpi}_0\||\Psi|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\|\vartheta_{ck}-\bar{\vartheta}_{ck}\|+\|\vartheta_{sk}-\bar{\vartheta}_{sk}\|\right)+$$

$$\sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\|\varpi_{ck}-\bar{\varpi}_{ck}\|+\|\varpi_{sk}-\bar{\varpi}_{sk}\|\right)+ \qquad (4.31)$$

$$\left(\Psi^2\sqrt{\frac{\pi\Psi}{3}}+4\Psi\sqrt{\pi\Psi\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\right)\|\ell(\lambda,\psi)\|\|r(\psi)\|\|\nu(\psi)-\bar{\nu}(\psi)\|+$$

$$\left(\Psi^2\sqrt{\frac{\pi\Psi}{3}}+4\Psi\sqrt{\pi\Psi\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\right)\left\|\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})\right\|\left\|r(\psi)-\bar{r}(\psi)\right\|$$

elde edilir. Denklem (4.30), Denklem (4.31)'de yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
&\left\|\nu(\psi)-\bar{\nu}(\psi)\right\|\le\frac{\left\|\vartheta_0-\bar{\vartheta}_0\right\|}{2}+\frac{\left\|\varpi_0-\bar{\varpi}_0\right\|\left|\Psi\right|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\vartheta_{ck}-\bar{\vartheta}_{ck}\right\|+\left\|\vartheta_{sk}-\bar{\vartheta}_{sk}\right\|\right)+\\
&\sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\varpi_{ck}-\bar{\varpi}_{ck}\right\|+\left\|\varpi_{sk}-\bar{\varpi}_{sk}\right\|\right)+\frac{4\sqrt{\pi}A}{\sqrt{3}\pi^3\left(1-\left|\Psi\right|\left\|\Upsilon\right\|\right)}\left\|\Gamma''(\psi)-\bar{\Gamma}''(\psi)\right\| \qquad (4.32)\\
&\frac{4\sqrt{\pi}A}{\sqrt{3}\pi^2\left(1-\left|\Psi\right|\left\|\Upsilon\right\|\right)}\left(\mu\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\vartheta'_{ck}-\bar{\vartheta}'_{ck}\right\|+\eta\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\varpi'_{ck}-\bar{\varpi}'_{ck}\right\|\right)+\\
&\frac{4\varepsilon\sqrt{\pi}A}{\sqrt{3}\pi^3M\left(1-\left|\Psi\right|\left\|\Upsilon\right\|\right)}\left(\left\|\varpi_{\psi}(\pi)-\bar{\varpi}_{\psi}(\pi)\right\|+\left\|\varpi_{\psi}(0)-\bar{\varpi}_{\psi}(0)\right\|\right)+\\
&\left(\frac{4\sqrt{\pi}A\left(2\varepsilon M_2+M_3+\pi\left(\mu M_1+\eta M_2\right)\right)}{\sqrt{3}\pi^3M\left(1-\left|\Psi\right|\left\|\Upsilon\right\|\right)}+\sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\,\frac{16A\left|\Psi\right|\left\|\bar{r}(\psi)\right\|}{\pi^2\left(1-\left|\Psi\right|\left\|\Upsilon\right\|\right)}+A\left\|r(\psi)\right\|\right)\\
&\times\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\ell(\rho,\sigma)\left|\nu(\sigma)-\bar{\nu}(\tau)\right|\right\}^2d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$A=\Psi^2\sqrt{\frac{\pi\Psi}{3}}+4\Psi\sqrt{\pi\Psi\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}.$$

Eğer

$$\left\|\vartheta-\bar{\vartheta}\right\|=\frac{\left\|\vartheta_0-\bar{\vartheta}_0\right\|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\vartheta_{ck}-\bar{\vartheta}_{ck}\right\|+\left\|\vartheta_{sk}-\bar{\vartheta}_{sk}\right\|\right)+\frac{4A\mu\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}\pi^2\left(1-\left|\Psi\right|\left\|\Upsilon\right\|\right)}\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\vartheta'_{ck}-\bar{\vartheta}'_{ck}\right\|,$$

$$\begin{aligned}
&\left\|\varpi-\bar{\varpi}\right\|=\frac{\left\|\varpi_0-\bar{\varpi}_0\right\|\left|\Psi\right|}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\varpi_{ck}-\bar{\varpi}_{ck}\right\|+\left\|\varpi_{sk}-\bar{\varpi}_{sk}\right\|\right)+\\
&\frac{4A\lambda\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}\pi^2\left(1-\left\|\Upsilon\right\|\left|\Psi\right|\right)}\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\varpi'_{ck}-\bar{\varpi}'_{ck}\right\|+\frac{4\varepsilon\sqrt{\pi}A\left(\left\|\varpi_{\psi}(\pi)-\bar{\varpi}_{\psi}(\pi)\right\|+\left\|\varpi_{\psi}(0)-\bar{\varpi}_{\psi}(0)\right\|\right)}{\sqrt{3}\pi^3M\left(1-\left\|\Upsilon\right\|\left|\Psi\right|\right)}
\end{aligned}$$

olarak alınırsa, burada

$$M_4 = \max\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{4A\mu\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}\pi^2\left(1-|\Psi|\|\Upsilon\|\right)}\right\},$$

$$M_5 = \max\left\{\frac{|T|}{2}, \sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}, \frac{4A\lambda\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}\pi^2\left(1-|\Psi|\|\Upsilon\|\right)}\right\},$$

$$M_6 = \frac{4\sqrt{\pi}A}{\sqrt{3}\pi^3\left(1-|\Psi|\|\Upsilon\|\right)},$$

$$M_7 = \frac{4\sqrt{\pi}A\left(2\varepsilon M_2 + M_3 + \pi\left(\mu M_1 + \lambda M_2\right)\right)}{\sqrt{3}\pi^3 M\left(1-\|\Upsilon\||\Psi|\right)} + \sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\,\frac{16A|\Psi|\|\overline{r}(\psi)\|}{\pi^2\left(1-\|\Upsilon\||\Psi|\right)} + A\|r(\psi)\|$$

belirlenir ve Denklem (4.32),

$$\|\nu(\psi)-\overline{\nu}(\psi)\| \le M_4\left\|\vartheta-\overline{\vartheta}\right\| + M_5\left\|\varpi-\overline{\varpi}\right\| + M_6\left\|\Gamma''(\psi)-\overline{\Gamma}''(\psi)\right\| +$$

$$M_7\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\ell(\rho,\sigma)\left|\nu(\sigma)-\overline{\nu}(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde yazılır. Buradan $M_8 = \max\left\{M_4, M_5, M_6\right\}$ kabul edildiğinde, son eşitsizlik

$$\|\nu(\psi)-\overline{\nu}(\psi)\| \le M_8\left\|\Theta-\overline{\Theta}\right\| + M_7\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\ell(\rho,\sigma)\left|\nu(\sigma)-\overline{\nu}(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

olur. $(a+b)^2 \le 2a^2+2b^2$ eşitsizliği uygulanırsa,

$$\|\nu(\psi)-\overline{\nu}(\psi)\|^2 \le 2M_8^2\left\|\Theta-\overline{\Theta}\right\|^2 + 2M_7^2\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\ell(\rho,\sigma)\left|\nu(\sigma)-\overline{\nu}(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma$$

elde edilir. Son eşitsizliğe Gronwall eşitsizliği uygulanırsa,

$$\|\nu(\psi)-\overline{\nu}(\psi)\|^2 \le 2M_8^2\left\|\Theta-\overline{\Theta}\right\|^2 e^{2M_7^2\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\ell^2(\rho,\sigma)d\rho d\sigma}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\Theta \to \overline{\Theta}$ iken, $\nu \to \overline{\nu}$ ve $r \to \overline{r}$ olur.

4.7.Doğrusal Olmayan Problem için Sayısal Çözüm

Doğrusal olmayan problemlerin doğrudan çözümünün güç olması nedeniyle, bu çalışmada çözüm sürecinden önce problem doğrusal bir forma indirgenir. Bu amaçla

$$\frac{\partial^2 \nu^{(n)}}{\partial t^2} = \varepsilon \frac{\partial^4 \nu^{(n)}}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 \nu^{(n)}}{\partial x^2} + r(t)\hbar\left(x,t,\nu^{(n-1)}\right), \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned} &\nu^{(n)}(x,0) = \vartheta(x),\ x \in [0,\pi] \\ &\partial_t \nu^{(n)}(x,0) = \varpi(x),\ x \in [0,\pi] \end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned} &\nu^{(n)}(0,t) = \nu^{(n)}(\pi,t), \quad t \in [0,\Psi] \\ &\partial_x \nu^{(n)}(0,t) = \partial_x \nu^{(n)}(\pi,t) = 0, \quad t \in [0,\Psi] \end{aligned} \tag{4.35}$$

problemi için iteratif bir algoritma oluşturulur. $\nu^{(n)}(x,t) = w(x,t)$ ve $\hbar\left(x,t,\nu^{(n-1)}\right) = \tilde{\hbar}(x,t)$ belirleyerek (4.33)-(4.35) problemi

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \varepsilon \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + r(t)\tilde{\hbar}(x,t), \tag{4.36}$$

$$w(x,0) = \vartheta(x), \partial_t w(\lambda,0) = \varpi(x),\ x \in [0,\pi] \tag{4.37}$$

$$w(0,t) = w(\pi,t),\ \partial_x w(0,t) = \partial_x w(\pi,t) = 0,\ t \in [0,\Psi] \tag{4.38}$$

doğrusal bir problem olarak ifade edilebilir. Elde edilen (4.36)–(4.38) problemi sayısal olarak çözmek amacıyla iki farklı kapalı sonlu fark şeması uygulanmıştır:

$$\begin{aligned} &\frac{w_i^{j+3} - 2w_i^{j+2} + w_i^{j+1}}{\Delta t^2} = \\ &\frac{\varepsilon\left[\left(w_{i+1}^{j+3} - 2w_i^{j+3} + w_{i-1}^{j+3}\right) - \left(2w_{i+1}^{j+2} - 4w_i^{j+2} + 2w_{i-1}^{j+2}\right) + \left(w_{i+1}^{j+1} - 2w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1}\right)\right]}{\Delta x^2 \Delta t^2} + \\ &\frac{w_{i+1}^{j+3} - 2w_i^{j+3} + w_{i-1}^{j+3}}{\Delta x^2} + r^{j+2}\tilde{\hbar}^{j+2}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Denklem (4.36)'nın çözümünde daha yüksek doğruluk elde edebilmek için,

$$\frac{2w_i^{j+3}-5w_i^{j+2}+4w_i^{j+1}-w_i^j}{\Delta t^2}=$$
$$\frac{\varepsilon\left[\left(w_{i+2}^{j+3}-2w_i^{j+3}+w_{i-2}^{j+3}\right)-\left(2w_{i+2}^{j+1}-4w_i^{j+1}+2w_{i-2}^{j+1}\right)+\left(w_{i+2}^{j-1}-2w_i^{j-1}+w_{i-1}^{j-1}\right)\right]}{16\Delta x^2\Delta t^2}+ \tag{4.40}$$
$$\frac{w_{i+2}^{j+3}+16w_{i+1}^{j+3}-30w_i^{j+3}+16w_{i-1}^{j+3}-w_{i-2}^{j+3}}{12\Delta x^2}+r^{j+2}\tilde{\hbar}^{j+2}$$

şeması kullanılmıştır. Başlangıç ve sınır koşulları $[0,\pi]\times[0,\Psi]$ bölgesi için aşağıdaki şekle dönüşür:

$$w_i^1=\vartheta_i,\ \frac{w_i^2-w_i^1}{\Delta t}=\varpi_i,$$

$$w_1^j=w_{Nx}^j,\ \ w_{Nx}^j=\frac{w_2^j+w_{Nx-1}^j}{2}.$$

$[0,\pi]\times[0,\Psi]$ aralığı ayrıklaştırılarak $x_i=\Delta x(i-1)$, $i=1,2,....,Nx$ ve $t_j=j\Delta t$, $j=1,2,....,Nt$ şeklinde tanımlansın. Burada $\Delta x=\frac{\pi}{Nx}$ ve $\Delta t=\frac{\Psi}{Nt}$ sırasıyla x yönündeki uzay adımını ve zaman adımını göstermektedir. Nx ve Nt pozitif tam sayılardır. Ayrık çözüm $v_i^j=v(x_i,t_j)$ ile, başlangıç fonksiyonu $\vartheta_i=\vartheta(x_i)$ ve kaynak terimi $\tilde{\hbar}^{j+2}=\hbar(x_i,t_{j+2})$ biçiminde tanımlanmıştır.

Hesaplamalarda $j+3$ indeksi mevcut zamanı, $j+2$ bir önceki zamanı, $j+1$ adım önceki zamanı ve j ise üç adım önceki zamanı ifade etmektedir.

Ters katsayı,

$$r=\frac{E''(t)-\varepsilon\left[\pi w_{xtt}(\pi,t)-w_{tt}(\pi)+w_{tt}(0)\right]-\pi w_x(\pi,t)}{\int_0^{\pi}x\tilde{\hbar}(x,t)dx} \tag{4.41}$$

oluşturan elemanların sonlu fark şeması,

$$\Gamma''(\psi) = \frac{\Gamma^{j+1} - 2\Gamma^{j} + \Gamma^{j-1}}{\Delta\psi^{2}},$$

$$w_{tt}(\pi) = \frac{\left(w_{Nx}^{j+2} - 2w_{Nx}^{j+1} + w_{Nx}^{j}\right)}{\Delta t^{2}},$$

$$w_{tt}(0) = \frac{\left(w_{1}^{j+2} - 2w_{1}^{j+1} + w_{1}^{j}\right)}{\Delta t^{2}},$$

$$\pi w_{x}(\pi,t) = \frac{\pi\left(w_{Nx}^{j+2} - w_{Nx-1}^{j+2}\right)}{\Delta x},$$

$$\pi w_{xtt}(\pi,t) = \frac{\pi\left(\left(w_{Nx}^{j+2} - 2w_{Nx}^{j+1} + w_{Nx}^{j}\right) - \left(w_{Nx-1}^{j+2} - 2w_{Nx-1}^{j+1} + w_{Nx-1}^{j}\right)\right)}{\Delta x \Delta t^{2}}.$$

Aynı şekilde, Denklem (4.40) için de Denklem (4.41)'yi oluşturan terimlerin her biri sonlu farklar yöntemiyle ayrı ayrı ayrıklaştırılmıştır.

$$\Gamma''(t) = \frac{2\Gamma^{j+2} - 5\Gamma^{j+1} + 4\Gamma^{j} - \Gamma^{j-1}}{\Delta t^{2}},$$

$$w_{tt}(\pi) = \frac{2w_{Nx}^{j+2} - 5w_{Nx}^{j+1} + 4w_{Nx}^{j} - w_{Nx}^{j}}{\Delta t^{2}},$$

$$w_{tt}(0) = \frac{2w_{1}^{j+2} - 5w_{1}^{j+1} + 4w_{1}^{j} - w_{1}^{j}}{\Delta t^{2}},$$

$$\pi v_{x}(\pi,t) = \pi\frac{3v_{Nx}^{j+2} - 4v_{Nx-1}^{j+2} + 4v_{Nx-2}^{j+2}}{2\Delta x},$$

$$\pi w_{xtt}(\pi,t) = \frac{\pi\left(\left(w_{Nx}^{j+2} - 2w_{Nx}^{j+1} + w_{Nx}^{j}\right) - \left(w_{Nx-1}^{j+2} - 2w_{Nx-1}^{j+1} + w_{Nx-1}^{j}\right)\right)}{\Delta t^{2}\Delta x}.$$

$\left(\tilde{h}in\right)^{j+2} = \int_{0}^{\pi} \tilde{h}(x,t)xdx$ hesaplamak için trapezoidal integrasyon kuralı kullanılır. Denklem (4.39) ve (4.40)'ın sayısal çözümünde, elde edilen lineer denklem sistemi

doğrudan çözüm yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Önceki zaman adımlarından bilinen terimleri içeren sağ taraf vektörü, Denklem (4.39) ve (4.40) için farklı biçimde elde edilmektedir. Denklem (4.39)'a karşılık gelen sağ taraf vektörü,

$$V_i = -2w_i^{j+2} + w_i^{j+1} + \frac{2\varepsilon\left(w_{i+1}^{j+2} - 2w_i^{j+2} + w_{i-1}^{j+2}\right)}{\Delta x^2} - \frac{\varepsilon\left(w_{i+1}^{j+1} - 2w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1}\right)}{\Delta x^2} - r^{j+2}\tilde{\hbar}^{j+2}\Delta t^2$$

ve Denklem (4.40)'a karşılık gelen sağ taraf vektörü,

$$V_i = -5w_i^{j+2} + 4w_i^{j+1} - w_i^{j} + \frac{\varepsilon\left(w_{i+2}^{j+1} - 2w_i^{j+1} + w_{i-2}^{j+1}\right)}{8\Delta x^2} - \frac{\varepsilon\left(w_{i+2}^{j-1} - 2w_i^{j-1} - w_{i-2}^{j-1}\right)}{16\Delta x^2} - r^{j+2}\hbar^{j+2}\Delta t^2$$

şeklindedir.

Örnek 4.1.

$$\nu_{tt} - \varepsilon\nu_{xxtt} - \nu_{xx} = r(t)e^{t^2}\sin 2x,$$

$$\nu(x,0) = \sin 2x, \partial_t\nu(x,0) = 0, x \in [0,\pi]$$

$$\nu(0,t) = \nu(\pi,t), \partial_x\nu(0,t) = \partial_x\nu(\pi,t), t \in [0,\Psi]$$

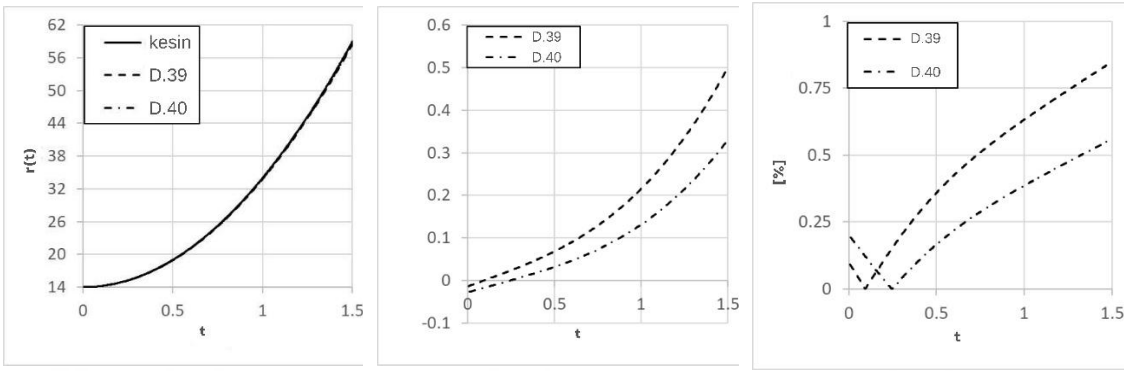
$$\Gamma(t) = -\frac{\pi}{2}e^{t^2}.$$

Ters probleminin analitik çözümü, $\{r(t),\nu(x,t)\} = \left\{\left(6 + 8\varepsilon + 4t^2 + 16\varepsilon t^2\right), t^2\sin 2x\right\}$.

Sayısal çözümde x yönü boyunca 640 adet kafes ve zaman adımı için 0,0025 s kullanılmıştır.

Şekil 4.1'de (a) ters katsayının zamana bağlı değişimi, (b) ters katsayıya ait mutlak hatanın ve (c) bağıl hatanın zamana bağlı değişimi gösterilmektedir. Şekil 4.1(a)'dan görüldüğü üzere, ters katsayı zamanla artış göstermektedir. Bu şekilden, kesin çözüm ile sayısal çözümün birbirine oldukça yakın olduğu anlaşılmaktadır. Sayısal çözüme ait mutlak hata değerleri Şekil 4.1(b)'de sunulmuş olup, bu hataların zamanla arttığı görülmektedir. Şekil 4.1(c)'den, sayısal çözüm için bağıl hatanın başlangıçta zamanla

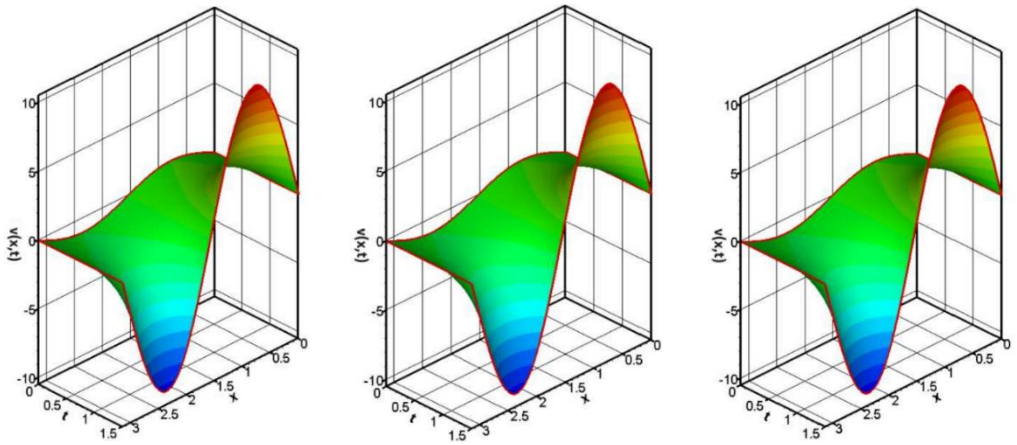
azalarak sıfıra yaklaştığı, ancak bu noktadan sonra zamanla artış gösterdiği anlaşılmaktadır. Bununla birlikte, sayısal çözüm için elde edilen bağıl hata değerleri tüm zaman aralığında %1'in altında kalmaktadır.



(a) (b) (c)

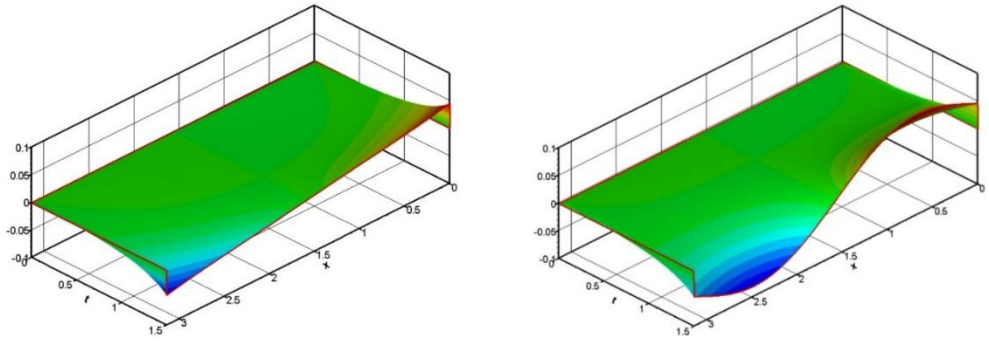
Şekil 4.1. (a) Ters katsayının, (b) mutlak hatanın ve (c) bağıl hatanın zamana bağlı değişimi

Şekil 4.2'de, (a) kesin çözüm, (b) Denklem (4.39)'a göre elde edilen sayısal çözüm ve (c) Denklem (4.40)'a göre elde edilen sayısal çözüm için ν değerinin zamana bağlı değişimi sunulmaktadır. Belirli bir zamanda, dalga denkleminin çözümünün biri pozitif diğeri negatif olmak üzere iki tepe noktasına sahip hiperbolik bir eğri biçiminde olduğu görülmektedir. Zaman ilerledikçe, bu iki tepe noktasının genliğinin arttığı gözlemlenmektedir. Ayrıca, elde edilen üç sonuca ait eğrilerin birbiriyle yüksek derecede uyumlu olduğu anlaşılmaktadır.



(a) (b) (c)

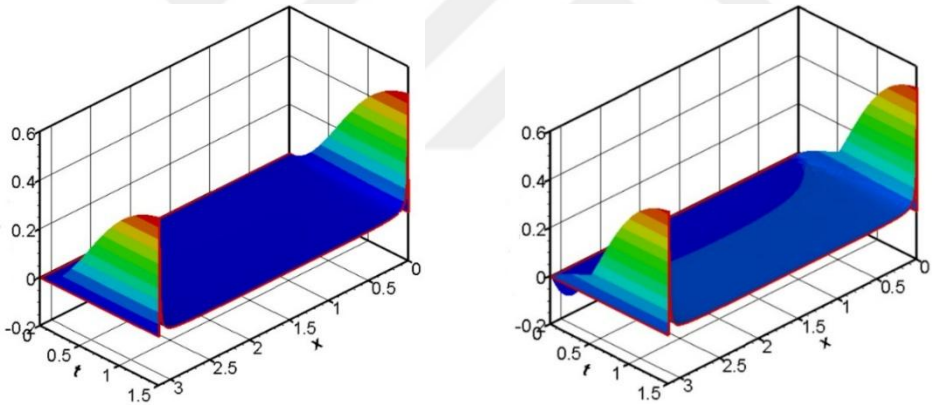
Şekil 4.2. (a) Kesin çözüm, (b) Denklem (4.39) ve (c) Denklem (4.40) için ν değerinin zamana bağlı değişimi



(a) (b)

Şekil 4.3. (a) Denklem (4.39) ve (b) Denklem (4.40) için mutlak hata

Şekil 4.3'te, kesin çözüm ile sayısal çözümler arasındaki zamana bağlı mutlak hata; (a) Denklem (4.39) ve (b) Denklem (4.40)'a göre elde edilen sayısal çözüm için gösterilmektedir. Genel olarak, her iki sayısal çözümde de en büyük gerçek hataların, hiperbolik eğrinin uç noktalarında ve tepe noktaları arasındaki bölgede oluştuğu görülmektedir.



(a) (b)

Şekil 4.4. (a) Denklem (4.39) ve (b) Denklem (4.40) için bağıl hata

Şekil 4.4, kesin çözüm ile sayısal çözümler arasındaki zamana bağlı bağıl hatayı; (a) Denklem (4.39) ve (b) Denklem (4.40)'a göre elde edilen sayısal çözüm için göstermektedir. Her iki sayısal çözüm için de bağıl hata değerleri sınır noktalarına yakın bölgelerde daha yüksek olup, bu değerler %1'in altındadır. Mutlak hatada (Şekil 4.3) veya ters katsayıda (Şekil 4.1(c)) gözlenen durumun aksine, daha yüksek doğrulukta sonlu farklar içeren Denklem (4.40), daha yüksek bağıl hata değerleri üretmiştir. Ancak iki sayısal çözüm arasındaki mutlak bağıl hata farkı oldukça küçüktür.

5.HİPERBOLİK VE PSEUDO-HİPERBOLİK PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİ

5.1.Analitik Çözümün İncelenmesi

Bu bölümde, $\Omega := \{0 < \lambda < \pi, 0 < \psi < \Psi\}$ bölgesinde,

$$\omega_{\psi\psi} - \omega_{\lambda\lambda} = \theta(\psi)\hbar(\lambda,\psi,\omega), \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} &\omega(\lambda,0) = \vartheta(\lambda), \\ &\partial_{\psi}\omega(\lambda,0) = \varpi(\lambda), \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} &\omega(0,\psi) = \omega(\pi,\psi), \\ &\partial_{\lambda}\omega(0,\psi) = \partial_{\lambda}\omega(\pi,\psi), \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\Gamma(\psi) = \int_0^{\pi} \omega(\lambda,\psi)\lambda d\lambda \tag{5.4}$$

ve

$$\tilde{\omega}_{\psi\psi} - \varepsilon\tilde{\omega}_{\lambda\lambda\psi\psi} - \tilde{\omega}_{\lambda\lambda} = \tilde{\theta}(\psi)\hbar(\lambda,\psi,\tilde{\omega}), \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\omega}(\lambda,0) = \vartheta(\lambda), \\ &\partial_{\psi}\tilde{\omega}(\lambda,0) = \varpi(\lambda), \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\omega}(0,\psi) = \tilde{\omega}(\pi,\psi), \\ &\partial_{\lambda}\tilde{\omega}(0,\psi) = \partial_{\lambda}\tilde{\omega}(\pi,\psi), \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\Gamma(\psi) = \int_0^{\pi} \tilde{\omega}(\lambda,\psi)\lambda d\lambda \tag{5.8}$$

hiperbolik ve pseudo-hiperbolik problemlerin çözümleri arasındaki bağlantı incelenecektir. Burada, $\varepsilon \geq 0$ parametre olmak üzere ϑ, ϖ ve Γ fonksiyonları $[0,\pi]$ aralığında, $\hbar(\lambda,\psi,\omega)$ fonksiyonu $\bar{\Omega}\times\{-\infty,\infty\}$ üzerinde tanımlı verilen fonksiyonlardır.

Problem (5.1)–(5.4)'in çözümü,

$$\omega(\lambda,\psi)=\frac{1}{2}\left(\vartheta_0+\varpi_0\psi+\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,\omega)(\psi-\sigma)\theta(\sigma)d\rho d\sigma\right)+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\vartheta_{ck}\cos\wp_k\psi+\frac{\varpi_{ck}}{\wp_k}\sin\wp_k\psi\right)\cos 2k\lambda+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\theta(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\omega)\cos 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right)\cos 2k\lambda+ \tag{5.9}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\vartheta_{sk}\cos\wp_k\psi+\frac{\varpi_{sk}}{\wp_k}\sin\wp_k\psi\right)\sin 2k\lambda+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\theta(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\omega)\sin 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right)\sin 2k\lambda,$$

$$\theta(\psi)=\frac{\Gamma''(\psi)-\pi\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\left(\vartheta_{sk}\cos\wp_k\psi+\frac{\varpi_{sk}}{2k}\sin\wp_k\psi\right)}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\omega)\lambda d\lambda}-$$
$$\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\left(\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\theta(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\omega)\sin 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right)}{\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\omega)\lambda d\lambda}, \tag{5.10}$$

$\wp_k=2k, k=\overline{1,\infty}.$

Problem (5.5)–(5.8)'in çözümü,

$$\tilde{\omega}(\lambda,\psi)=\frac{1}{2}\left(\vartheta_0+\varpi_0\psi+\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})(\psi-\sigma)\tilde{\theta}(\sigma)d\rho d\sigma\right)+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\vartheta_{ck}\cos\tilde{\wp}_k\psi+\frac{\varpi_{ck}}{\wp_k}\sin\tilde{\wp}_k\psi\right)\cos 2k\lambda+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\tilde{\wp}_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})\cos 2k\rho\sin\tilde{\wp}_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right)\cos 2k\lambda+ \tag{5.11}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\vartheta_{sk}\cos\tilde{\wp}_k\psi+\frac{\varpi_{sk}}{\wp_k}\sin\tilde{\wp}_k\psi\right)\sin 2k\lambda+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})\sin 2k\rho\sin\tilde{\wp}_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right)\sin 2k\lambda,$$

$$\tilde{\theta}(\psi)=\frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\left\{\left(1-\varepsilon\tilde{\wp}_k^2\right)\vartheta_{sk}\cos\tilde{\wp}_k\psi+\left(\frac{1}{\tilde{\wp}_k}-\varepsilon\tilde{\wp}_k\right)\varpi_{sk}\sin\tilde{\wp}_k\psi\right\}}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\tilde{\omega})d\lambda}-$$

$$\frac{\pi\sum_{k=1}^{\infty}(2k)\left\{\frac{1}{\tilde{\wp}_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})\sin 2k\rho\sin\tilde{\wp}_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right\}}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\tilde{\omega})d\lambda}+ \qquad (5.12)$$

$$\frac{\tilde{\Gamma}''(\psi)+\varepsilon\varpi_{\psi}(\pi)-\varepsilon\varpi_{\psi}(0)}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\tilde{\omega})d\lambda},$$

$$\tilde{\wp}_k=\frac{2k}{\sqrt{1+4\varepsilon k^2}},\ k=\overline{1,\infty}.$$

Teorem 5.1.

K1. $\Gamma(\psi)\in C^2[0,\Psi],\ \theta(\psi)\in C[0,\Psi].$

K2. $\vartheta(\lambda)\in C^1[0,\pi],\ \varpi(\lambda)\in C^1[0,\pi].$

K3.1 $\hbar(\lambda,\psi,\omega)$ fonksiyonu $\Omega\times(-\infty,\infty)$ bölgesinde sürekli ve aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$\left|\frac{\partial^{(k)}\hbar(\lambda,\psi,\omega)}{\partial\lambda^{(k)}}-\frac{\partial^{(k)}\hbar(\lambda,\psi,\tilde{\omega})}{\partial\lambda^{(k)}}\right|\le\ell(\lambda,\psi)\left|\omega-\tilde{\omega}\right|,\ k=\overline{0,2},\ \ \ell(\lambda,\psi)\in L_2(\Omega),\ \ell(\lambda,\psi)\ge 0.$$

K3.2 $\hbar(\lambda,\psi,\omega)\in C^1[0,\pi],\ \left|\hbar(\lambda,\psi,\omega)\right|\le M,\ \psi\in[0,\Psi].$

K3.3 $\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\omega)d\lambda\ne 0,\forall\,\psi\in[0,\Psi]$

koşulları sağlanırsa $\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{\omega}(\lambda,\psi,\varepsilon)=\omega(\lambda,\psi)$ 'dır.

İspat. Ters katsayı (5.10) ve (5.12) farkı alınır ve $\hbar_{sk} = \dfrac{\hbar'_{ck}}{2k}$ olduğunu göz önünde bulundurulsa,

$$\tilde{\theta}(\psi)-\theta(\psi)=\frac{\tilde{\Gamma}''(\psi)+\varepsilon\varpi_{\psi}(\pi)-\varepsilon\varpi_{\psi}(0)}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\tilde{\omega})d\lambda}-\frac{\Gamma''(\psi)}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\omega)d\lambda}+$$

$$\frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k\vartheta'_{ck}\cos\tilde{\wp}_k\psi+b_k\varpi_{sk}\sin\tilde{\wp}_k\psi\right\}}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\tilde{\omega})d\lambda}-\frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\left(\vartheta'_{sk}\cos\wp_k\psi+\varpi_{sk}\sin\wp_k\psi\right)}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\omega)d\lambda}+$$

$$\frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\tilde{\wp}_k}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\hbar'(\rho,\sigma,\tilde{\omega})\cos 2k\rho\sin\tilde{\wp}_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\tilde{\omega})d\lambda}-$$

$$\frac{-\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\wp_k}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\theta(\sigma)\hbar'(\rho,\sigma,\omega)\cos 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma}{\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\omega)d\lambda}$$

olur. Burada,

$$a_k=\frac{1}{1+4\varepsilon k^2},b_k=\frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon k^2}}.$$

$\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\omega)d\lambda\right|\le\frac{M\pi^2}{2}$ ve $\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\lambda\hbar(\lambda,\psi,\omega)d\lambda\right|\le\frac{M\pi^2}{2}$ olduğunu kabul edersek,

$$\tilde{\theta}(\psi)-\theta(\psi)=\frac{2}{\pi^2M}\left(\tilde{\Gamma}''(\psi)-\Gamma''(\psi)\right)+\frac{2}{\pi^2M}\left(\varepsilon\varpi_{\psi}(\pi)-\varepsilon\varpi_{\psi}(0)\right)+$$

$$\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta'_{ck}\left(\cos\wp_k\psi-a_k\cos\tilde{\wp}_k\psi\right)+\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\varpi_{sk}\left(\sin\wp_k\psi-b_k\sin\tilde{\wp}_k\psi\right)+$$

$$\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\theta(\sigma)\hbar'(\rho,\sigma,\omega)\cos 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right)-$$

$$\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\tilde{\wp}_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\hbar'(\rho,\sigma,\tilde{\omega})\cos 2k\rho\sin\tilde{\wp}_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right)$$

elde edilir. Ekleme ve çıkarma işlemlerini yaptıktan ve gerekli düzenlemelerden sonra eşitliğin mutlak değeri alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&\left|\tilde{\theta}(\psi)-\theta(\psi)\right| \le \frac{2}{\pi^2 M}\left|\tilde{\Gamma}''(\psi)-\Gamma''(\psi)\right| + \frac{2}{\pi^2 M}\left|\varepsilon\varpi_{\psi}(\pi)-\varepsilon\varpi_{\psi}(0)\right| + \\
&\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta'_{ck}\right|\left|\cos\wp_k\psi - a_k\cos\tilde{\wp}_k\psi\right| + \frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varpi_{sk}\right|\left|\sin\wp_k\psi - b_k\sin\tilde{\wp}_k\psi\right| + \\
&\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left[\tilde{\theta}(\sigma)-\theta(\sigma)\right]\hbar'(\rho,\sigma,\omega)\cos 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\tau)d\rho d\sigma\right| + \\
&\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\wp_k}-\frac{1}{\tilde{\wp}_k}\right|\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\hbar'(\rho,\sigma,\tilde{\omega})\cos 2k\rho\sin\tilde{\wp}_k(\psi-\sigma)d\xi\rho d\sigma\right| + \\
&\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\left[\hbar'(\rho,\sigma,\tilde{\omega})-\hbar'(\rho,\sigma,\omega)\right]\cos 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right| + \\
&\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\int_0^{\psi}\left(\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\hbar'(\rho,\sigma,\tilde{\omega})\cos 2k\rho d\rho\right|\right)\left|\sin\wp_k(\psi-\sigma)-\sin\tilde{\wp}_k(\psi-\sigma)\right|d\sigma.
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

elde edilir. Denklem (5.13)'teki $\left|\tilde{\Gamma}''(\psi)-\Gamma''(\psi)\right|, \left|\frac{1}{\wp_k}-\frac{1}{\tilde{\wp}_k}\right|, \left|\sin\wp_k\psi - b_k\sin\tilde{\wp}_k\psi\right|,$ $\left|\cos\wp_k\psi - a_k\cos\tilde{\wp}_k\psi\right|$ ve $\left|\sin\wp_k(\psi-\sigma)-\sin\wp_k(\psi-\sigma)\right|$, $\left|\varepsilon\varpi_{\psi}(\pi)-\varepsilon\varpi_{\psi}(0)\right|$ ifadeleri k,σ ve ψ $\left(0\le\sigma\le\psi\le\Psi\right)$ için $\varepsilon\to 0$ iken sınırlıdır (Halilov ve diğ., 2015). Ayrıca, a_k ve b_k, sınırlıdır. Tüm bu sınırlı ifadeler $\beta(\varepsilon)$ ile gösterilsin ve Denklem (5.13) yeniden yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\left|\tilde{\theta}(\psi)-\theta(\psi)\right| \le \\
&\beta(\varepsilon) + \frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left[\tilde{\theta}(\sigma)-\theta(\sigma)\right]\hbar'(\rho,\sigma,\omega)\cos 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\tau)d\rho d\sigma\right| \\
&+\frac{2}{\pi M}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\left[\hbar'(\rho,\sigma,\tilde{\omega})-\hbar'(\rho,\sigma,\omega)\right]\cos 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right|
\end{aligned}
$$

olur. Eşitsizliğe sarasıyla Cauchy, Bessel, Hölder ve Lipschitz eşitsizliklerini uygulanırsa,

$$
\left|\tilde{\theta}(\psi)-\theta(\psi)\right| \le \frac{\beta(\varepsilon)}{F} + \frac{2}{FM}\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\tilde{\theta}(\sigma)\ell(\rho,\sigma)\left|\tilde{\omega}(\sigma)-\omega(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.14}
$$

elde edilir. Burada

$$F = 1 - \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{\psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24} + \varepsilon\right)}.$$

(5.9) ve (5.11) çözümleri için,

$$\tilde{\omega}_0(\psi,\varepsilon) - \omega_0(\psi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})d\rho d\sigma -$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\theta(\sigma)(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\omega)d\rho d\sigma,$$

$$\tilde{\omega}_{ck}(\psi,\varepsilon) - \omega_{ck}(\psi) =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\vartheta_{ck}\cos\tilde{\wp}_k\psi - \vartheta_{ck}\cos\wp_k\psi\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\tilde{\wp}_k}\varpi_{ck}\sin\tilde{\wp}_k\psi - \frac{\varpi_{ck}}{\wp_k}\sin\wp_k\psi\right) +$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\tilde{\wp}_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})\cos 2k\rho\sin\tilde{\wp}_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right) -$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\theta(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\omega)\cos 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right),$$

$$\tilde{\omega}_{sk}(\psi,\varepsilon) - \omega_{sk}(\psi) =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\vartheta_{sk}\cos\tilde{\wp}_k\psi - \vartheta_{sk}\cos\wp_k\psi\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\tilde{\wp}_k}\varpi_{sk}\sin\tilde{\wp}_k\psi - \frac{\varpi_{sk}}{\wp_k}\sin\wp_k\psi\right) +$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\tilde{\wp}_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})\sin 2k\rho\sin\tilde{\wp}_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right) -$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\theta(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\omega)\sin 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right)$$

katsayıların farkı incelensin. Yukarıdaki farka ekleme ve çıkarma işlemlerini yaptıktan sonra mutlak değeri alınırsa,

$$\left|\tilde{\omega}_0(\psi,\varepsilon) - \omega_0(\psi)\right| \le \frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}[\tilde{\theta}(\sigma) - \theta(\sigma)](\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\omega)d\rho d\sigma\right| +$$
$$\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)(\psi-\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega}) - \hbar(\rho,\sigma,\omega)\right]d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\tilde{\omega}_{ck}(\psi,\varepsilon)-\omega_{ck}(\psi)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{ck}\right|\left|\cos\tilde{\wp}_k\psi-\cos\wp_k\psi\right|+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varpi_{ck}\right|\left|\frac{\sin\tilde{\wp}_k\psi}{\tilde{\wp}_k}-\frac{\sin\wp_k\psi}{\wp_k}\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\tilde{\wp}_k}-\frac{1}{\wp_k}\right|\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})\cos 2k\rho\sin\tilde{\wp}_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left[\tilde{\theta}(\sigma)-\theta(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})\cos 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})-\hbar(\rho,\tau,\omega)\right]\cos 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\int_0^{\psi}\left(\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})\cos 2k\rho d\rho\right|\right)\left|\sin\tilde{\wp}_k(\psi-\sigma)-\sin\wp_k(\psi-\sigma)\right|d\sigma,$$

$$\left|\tilde{\omega}_{sk}(\psi,\varepsilon)-\omega_{sk}(\psi)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{sk}\right|\left|\cos\tilde{\wp}_k\psi-\cos\wp_k\psi\right|+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varpi_{sk}\right|\left|\frac{\sin\tilde{\wp}_k\psi}{\tilde{\wp}_k}-\frac{\sin\wp_k\psi}{\wp_k}\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\tilde{\wp}_k}-\frac{1}{\wp_k}\right|\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})\sin 2k\rho\sin\tilde{\wp}_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left[\tilde{\theta}(\sigma)-\theta(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})\sin 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})-\hbar(\rho,\tau,\omega)\right]\sin 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\int_0^{\psi}\left(\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})\sin 2k\rho d\rho\right|\right)\left|\sin\tilde{\wp}_k(\psi-\sigma)-\sin\wp_k(\psi-\sigma)\right|d\sigma$$

olur. Elde edilen eşitsizlikler

$$\left|\tilde{\omega}(\psi,\varepsilon)-\omega(\psi)\right|\le\frac{\left|\tilde{\omega}_0(\psi,\varepsilon)-\omega_0(\psi)\right|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left|\tilde{\omega}_{ck}(\psi,\varepsilon)-\omega_{ck}(\psi)\right|+\left|\tilde{\omega}_{sk}(\psi,\varepsilon)-\omega_{sk}(\psi)\right|\right]$$

eşitsizliğindeki yerine yazılırsa,

$$\left|\tilde{\omega}(\psi,\varepsilon)-\omega(\psi)\right|\le\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}[\tilde{\theta}(\sigma)-\theta(\sigma)](\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\omega)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)(\psi-\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})-\hbar(\rho,\sigma,\omega)\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{ck}\right|\left|\cos\tilde{\wp}_k\psi-\cos\wp_k\psi\right|+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varpi_{ck}\right|\left|\frac{\sin\tilde{\wp}_k\psi}{\tilde{\wp}_k}-\frac{\sin\wp_k\psi}{\wp_k}\right|+\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\tilde{\wp}_k}-\frac{1}{\wp_k}\right|\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})\cos 2k\rho\sin\tilde{\wp}_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right|+\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left[\tilde{\theta}(\sigma)-\theta(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})\cos 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right|+\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})-\hbar(\rho,\sigma,\omega)\right]\cos 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right|+\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\int_0^{\psi}\left(\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})\cos 2k\rho d\rho\right|\right)\left|\sin\tilde{\wp}_k(\psi-\sigma)-\sin\wp_k(\psi-\sigma)\right|d\sigma+\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{sk}\right|\left|\cos\tilde{\wp}_k\psi-\cos\wp_k\psi\right|+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varpi_{sk}\right|\left|\frac{\sin\tilde{\wp}_k\psi}{\tilde{\wp}_k}-\frac{\sin\wp_k\psi}{\wp_k}\right|+\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\tilde{\wp}_k}-\frac{1}{\wp_k}\right|\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})\sin 2k\rho\sin\tilde{\wp}_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right|+\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left[\tilde{\theta}(\sigma)-\theta(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})\sin 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right|+\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})-\hbar(\rho,\sigma,\omega)\right]\sin 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right|+\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\int_0^{\psi}\left(\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})\sin 2k\rho d\rho\right|\right)\left|\sin\tilde{\wp}_k(\psi-\sigma)-\sin\wp_k(\psi-\sigma)\right|d\sigma
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

olur. Denklem (5.15)'teki $\left|\cos\tilde{\lambda}_k\psi-\cos\lambda_k\psi\right|$, $\left|\frac{\sin\tilde{\lambda}_k\psi}{\tilde{\lambda}_k}-\frac{\sin\lambda_k\psi}{\lambda_k}\right|$, $\left|\frac{1}{\tilde{\lambda}_k}-\frac{1}{\lambda_k}\right|$, ve $\left|\sin\tilde{\lambda}_k(\psi-\sigma)-\sin\lambda_k(\psi-\sigma)\right|$ ifadeleri k,σ ve ψ $\left(0\le\sigma\le\psi\le\Psi\right)$ için $\varepsilon\to 0$ iken sınırlıdır (Halilov ve diğ., 2015). Ayrıca, a_k ve b_k, sınırlıdır. Tüm bu sınırlı ifadeler $\beta(\varepsilon)$ ile gösterilsin ve Denklem (5.15) yeniden yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\left|\tilde{\omega}(\psi,\varepsilon)-\tilde{\omega}(\psi)\right|\le\beta(\varepsilon)+\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}[\tilde{\theta}(\sigma)-\theta(\sigma)](\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\omega)d\rho d\sigma\right|+\\
&\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)(\psi-\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})-\hbar(\rho,\sigma,\omega)\right]d\rho d\sigma\right|+
\end{aligned}
$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left[\tilde{\theta}(\sigma)-\theta(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})\cos 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left[\tilde{\theta}(\sigma)-\theta(\sigma)\right]\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})\sin 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})-\hbar(\rho,\sigma,\omega)\right]\cos 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_k}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\tilde{\theta}(\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\tilde{\omega})-\hbar(\rho,\sigma,\omega)\right]\sin 2k\rho\sin\wp_k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma\right|.$$

olur. Eşitsizliğe sarasıyla Cauchy, Bessel, Hölder ve Lipschitz eşitsizliklerini uygulanırsa,

$$\begin{aligned}&\left|\tilde{\omega}(\psi,\varepsilon)-\omega(\psi)\right|\le\beta(\varepsilon)+2\left(\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}+\sqrt{\frac{\pi\psi}{6}}\right)\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\tilde{\theta}(\sigma)\ell(\rho,\sigma)\left|\tilde{\omega}-\omega\right|\right\}d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+\\&2\left(\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}+\sqrt{\frac{\pi\psi}{6}}\right)\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\hbar(\rho,\sigma,\omega)\left|\tilde{\theta}(\sigma)-\theta(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{5.16}$$

elde edilir. Denklem (5.14), Denklem (5.16)'a yazılırsa,

$$\begin{aligned}&\left|\tilde{\omega}(\psi,\varepsilon)-\omega(\psi)\right|\le\\&\left(1+\frac{CM}{F}\right)\beta(\varepsilon)+\left(\frac{2C}{F}\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}+C\right)\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\tilde{\theta}(\sigma)\ell(\rho,\sigma)\left|\tilde{\omega}(\sigma)-\omega(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$C=2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}+2\sqrt{\frac{\pi\psi}{6}}.$$

Eğer $(m+n)^2\le 2m^2+2n^2$ eşitsizliği uygulanırsa, son eşitsizlik

$$\begin{aligned}&\left|\tilde{\omega}(\psi,\varepsilon)-\omega(\psi)\right|^2\le 2\left(1+\frac{CM}{F}\right)^2\beta^2(\varepsilon)+\\&2\left(\frac{2C}{F}\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}+C\right)^2\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\tilde{\theta}(\sigma)\ell(\rho,\sigma)\left|\tilde{\omega}(\sigma)-\omega(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)\end{aligned}$$

olur. Elde edilen eşitsizliğe Gronwall eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|\tilde{\omega}(\psi,\varepsilon)-\omega(\psi)\right|^2 \le 2\left(1+\frac{CM}{F}\right)^2 \beta^2(\varepsilon) e^{2\left(\frac{2C}{B}\sqrt{\frac{\Psi}{6\pi}}+C\right)^2\left\{\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\tilde{\theta}(\sigma)\ell(\rho,\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right\}} \tag{5.17}$$

elde edilir. Buradan,

$\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{\omega}(\psi,\varepsilon)=\omega(\psi)$ 'dır.

Sonuç olarak, $\varepsilon \to 0$ iken Teorem 5.1 koşulları altında Denklem (5.11)'in çözümü, Denklem (5.9)'in çözümüne yakınsar.

Literatürde, periyodik sınır koşulları altında ele alınan farklı problem sınıfları için çözümlerin ε parametresine bağlılığı, benzer analitik yöntemler kullanılarak Halilov ve diğ. (2015) ile Ciftci ve Halilov (2008) tarafından gerçekleştirilen çalışmalarında incelenmiştir.

5.2.Sayısal Çözümün İncelenmesi

Doğrusallaştırmayı amaçlayan

$$\frac{\partial^2\omega^{(n)}}{\partial t^2}=\varepsilon\frac{\partial^4\omega^{(n)}}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^2\omega^{(n)}}{\partial x^2}+\theta(t)\hbar\left(x,t,\omega^{(n-1)}\right), \tag{5.18}$$

$$\omega^{(n)}(x,0)=\vartheta(x),\partial_t\omega^{(n)}(x,0)=\varpi(x),\ x\in[0,\pi] \tag{5.19}$$

$$\omega^{(n)}(0,t)=\omega^{(n)}(\pi,t),\ \ \partial_x\omega^{(n)}(0,t)=\partial_x\omega^{(n)}(\pi,t),\ \ t\in[0,\Psi] \tag{5.20}$$

problemi için iteratif bir algoritma oluşturulur. $\omega^{(n)}(x,t)=v(x,t)$ ve $\hbar\left(x,t,\omega^{(n-1)}\right)=\tilde{\hbar}(x,t)$ belirleyerek Denklem (5.18),

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\varepsilon\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\theta(t)\tilde{\hbar}(x,t) \tag{5.21}$$

doğrusal bir denklem olarak ifade edilebilir. Doğrusallaştırma yönteminden sonra, problemi sayısal olarak çözmek Denklem (5.21) için kapalı sonlu fark şeması

$$\frac{1}{\Delta t^2}\left(2v_i^{j+3}-5v_i^{j+2}+4v_i^{j+1}-v_i^{j}\right)=$$
$$\frac{\varepsilon}{16\Delta x^2\Delta t^2}\left[\left(v_{i+2}^{j+3}-2v_i^{j+3}+v_{i-2}^{j+3}\right)-\left(2v_{i+2}^{j+1}-4v_i^{j+1}+2v_{i-2}^{j+1}\right)+\left(v_{i+2}^{j-1}-2v_i^{j-1}+v_{i-1}^{j-1}\right)\right]+ \qquad (5.22)$$
$$\frac{1}{12\Delta x^2}\left(v_{i+2}^{j+3}+16v_{i+1}^{j+3}-30v_i^{j+3}+16v_{i-1}^{j+3}-v_{i-2}^{j+3}\right)+\theta^{j+2}\tilde{\hbar}^{j+2}$$

uygulanmıştır. Başlangıç ve sınır koşulları $[0,\pi]\times[0,\Psi]$ bölgesi için

$$v_i^1=\vartheta_i,\ \frac{v_i^2-v_i^1}{\Delta t}=\varpi_i,$$

$$v_1^j=v_{Nx}^j,\ v_{Nx}^j=\frac{v_2^j+v_{Nx-1}^j}{2}.$$

şekilde tanımlanmaktadır.

$[0,\pi]\times[0,\Psi]$ aralığı ayrıklaştırılarak $x_i=i(\Delta x-1)$, $i=1,2,....,Nx$ ve $t_j=j\Delta t$, $j=1,2,....,Nt$ şeklinde tanımlansın. Burada $\Delta x=\frac{\pi}{Nx}$ ve $\Delta t=\frac{\Psi}{Nt}$ sırasıyla x yönündeki uzay adımını ve zaman adımını göstermektedir. Nx ve Nt pozitif tam sayılardır. Ayrık çözüm $v_i^j=v(x_i,t_j)$ ile, başlangıç fonksiyonu $\vartheta_i=\vartheta(x_i)$ ve kaynak terimi $\tilde{\hbar}^{j+2}=\hbar(x_i,t_{j+2})$ biçiminde tanımlanmıştır.

Hesaplamalarda $j+3$ indeksi mevcut zamanı, $j+2$ bir önceki zamanı, $j+1$ adım önceki zamanı ve j ise üç adım önceki zamanı ifade etmektedir.

Ters katsayı

$$\theta(t)=\frac{E''(t)-\varepsilon\left[\pi v_{xtt}(\pi,t)-v_{tt}(\pi)+v_{tt}(0)\right]-\pi v_x(\pi,t)}{\int_0^{\pi}x\tilde{\hbar}(x,t)\,dx}. \qquad (5.23)$$

oluşturan terimlerin her biri, sonlu farklar yöntemi kullanılarak ayrı ayrı ayrıklaştırılmıştır.

$$\Gamma''(t)=\frac{2\Gamma^{j+2}-5\Gamma^{j+1}+4\Gamma^{j}-\Gamma^{j-1}}{\Delta t^{2}}, \tag{5.24}$$

$$v_{tt}(\pi)=\frac{2v_{Nx}^{j+2}-5v_{Nx}^{j+1}+4v_{Nx}^{j}-v_{Nx}^{j}}{\Delta t^{2}}, \tag{5.25}$$

$$v_{tt}(0)=\frac{2v_{1}^{j+2}-5v_{1}^{j+1}+4v_{1}^{j}-v_{1}^{j}}{\Delta t^{2}}, \tag{5.26}$$

$$\pi v_{x}(\pi,t)=\pi\frac{3v_{Nx}^{j+2}-4v_{Nx-1}^{j+2}+4v_{Nx-2}^{j+2}}{2\Delta x}, \tag{5.27}$$

$$\pi v_{xtt}(\pi,t)=\frac{\pi\left(\left(v_{Nx}^{j+2}-2v_{Nx}^{j+1}+v_{Nx}^{j}\right)-\left(v_{Nx-1}^{j+2}-2v_{Nx-1}^{j+1}+v_{Nx-1}^{j}\right)\right)}{\Delta x\Delta t^{2}}. \tag{5.28}$$

$\left(\tilde{\hbar}in\right)^{j+2}=\int_{0}^{\pi}x\tilde{\hbar}(x,t)dx$ hesaplamak için trapezoidal integrasyon kuralı kullanılır.

Denklem (5.22)'nin sayısal çözümünde, elde edilen lineer denklem sistemi doğrudan çözüm yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Önceki zaman adımlarından bilinen terimleri içeren sağ taraf vektörü,

$$V_{i}=-5v_{i}^{j+2}+4v_{i}^{j+1}-v_{i}^{j}+\frac{\varepsilon}{8\Delta x^{2}}\left(v_{i+2}^{j+1}-2v_{i}^{j+1}+v_{i-2}^{j+1}\right)-\frac{\varepsilon}{16\Delta x^{2}}\left(v_{i+2}^{j-1}-2v_{i}^{j-1}-v_{i-2}^{j-1}\right)-$$
$$\theta^{j+2}\tilde{\hbar}^{j+2}\Delta t^{2}$$

şeklindedir.

Örnek 5.1.

$$\omega_{tt}-\varepsilon\omega_{xxtt}-\omega_{xx}=\theta(t)\sin(2x)\left[\varepsilon^{2}+\left(4+4\varepsilon^{3}+\varepsilon^{2}\right)\sin(2x)\right],$$

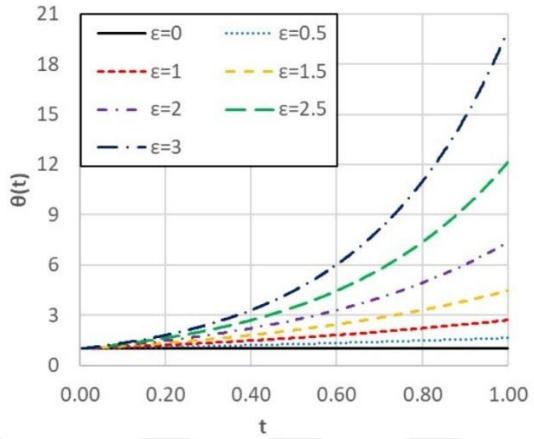
$$\omega(x,0)=1+\sin 2x,\ \partial_{t}\omega(x,0)=0,\ x\in[0,\pi]$$

$$\omega(0,t)=\omega(\pi,t),\partial_{x}\omega(0,t)=\partial_{x}\omega(\pi,t),\ 0\le t\le\Psi$$

$$\Gamma(t)=\frac{\left(\pi^{2}-\pi\right)}{2}e^{\varepsilon t}.$$

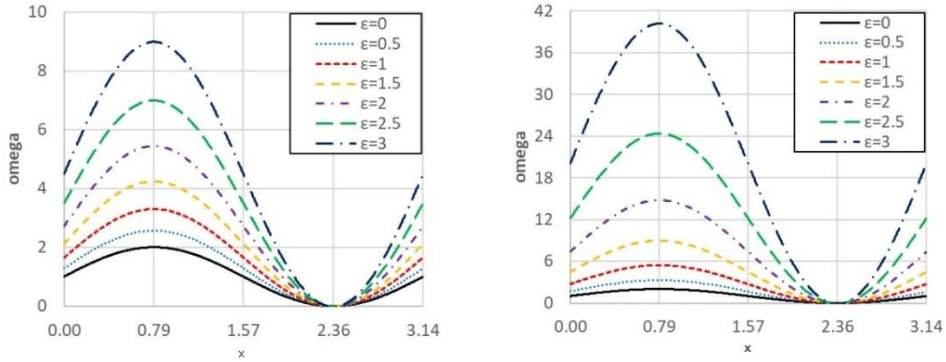
Ters probleminin analitik çözümü, $\left\{\theta(t),\omega(x,t)\right\}=\left\{e^{\varepsilon t},\left(1+\sin(2x)\right)e^{\varepsilon t}\right\}$.

Sayısal hesaplamalarda x yönü boyunca 640 kafes ve 0,00125 s'lik zaman adımı kullanılmıştır. Bu aşamada, sayısal çözümler $\varepsilon = 0$'dan $\varepsilon = 3$'e kadar 0,5 aralıklarla hesaplanmış ve karşılaştırılmıştır.



Şekil 5.1. Tüm ε değerleri için ters katsayının sayısal tahminleri

Şekil 5.1'te, tüm ε değerleri için ters katsayıların sayısal tahmini gösterilmiştir. Ters katsayı üstel bir fonksiyon olup, ε değeri arttıkça bu eğilim daha belirgin hale gelmektedir. Zaman $t = 0$ anında, üstel fonksiyon tabanlı ters katsayı tüm ε değerleri için birim sabit değerini almakta; zaman ilerledikçe bu değerin arttığı gözlemlenmektedir.

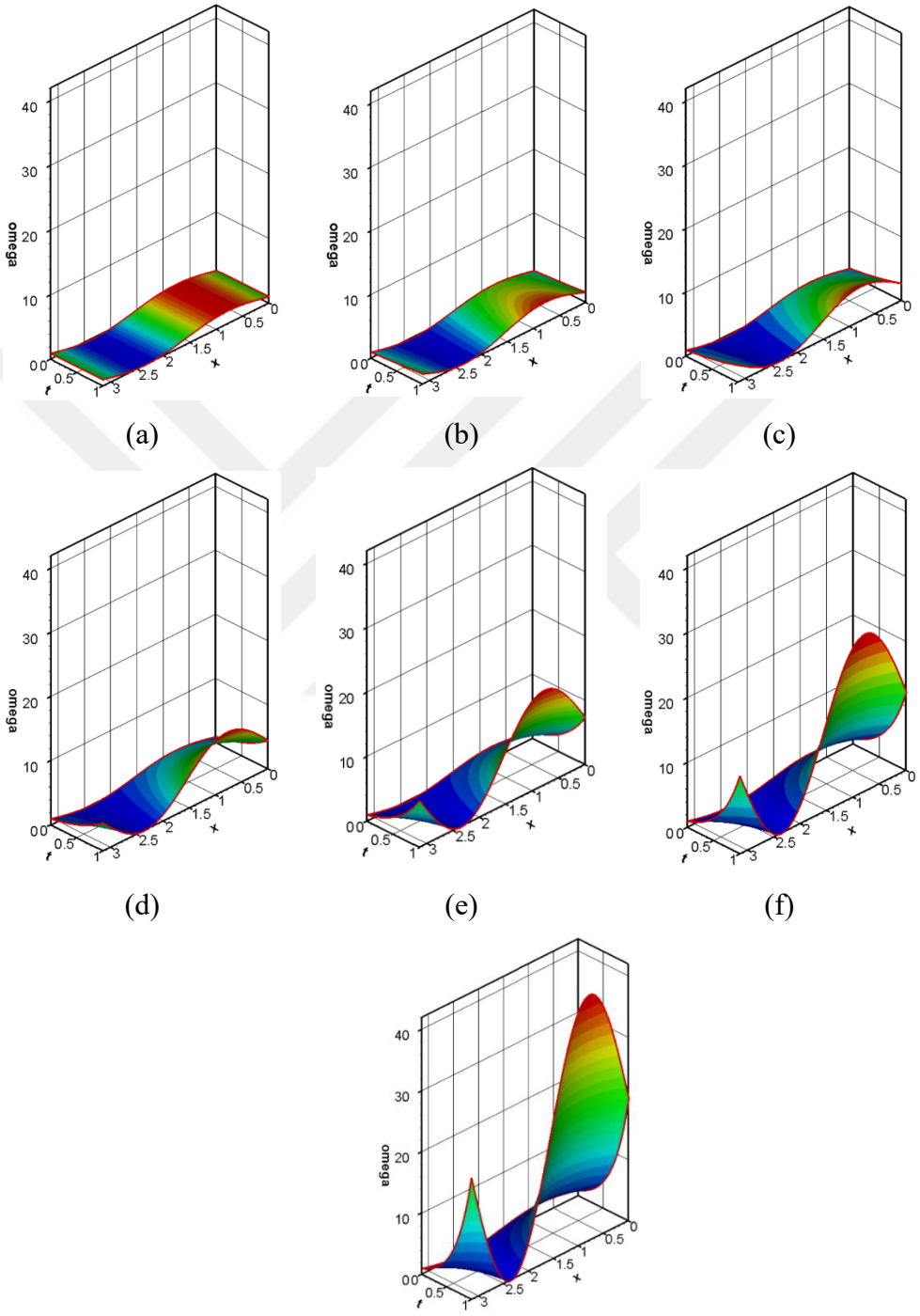


(a) (b)

Şekil 5.2. Tüm ε değerleri için ω sayısal çözüm değerleri: (a) $t = 0,5s$ ve (b) $t = 1s$

Şekil 5.2, tüm ε değerleri için ω sayısal değerlerindeki değişimi (a) $t = 0,5s$ ve (b) $t = 1s$ anlarında göstermektedir. ω sayısal değerlerinin genel eğilimi incelendiğinde, tüm ε değerleri için başlangıçta yaklaşık 0,79'a kadar arttığı, ardından 2,36'ya kadar azalarak sıfıra ulaştığı görülmektedir. Ardından sona doğru yeniden artış eğilimi gözlenmektedir. ω değerleri hem ε hem de zamanla birlikte artış göstermektedir. $t = 0,5s$ anında, $\varepsilon = 3$

için maksimum ω değeri yaklaşık 9 civarındadır; $t = 1s$ anında ise bu değer yaklaşık 40'a ulaşmaktadır. Ek olarak, $t = 1s$ ve $\varepsilon = 2,5$ için maksimum ω değeri yaklaşık 24 iken, $\varepsilon = 3$ olduğunda bu değer yaklaşık 41'e ulaşmaktadır.



Şekil 5.3. Tüm zamanlar ve (a) $\varepsilon = 0$; (b) $\varepsilon = 0,5$; (c) $\varepsilon = 1$; (d) $\varepsilon = 1,5$; (e) $\varepsilon = 2$; (f) $\varepsilon = 2,5$ ve (g) $\varepsilon = 3$ değerleri için ω sayısal çözüm tahminleri

Şekil 5.3, ω değerlerinin hem uzunluk hem de zamana göre değişimini gösteren, sayısal çözümlerden elde edilen üç boyutlu grafikleri gösterilmektedir. Bu grafikler sırasıyla (a) $\varepsilon = 0$, (b) $\varepsilon = 0{,}5$; (c) $\varepsilon = 1$; (d) $\varepsilon = 1{,}5$; (e) $\varepsilon = 2$; (f) $\varepsilon = 2{,}5$ ve (g) $\varepsilon = 3$ durumlarını göstermektedir. Şekil 5.2 için yapılan yorumlar, Şekil 5.3 için de geçerlidir.

6.TERS KATSAYILI HİPERBOLİK PROBLEMİN İNCELENMESİ

6.1.Çözümün Bulunması

$\Psi > 0$ olmak üzere, $\Omega := \{0 < \lambda < \pi, 0 < \psi < \Psi\}$ bölgesinde tanımlı Denklem (6.1) ile verilen ters katsayılı hiperbolik denklem incelenmektedir:

$$\upsilon_{\psi\psi} - \upsilon_{\lambda\lambda} - a(\psi)\upsilon = \hbar(\lambda,\psi,\upsilon) \tag{6.1}$$

Denklem için başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} &\upsilon(\lambda,0) = \vartheta(\lambda), \\ &\partial_{\psi}\upsilon(\lambda,0) = \varpi(\lambda), \end{aligned} \tag{6.2}$$

periyodik sınır koşulları

$$\begin{aligned} &\upsilon(0,\psi) = \upsilon(\pi,\psi), \\ &\partial_{\lambda}\upsilon(0,\psi) = \partial_{\lambda}\upsilon(\pi,\psi), \end{aligned} \tag{6.3}$$

ve ek koşul

$$\Gamma(\psi) = \int_0^{\pi} \upsilon(\lambda,\psi)d\lambda \tag{6.4}$$

ile birlikte ele alınmaktadır. Burada ϑ, ϖ ve Γ fonksiyonları $[0,\pi]$ aralığında, $\hbar(\lambda,\psi,\upsilon)$ fonksiyonu $\bar{\Omega}\times\{-\infty,\infty\}$ üzerinde tanımlı verilen fonksiyonlardır. $\varepsilon > 0$, küçük parametredir.

Problem (6.1)–(6.3)'ün çözümü Fourier yöntemiyle Denklem (6.5) şeklinde elde edilir:

$$\begin{aligned} \upsilon(\lambda,\psi) = {} & \frac{\vartheta_0 + \varpi_0\psi}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[a(\sigma)\upsilon(\rho,\sigma) + \hbar(\rho,\sigma,\upsilon)\right]d\rho d\sigma\right) + \\ & \sum_{k=1}^{\infty}\left(\cos(2k\psi)\vartheta_{ck} + \frac{\sin(2k\psi)}{2k}\varpi_{ck}\right)\cos 2k\lambda + \\ & \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[a(\sigma)\upsilon(\rho,\sigma) + \hbar(\rho,\sigma,\upsilon)\right]d\rho d\sigma\right)\cos 2k\lambda + \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\cos(2k\psi)\vartheta_{sk}+\frac{\sin(2k\psi)}{2k}\varpi_{sk}\right)\sin 2k\lambda+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[a(\sigma)\upsilon(\rho,\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\upsilon)\right]d\rho d\sigma\right)\sin 2k\lambda.$$

Ek koşul (6.4) ve Denklem (6.5) kullanılarak $a(\psi)$ ters katsayı,

$$a(\psi)=\frac{\Gamma''(\psi)-\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\upsilon)d\lambda}{\Gamma(\psi)} \tag{6.6}$$

elde edilir.

6.2.Çözümün Varlığı

Teorem 6.1.

K1. $\Gamma(\psi)\in C^2[0,\Psi]$, $a(\psi)\in C[0,\Psi]$.

K2. $\vartheta(\lambda)\in C[0,\pi]$, $\varpi(\lambda)\in C[0,\pi]$.

K3.1 $\hbar(\lambda,\psi,\upsilon)$ fonksiyonu $\Omega\times(-\infty,\infty)$ bölgesinde sürekli ve aşağıdaki koşullar sağlansın: $\left|\frac{\partial^{(k)}\hbar(\lambda,\psi,\upsilon)}{\partial\lambda^{(k)}}-\frac{\partial^{(k)}\hbar(\lambda,\psi,\bar{\upsilon})}{\partial\lambda^{(k)}}\right|\le\ell(\lambda,\psi)\left|\upsilon-\bar{\upsilon}\right|$, $k=\overline{0,2}$,

burada $\ell(\lambda,\psi)\in L_2(\Omega)$, $\ell(\lambda,\psi)\ge 0$.

K3.2 $\hbar(\lambda,\psi,\upsilon)\in C[0,\pi],\psi\in[0,\Psi],\left|\hbar(\lambda,\psi,\upsilon)\right|\le M$,

K3.3 $\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\upsilon)d\lambda\neq 0$, $\forall\psi\in[0,\Psi]$.

K1-K3 koşulları sağlandığında, Denklem (6.1)–(6.4)'in çözümü var ve tektir.

İspat. Picard ardışık yaklaşım yöntemi kullanılarak, Denklem (6.5) ve (6.6) için ardışık yaklaşımlar aşağıdaki biçimde oluşturulur:

$$\upsilon_0^{(N+1)}(\psi)=\vartheta_0+\varpi_0\psi+\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\Big[\upsilon^{(N)}(\rho,\sigma)a^{(N)}(\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(N)})\Big]d\rho d\sigma,$$

$$\begin{aligned}\upsilon_{ck}^{(N+1)}(\psi)&=\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta_{ck}\cos 2k\psi+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varpi_{ck}}{2k}\sin 2k\psi+\\&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\Big[a^{(N)}(\sigma)\upsilon^{(N)}(\rho,\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(N)})\Big]d\rho d\sigma,\end{aligned}\tag{6.7}$$

$$\begin{aligned}\upsilon_{sk}^{(N+1)}(\psi)&=\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta_{sk}\cos 2k\psi+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varpi_{sk}}{2k}\sin 2k\psi+\\&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\Big[a^{(N)}(\sigma)\upsilon^{(N)}(\rho,\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(N)})\Big]d\rho d\sigma,\end{aligned}$$

$$a^{(N+1)}(\psi)=\frac{\Gamma''(\psi)-\int_0^{\pi}\hbar\left(\lambda,\psi,\upsilon^{(N)}\right)d\lambda}{\Gamma(\psi)}.\tag{6.8}$$

Burada

$$\upsilon_0^{(0)}(\psi)=\vartheta_0+\varpi_0\psi,$$

$$\upsilon_{ck}^{(0)}(\psi)=\vartheta_{ck}\cos 2k\psi+\frac{1}{2k}\varpi_{ck}\sin 2k\psi,$$

$$\upsilon_{sk}^{(0)}(\psi)=\vartheta_{sk}\cos 2k\psi+\frac{1}{2k}\varpi_{sk}\sin 2k\psi.$$

Teorem gereği $\upsilon^{(0)}(\psi)\in \mathrm{B},\psi\in[0,\Psi]$ olduğu aşikardır.

Eğer $N=0$ ise (6.7) ve (6.8) sistemi,

$$\upsilon_0^{(1)}(\psi)=\vartheta_0+\varpi_0\psi+\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\Big[\upsilon^{(0)}(\rho,\sigma)a^{(0)}(\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(0)})\Big]d\rho d\sigma,$$

$$\upsilon_{ck}^{(1)}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta_{ck}\cos 2k\psi+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varpi_{ck}}{2k}\sin 2k\psi+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left[a^{(0)}(\sigma)\upsilon^{(0)}(\rho,\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(0)})\right]\cos 2k\rho\sin 2k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma, \tag{6.9}$$

$$\upsilon_{sk}^{(1)}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta_{sk}\cos 2k\psi+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varpi_{sk}}{2k}\sin 2k\psi+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left[a^{(0)}(\sigma)\upsilon^{(0)}(\rho,\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(0)})\right]\sin 2k\rho\sin 2k(\psi-\sigma)d\rho d\sigma,$$

$$a^{(1)}(\psi)=\frac{\Gamma''(\psi)-\int_0^{\pi}\hbar\left(\lambda,\psi,\upsilon^{(0)}\right)d\lambda}{\Gamma(\psi)} \tag{6.10}$$

olur.

Denklem (6.9) için $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma$ ifadesi eklenip çıkarılırsa ve mutlak değeri alınırsa,

$$\left|\upsilon_0^{(1)}(\psi)\right|\le\left|\vartheta_0\right|+\left|\varpi_0\psi\right|+\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)a^{(0)}(\sigma)\upsilon^{(0)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$
$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]d\rho d\sigma\right|+\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\upsilon_{ck}^{(1)}(\psi)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{ck}\right|+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\varpi_{ck}}{2k}\right|+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi k}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)a^{(0)}(\sigma)\upsilon^{(0)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi k}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]d\rho d\sigma\right|+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi k}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\upsilon_{sk}^{(1)}(\psi)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|\vartheta_{sk}\right|+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\varpi_{sk}}{2k}\right|+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi k}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)a^{(0)}(\sigma)\upsilon^{(0)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi k}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi k}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma\right|$$

elde edilir. Cauchy, Bessel, Hölder eşitsizlikleri ile Lipschitz koşulu uygulanırsa,

$$\left|\upsilon_0^{(1)}(\psi)\right|\le|\vartheta_0|+|\varpi_0\psi|+2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{a^{(0)}(\sigma)\upsilon^{(0)}(\rho,\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\ell(\rho,\sigma)\left|\upsilon^{(0)}(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar^2(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\upsilon_{ck}^{(1)}(\psi)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}|\vartheta_{ck}|+\frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{k=1}^{\infty}|\varpi_{ck}|+\pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\upsilon^{(0)}(\rho,\sigma)a^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\ell(\rho,\sigma)\left|\upsilon^{(0)}(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+\pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar^2(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\upsilon_{sk}^{(1)}(\psi)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}|\vartheta_{sk}|+\frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{k=1}^{\infty}|\varpi_{sk}|+\pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\upsilon^{(0)}(\rho,\sigma)a^{(0)}(\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\pi\sqrt{\frac{\psi}{6\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\ell(\rho,\sigma)\left|\upsilon^{(0)}(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+\pi\sqrt{\frac{t}{6\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar^2(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Maksimumu alınırsa,

$$\left\|\upsilon^{(1)}(\psi)\right\|\le\frac{\|\vartheta_0\|+\|\varpi_0\||\Psi|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\|\vartheta_{ck}\|+\|\vartheta_{sk}\|\right)+\frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\|\varpi_{ck}\|+\|\varpi_{sk}\|\right)$$
$$\left(\pi|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}+2\pi^2|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi}{6\pi}}\right)\left\|a^{(0)}(\psi)\right\|\left\|\upsilon^{(0)}(\psi)\right\|+$$
$$\left(\pi|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}+2\pi^2|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi}{6\pi}}\right)\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\upsilon^{(0)}(\psi)\right\|+\left(\pi|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}+2\pi^2|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi}{6\pi}}\right)\left\|\hbar(\lambda,\psi,0)\right\|$$

elde edilir. Denklem (6.10) için $\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,0)d\lambda$ ifadesi eklenip çıkarılırsa ve mutlak değeri alınarak Cauchy eşitsizliği ile Lipschitz koşulu uygulanırsa,

$$\left|a^{(1)}(\psi)\right| \le \frac{\left|\Gamma''(\psi)\right| + \sqrt{\pi}\left(\int_0^{\pi} \ell^2(\lambda,\psi)\left|\upsilon^{(0)}(\psi)\right| dx\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\pi}\left(\int_0^{\pi} \hbar^2(\lambda,\psi,0) d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}}{\left|\Gamma(\psi)\right|}$$

elde edilir. Maksimumu alınırsa,

$$\left\|a^{(1)}(\psi)\right\| \le \frac{\left\|\Gamma''(\psi)\right\| + \sqrt{\pi}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\upsilon^{(0)}(\psi)\right\| + \sqrt{\pi}\left\|\hbar(\lambda,\psi,0)\right\|}{\left\|\Gamma(\psi)\right\|}$$

elde edilir. Teorem koşulundan $\upsilon^{(1)}(\psi) \in \mathrm{B}$.

Tümevarım yönteminden N+1 için,

$$\left\|\upsilon^{(N+1)}(\psi)\right\| \le \frac{\left\|\varphi_0\right\| + \left\|\psi_0\right\|\left|\Psi\right|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\varphi_{ck}\right\| + \left\|\varphi_{sk}\right\|\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\psi_{ck}\right\| + \left\|\psi_{sk}\right\|\right)$$
$$\left(\pi\left|\Psi\right|\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}} + 2\pi^2\left|\Psi\right|\sqrt{\frac{\Psi}{6\pi}}\right)\left\|a^{(N)}(\psi)\right\|\left\|\upsilon^{(N)}(\psi)\right\| +$$
$$\left(\pi\left|\Psi\right|\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}} + 2\pi^2\left|\Psi\right|\sqrt{\frac{\Psi}{6\pi}}\right)\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\upsilon^{(N)}(\psi)\right\| +$$
$$\left(\pi\left|\Psi\right|\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}} + 2\pi^2\left|\Psi\right|\sqrt{\frac{\Psi}{6\pi}}\right)\left\|\hbar(\lambda,\psi,0)\right\|,$$

$$\left\|a^{(N+1)}(\psi)\right\| \le \frac{\left\|\Gamma''(\psi)\right\| + \sqrt{\pi}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\upsilon^{(N)}(\psi)\right\| + \sqrt{\pi}\left\|\hbar(\lambda,\psi,0)\right\|}{\left\|\Gamma(\psi)\right\|}$$

elde edilir. Teoremden koşulları gereği ve $\upsilon^{(N)}(\psi) \in \mathrm{B}$ olduğundan, $\upsilon^{(N+1)}(\psi) \in B$ 'dır.

6.3.Ardışık Yaklaşımların Yakınsaklığı

Ardışık yaklaşımların yakınsaklığını göstermek için ardışık terimler arasındaki farklar ele alınır:

$$\upsilon_0^{(1)}(\psi) - \upsilon_0^{(0)}(\psi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)a^{(0)}(\sigma)\upsilon^{(0)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma + \frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\psi,\upsilon^{(0)})d\rho d\psi,$$

$$\upsilon_{ck}^{(1)}(\psi)-\upsilon_{ck}^{(0)}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\upsilon^{(0)}(\rho,\sigma)a^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\psi,\upsilon^{(0)})d\rho d\sigma,$$

$$\upsilon_{sk}^{(1)}(\psi)-\upsilon_{sk}^{(0)}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\upsilon^{(0)}(\rho,\sigma)a^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\psi,\upsilon^{(0)})d\rho d\sigma$$

Denklemlere $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma$ ifadesi eklenip çıkarılırsa ve mutlak değeri alınırsa,

$$\left|\upsilon_0^{(1)}(\psi)-\upsilon_0^{(0)}(\psi)\right|\le\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)a^{(0)}(\sigma)\upsilon^{(0)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]d\rho d\sigma\right|+\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\upsilon_{ck}^{(1)}(\psi)-\upsilon_{ck}^{(0)}(\psi)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\upsilon^{(0)}(\rho,\sigma)a^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\upsilon_{sk}^{(1)}(\psi)-\upsilon_{sk}^{(0)}(\psi)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\upsilon^{(0)}(\rho,\sigma)a^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma\right|$$

elde edilir. Cauchy, Bessel, Hölder eşitsizlikleri ile Lipschitz koşulu uygulanıp maksimumu alınırsa,

$$\left\|\upsilon^{(1)}(\psi)-\upsilon^{(0)}(\psi)\right\| \le A\left\|a^{(0)}(\psi)\right\|\left\|\upsilon^{(0)}(\psi)\right\| + A\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\upsilon^{(0)}(\psi)\right\| + A\left\|\hbar(\lambda,\psi,0)\right\|$$

elde edilir. Bu eşitsizlik, teoremde verilen koşullar altında sınırlıdır.

$$K := \left\|\upsilon^{(1)}(\psi)-\upsilon^{(0)}(\psi)\right\| < \infty \tag{6.11}$$

belirlensin. Ters katsayı için,

$$a^{(2)}(\psi)-a^{(1)}(\psi) = \frac{-\int_0^{\pi}\left[\hbar\left(\lambda,\psi,\upsilon^{(2)}\right)-\hbar\left(\lambda,\psi,\upsilon^{(1)}\right)\right]d\lambda}{\Gamma(\psi)}$$

mutlak değeri alınarak Cauchy eşitsizliği ile Lipschitz koşulu uygulanıp maksimumu alınırsa,

$$\left\|a^{(2)}(\psi)-a^{(1)}(\psi)\right\| \le \frac{\sqrt{\pi}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\upsilon^{(2)}(\psi)-\upsilon^{(1)}(\psi)\right\|}{\left\|E(\psi)\right\|} \tag{6.12}$$

elde edilir.

Yeniden,

$$\upsilon_0^{(2)}(\psi)-\upsilon_0^{(1)}(\psi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi} a^{(2)}(\sigma)(\psi-\sigma)\upsilon^{(2)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma + \frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(1)})d\rho d\sigma -$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi} a^{(1)}(\sigma)(\psi-\sigma)\upsilon^{(1)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma - \frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(0)})d\rho d\sigma,$$

$$\upsilon_{ck}^{(2)}(\psi)-\upsilon_{ck}^{(1)}(\psi) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\upsilon^{(2)}(\rho,\sigma)a^{(2)}(\sigma)d\rho d\sigma +$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(1)})d\rho d\sigma -$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\upsilon^{(1)}(\rho,\sigma)a^{(1)}(\sigma)d\rho d\sigma -$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(0)})d\rho d\sigma,$$

$$\upsilon_{sk}^{(2)}(\psi)-\upsilon_{sk}^{(1)}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\upsilon^{(2)}(\rho,\sigma)a^{(2)}(\sigma)d\rho d\sigma+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(1)})d\rho d\sigma-$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\upsilon^{(1)}(\rho,\sigma)a^{(1)}(\sigma)d\rho d\sigma-$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(0)})d\rho d\sigma$$

farkı alınsın. $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}a^{(1)}(\sigma)\upsilon^{(2)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma$ ifadesi eklenip çıkarılırsa ve mutlak değeri alınırsa,

$$\left|\upsilon_0^{(2)}(\psi)-\upsilon_0^{(1)}(\psi)\right|\le\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[a^{(2)}(\sigma)-a^{(1)}(\sigma)\right]\upsilon^{(2)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)a^{(1)}(\sigma)\left[\upsilon^{(2)}(\rho,\sigma)-\upsilon^{(1)}(\rho,\sigma)\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(1)})-\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(0)})\right]d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\upsilon_{ck}^{(2)}(\psi)-\upsilon_{ck}^{(1)}(\psi)\right|\le$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[a^{(2)}(\sigma)-a^{(1)}(\sigma)\right]\upsilon^{(2)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\upsilon^{(2)}(\rho,\sigma)-\upsilon^{(1)}(\rho,\sigma)\right]a^{(1)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(1)})-\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(0)})\right]d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\upsilon_{sk}^{(2)}(\psi)-\upsilon_{sk}^{(1)}(\psi)\right|\le$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[a^{(2)}(\sigma)-a^{(1)}(\sigma)\right]\upsilon^{(2)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\upsilon^{(2)}(\rho,\sigma)-\upsilon^{(1)}(\rho,\sigma)\right]a^{(1)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(1)})-\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(0)})\right]d\rho d\sigma\right|$$

elde edilir. Cauchy, Bessel, Hölder eşitsizlikleri ile Lipschitz koşulu uygulanıp maksimumu alınırsa,

$$\begin{aligned}\left\|\upsilon^{(2)}(\psi)-\upsilon^{(1)}(\psi)\right\| &\le \left(\pi|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}+2\pi^2|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi}{6\pi}}\right)\left\|a^{(2)}(\psi)-a^{(1)}(\psi)\right\|\left\|\upsilon^{(2)}(\psi)\right\|+\\ &\left(\pi|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}+2\pi^2|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi}{6\pi}}\right)\left\|a^{(1)}(\psi)\right\|\left\|\upsilon^{(2)}(\psi)-\upsilon^{(1)}(\psi)\right\|+\\ &\left(\pi|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}+2\pi^2|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi}{6\pi}}\right)\left\|\ell(x,\psi)\right\|\left\|\upsilon^{(1)}(\psi)-\upsilon^{(0)}(\psi)\right\|\end{aligned} \tag{6.13}$$

elde edilir. Denklem (6.12), Denklem (6.13)'de yerine yazıldığında,

$$\left\|\upsilon^{(2)}(\psi)-\upsilon^{(1)}(\psi)\right\| \le \frac{A}{D_1}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\ell(\rho,\sigma)\left|\upsilon^{(1)}(\sigma)-\upsilon^{(0)}(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6.14}$$

elde edilir. Denklem (6.11), Denklem (6.14)'de yerine yazıldığında,

$$\left\|\upsilon^{(2)}(\psi)-\upsilon^{(1)}(\psi)\right\| \le \frac{AK}{D_1}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\ell^2(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6.15}$$

elde edilir. Burada,

$$A=\pi|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}+2\pi^2|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi}{6\pi}},$$

$$D_1=\frac{\|\Gamma(\psi)\|-A\left(\sqrt{\pi}\left\|\upsilon^{(2)}(\psi)\right\|\|\ell(\lambda,\psi)\|-\left\|a^{(1)}(\psi)\right\|\|\Gamma(\psi)\|\right)}{\|\Gamma(\psi)\|}.$$

Aynı yöntemler sonraki ardışık yaklaşımlar için uygulanırsa,

$$\left\|a^{(3)}(\psi)-a^{(2)}(\psi)\right\| \le \frac{\sqrt{\pi}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\upsilon^{(3)}(\psi)-\upsilon^{(2)}(\psi)\right\|}{\left\|\Gamma(\psi)\right\|}, \tag{6.16}$$

$$\begin{aligned}\left\|\upsilon^{(3)}(\psi)-\upsilon^{(2)}(\psi)\right\| &\le A\left\|\upsilon^{(3)}(\psi)\right\|\left\|a^{(3)}(\psi)-a^{(2)}(\psi)\right\|+\\ A\left\|a^{(2)}(\psi)\right\|&\left\|\upsilon^{(3)}(\psi)-\upsilon^{(2)}(\psi)\right\|+A\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\upsilon^{(2)}(\psi)-\upsilon^{(1)}(\psi)\right\|\end{aligned} \tag{6.17}$$

elde edilir. Denklem (6.15) ve (6.16), Denklem (6.17)'de yerine yazıldığında,

$$\left\|\upsilon^{(3)}(\psi)-\upsilon^{(2)}(\psi)\right\| \le \frac{A^2K}{D_2D_1}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\ell^2(\rho,\sigma)\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\ell^2(\tilde{\rho},\tilde{\sigma})d\tilde{\rho}d\tilde{\sigma}\right)d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. İntegral için değişken değiştirme yöntemi uygulanırsa,

$$\left\|\upsilon^{(3)}(\psi)-\upsilon^{(2)}(\psi)\right\| \le \frac{A^2K}{D_2D_1}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\ell^2(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Burada,

$$D_2=\frac{\left\|\Gamma(\psi)\right\|-A\left(\sqrt{\pi}\left\|\upsilon^{(3)}(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|-\left\|a^{(2)}(\psi)\right\|\left\|\Gamma(\psi)\right\|\right)}{\left\|\Gamma(\psi)\right\|}.$$

Eğer $\upsilon^{(N+1)}(\psi)$ ve $a^{(N+1)}(\psi)$ iterasyonlarına kadar sürekli olarak aynı yöntemler uygulanırsa,

$$\left\|\upsilon^{(N+1)}(\psi)-\upsilon^{(N)}(\psi)\right\| \le \frac{A^NK}{\prod_{i=1}^{N}D_i}\frac{1}{\sqrt{N!}}\left(\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\ell^2(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right)^N\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6.18}$$

$$\left\|a^{(N+1)}(\psi)-a^{(N)}(\psi)\right\| \le \frac{\sqrt{\pi}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\upsilon^{(N+1)}(\psi)-\upsilon^{(N)}(\psi)\right\|}{\left\|\Gamma(\psi)\right\|}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $N\to\infty$ iken $\upsilon^{(N+1)}\to\upsilon^{(N)}$ ve $a^{(N+1)}\to a^{(N)}$ olur.

6.4.Kesin Çözüm ile Ardışık Çözümün Farkın Değerlendirilmesi

Bu bölümde, aşağıdaki limitin sağlandığı gösterilecektir:

$$\lim_{N\to\infty}\upsilon^{(N+1)}(\psi)=\upsilon(\psi),\ \lim_{N\to\infty}a^{(N+1)}(\psi)=a(\psi).$$

Öncelikle, ters katsayı için aşağıdaki fark ele alınır:

$$a(\psi)-a^{(N+1)}(\psi)=\frac{-\int_0^{\pi}\left[\hbar\left(\lambda,\psi,\upsilon\right)-\hbar\left(\lambda,\psi,\upsilon^{(N+1)}\right)\right]d\lambda}{\Gamma(\psi)}.$$

Denklemin mutlak değeri alınarak Cauchy eşitsizliği ile Lipschitz koşulu uygulanıp maksimumu alınırsa,

$$\left\|a(\psi)-a^{(N+1)}(\psi)\right\|\le\frac{\sqrt{\pi}\left\|\upsilon(\psi)-\upsilon^{(N+1)}(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|}{\left\|\Gamma(\psi)\right\|} \tag{6.19}$$

elde edilir.

Kesin ve yaklaşık çözümlerinin farkı alınırsa,

$$\upsilon_0(\psi)-\upsilon_0^{(N+1)}(\psi)=$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}a(\sigma)(\psi-\sigma)\upsilon(\rho,\sigma)d\rho d\sigma-\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}a^{(N+1)}(\sigma)(\psi-\sigma)\upsilon^{(N+1)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma+$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\upsilon)d\rho d\sigma-\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(N)})d\rho d\sigma,$$

$$\upsilon_{ck}(\psi)-\upsilon_{ck}^{(N+1)}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\upsilon(\rho,\sigma)a(\sigma)d\rho d\sigma-$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\upsilon^{(N+1)}(\rho,\sigma)a^{(N+1)}(\sigma)d\rho d\sigma+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\upsilon)d\rho d\sigma-$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(N)})d\rho d\sigma,$$

$$\upsilon_{sk}(\psi)-\upsilon_{sk}^{(N+1)}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)a(\sigma)\upsilon(\rho,\sigma)d\rho d\sigma-$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)a^{(N+1)}(\sigma)\upsilon^{(N+1)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\upsilon)d\rho d\sigma-$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(N)})d\rho d\sigma$$

olur. $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\upsilon^{(N+1)}(\rho,\sigma)a(\sigma)d\rho d\sigma$ ve $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(N+1)})d\rho d\sigma$ ifadelerini eklenip çıkarılırsa ve mutlak değeri alınırsa,

$$\left|\upsilon_0(\psi)-\upsilon_0^{(N+1)}(\psi)\right|\le\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)a(\sigma)\left[\upsilon-\upsilon^{(N+1)}\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left[a(\sigma)-a^{(N+1)}(\sigma)\right](\psi-\sigma)\upsilon^{(N+1)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon)-\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(N+1)})\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(N+1)})-\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(N)})\right]d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\upsilon_{ck}(\psi)-\upsilon_{ck}^{(N+1)}(\psi)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\upsilon-\upsilon^{(N+1)}\right]a(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[a(\sigma)-a^{(N+1)}(\sigma)\right]\upsilon^{(N+1)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon)-\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(N+1)})\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(N+1)})-\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(N)})\right]d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\upsilon_{sk}(\psi)-\upsilon_{sk}^{(N+1)}(\psi)\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\upsilon-\upsilon^{(N+1)}\right]a(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[a(\sigma)-a^{(N+1)}(\sigma)\right]\upsilon^{(N+1)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon)-\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(N+1)})\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(N+1)})-\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(N)})\right]d\rho d\sigma\right|$$

elde edilir. Sırasıyla Cauchy, Hölder, Bessel eşitsizlikleri ile Lipschitz koşulu uygulanırsa ve maksimumu alınırsa,

$$\begin{aligned}\left\|\upsilon(\psi)-\upsilon^{(N+1)}(\psi)\right\| &\le \left(\pi|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}+2\pi^2|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi}{6\pi}}\right)\left\|a(\psi)\right\|\left\|\upsilon(\psi)-\upsilon^{(N+1)}(\psi)\right\|+\\ &\left(\pi|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}+2\pi^2|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi}{6\pi}}\right)\left\|a(\psi)-a^{(N+1)}(\psi)\right\|\left\|\upsilon^{(N+1)}(\lambda,\psi)\right\|+\\ &\left(\pi|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}+2\pi^2|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi}{6\pi}}\right)\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\upsilon(\psi)-\upsilon^{(N+1)}(\psi)\right\|+\\ &\left(\pi|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}+2\pi^2|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi}{6\pi}}\right)\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\upsilon^{(N+1)}(\psi)-\upsilon^{(N)}(\psi)\right\|\end{aligned} \tag{6.20}$$

elde edilir. Denklem (6.18) ve (6.19), Denklem (6.20)'de yerine yazıldığında,

$$\left\|\upsilon(\psi)-\upsilon^{(N+1)}(\psi)\right\| \le \frac{A^{N+1}K}{\prod_{i=1}^{N}D_i}\frac{1}{\sqrt{N+1!}}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|^{N+1}+$$

$$A\left(\left\|a(\psi)\right\|+\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|+\frac{\sqrt{\pi}}{\left\|\Gamma(\psi)\right\|}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\upsilon^{(N+1)}(\lambda,\psi)\right\|\right)\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left|\upsilon(\sigma)-\upsilon^{(N+1)}(\sigma)\right|^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. $\left(y_1+y_2+...+y_n\right)^n \le n\left(y_1^2+y_2^2+...+y_n^2\right)$ eşitsizliği kullanılarak Gronwall eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left\|\upsilon(\psi)-\upsilon^{(N+1)}(\psi)\right\|^2 \le 2\left(\frac{A^{N+1}K}{\prod_{i=1}^{N}D_i}\frac{1}{\sqrt{N+1!}}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|^{N+1}\right)^2\times$$

$$\exp\left[2A^2\left(\|a(\psi)\|+\|\ell(\lambda,\psi)\|+\frac{\sqrt{\pi}\,\|\ell(\lambda,\psi)\|}{\|\Gamma(\psi)\|}\left\|\upsilon^{(N+1)}(\lambda,\psi)\right\|\right)^2\right]$$

elde edilir. Sonuç olarak $N\to\infty$ iken $\upsilon^{(N+1)}\to\upsilon$, $a^{(N+1)}\to a$ olur.

6.5.Çözümün Tekliği

(6.1)–(6.4) probleminin (a,υ) ve (g,w) olmak üzere iki farklı çözümünün olduğu varsayılsın. Öncelikle, ters katsayıların farkı ele alınır;

$$a(\psi)-g(\psi)=\frac{-\int_0^{\pi}\left[\hbar(\lambda,\psi,\upsilon)-\hbar(\lambda,\psi,w)\right]d\lambda}{\Gamma(\psi)}$$

Denklemin mutlak değeri alınarak Cauchy eşitsizliği ile Lipschitz koşulu uygulanıp maksimumu alınırsa,

$$\|a(\psi)-g(\psi)\|\le\frac{\sqrt{\pi}\,\|\ell(\lambda,\psi)\|}{\|\Gamma(\psi)\|}\|\upsilon(\psi)-w(\psi)\| \tag{6.21}$$

elde edilir.

υ ve w çözümlerinin farkı alınırsa,

$$\upsilon_0(\psi)-w_0(\psi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)a(\sigma)\upsilon(\rho,\sigma)d\rho d\sigma-\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)g(\sigma)w(\rho,\sigma)d\rho d\sigma$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\upsilon)d\rho d\sigma-\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,w)d\rho d\sigma,$$

$$\upsilon_{ck}(\psi)-w_{ck}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)a(\sigma)\upsilon(\rho,\sigma)d\rho d\sigma-$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)g(\sigma)w(\rho,\sigma)d\rho d\sigma+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\upsilon)d\rho d\sigma-$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,w)d\rho d\sigma,$$

$$\upsilon_{sk}(\psi)-w_{sk}(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\upsilon(\rho,\sigma)a(\sigma)d\rho d\sigma-$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)g(\sigma)w(\rho,\sigma)d\rho d\sigma+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,\upsilon)d\rho d\sigma-$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\hbar(\rho,\sigma,w)d\rho d\sigma$$

olur. $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}a(\sigma)w(\rho,\sigma)d\rho d\sigma$ ifadesini eklenip çıkarılırsa ve mutlak değeri alınırsa,

$$|\upsilon_0(\psi)-w_0(\psi)|\le\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}a(\sigma)(\psi-\sigma)\left[\upsilon-w\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[a(\sigma)-g(\sigma)\right]w(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon)-\hbar(\rho,\sigma,w)\right]d\rho d\sigma\right|,$$

$$|\upsilon_{ck}(\psi)-w_{ck}(\psi)|\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)a(\sigma)\left[\upsilon-w\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[a(\sigma)-g(\sigma)\right]w(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon)-\hbar(\rho,\sigma,w)\right]d\rho d\sigma\right|,$$

$$|\upsilon_{sk}(\psi)-w_{sk}(\psi)|\le\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)a(\sigma)\left[\upsilon-w\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[a(\sigma)-g(\sigma)\right]w(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon)-\hbar(\rho,\sigma,w)\right]d\rho d\sigma\right|$$

elde edilir. Sırasıyla Cauchy, Hölder, Bessel eşitsizlikleri ile Lipschitz koşulu uygulanırsa ve maksimumu alınırsa,

$$\begin{aligned}\|\upsilon(\psi)-w(\psi)\|\le&\left(\pi|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}+2\pi^2|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi}{6\pi}}\right)\|a(\psi)\|\|\upsilon(\psi)-w(\psi)\|+\\&\left(\pi|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}+2\pi^2|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi}{6\pi}}\right)\|a(\psi)-g(\psi)\|\|w(\lambda,\psi)\|+\\&\left(\pi|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}+2\pi^2|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi}{6\pi}}\right)\|\ell(\lambda,\psi)\|\|\upsilon(\psi)-w(\psi)\|\end{aligned}\tag{6.22}$$

elde edilir. Denklem (6.21), Denklem (6.22)'de yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}&\|\upsilon(\psi)-w(\psi)\|\le\\&A\left(\|a(\psi)\|+\|\ell(\lambda,\psi)\|+\frac{\sqrt{\pi}\|\ell(\lambda,\psi)\|\|w(\lambda,\psi)\|}{\|\Gamma(\psi)\|}\right)\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}|\upsilon(\psi)-w(\psi)|^2\,d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizliğin karesi alınarak Gronwall eşitsizliği uygulanırsa,

$$\|\upsilon(\psi)-w(\psi)\|^2\le 0\cdot\exp\left[A^2\left(\|a(\psi)\|+\|\ell(\lambda,\psi)\|+\frac{\sqrt{\pi}\|\ell(\lambda,\psi)\|\|w(\lambda,\psi)\|}{\|\Gamma(\psi)\|}\right)^2\right]$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\upsilon(\psi)=w(\psi)$ ve $a(\psi)=g(\psi)$ olur.

6.6.Çözümün Kararlılığı

Teorem 6.2. Teorem 6.1 koşulları sağlanırsa, (6.1)–(6.4) probleminin (a,υ) çözümü ϑ,ϖ ve Γ başlangıç verilerine göre sürekli bağımlıdır.

İspat. Teorem 6.1'in koşullarını sağlayan iki veri kümesi

$\Theta = \{\vartheta, \varpi, \Gamma\}$, $\overline{\Theta} = \{\overline{\vartheta}, \overline{\varpi}, \overline{\Gamma}\}$

olsun. Aşağıdaki sınırlamaların sağlandığı varsayılsın:

$\|\vartheta\|_{C[0,\pi]} \le \mathrm{M}_1, \|\varpi\|_{C[0,\pi]} \le \mathrm{M}_2, \|\Gamma\|_{C^2[0,T]} \le \mathrm{M}_3$

ve benzer şekilde

$\|\overline{\vartheta}\|_{C[0,\pi]} \le \mathrm{M}_1, \|\overline{\varpi}\|_{C[0,\pi]} \le \mathrm{M}_2, \|\overline{\Gamma}\|_{C^2[0,T]} \le \mathrm{M}_3$

olmak üzere $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3$ pozitif sabitlerin var olduğu kabul edilsin. Buna bağlı olarak normlar

$$\|\Theta\| = \|\vartheta\|_{C[0,\pi]} + \|\varpi\|_{C[0,\pi]} + \|\Gamma\|_{C^2[0,T]}, \quad \|\overline{\Theta}\| = \|\overline{\vartheta}\|_{C[0,\pi]} + \|\overline{\varpi}\|_{C[0,\pi]} + \|\overline{\Gamma}\|_{C^2[0,T]}$$

şeklinde tanımlanır. (a, υ) ve $(\overline{a}, \overline{\upsilon})$, Θ ve $\overline{\Theta}$ verilerine karşılık gelen (6.1)–(6.4) problemine ait çözümler olsun. İlk olarak,

$$a(\psi) - \overline{a}(\psi) = \frac{\Gamma''(\psi) - \int_0^{\pi} \hbar(\lambda, \psi, \upsilon)\, d\lambda}{\Gamma(\psi)} - \frac{\overline{\Gamma}''(\psi) - \int_0^{\pi} \hbar(\lambda, \psi, \overline{\upsilon})\, d\lambda}{\overline{\Gamma}(\psi)}$$

katsayısı incelenecektir.

$$a(\psi) - \overline{a}(\psi) = \frac{\overline{\Gamma}(\psi)\Gamma''(\psi) - \overline{\Gamma}(\psi)\int_0^{\pi} \hbar(\lambda, \psi, \upsilon)\, d\lambda - \Gamma(\psi)\overline{\Gamma}''(\psi) + \Gamma(\psi)\int_0^{\pi} \hbar(\lambda, \psi, \overline{\upsilon})\, d\lambda}{\Gamma(\psi)\overline{\Gamma}(\psi)}$$

Son denkleme $\Gamma(\psi)\overline{\Gamma}(\psi)$ ve $\Gamma(\psi)\int_0^{\pi} \hbar(\lambda, \psi, \upsilon)\, d\lambda$ ifadeleri eklenip çıkarılırsa,

$$a(\psi) - \overline{a}(\psi) = \frac{\overline{\Gamma}(\psi)\left(\overline{\Gamma}''(\psi) - \Gamma''(\psi)\right) - \Gamma''(\psi)\left(\Gamma(\psi) - \overline{\Gamma}(\psi)\right)}{\Gamma(\psi)\overline{\Gamma}(\psi)} +$$

$$\frac{\left(\Gamma(\psi)-\bar{\Gamma}(\psi)\right)\int_0^{\pi}\hbar\left(\lambda,\psi,\upsilon\right)d\lambda-\Gamma(\psi)\int_0^{\pi}\left(\hbar\left(\lambda,\psi,\upsilon\right)-\hbar\left(\lambda,\psi,\bar{\upsilon}\right)\right)d\lambda}{\Gamma(\psi)\bar{\Gamma}(\psi)}$$

elde edilir. Mutlak değeri alınır ve Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|a(\psi)-\bar{a}(\psi)\right|\leq\frac{\left|\bar{\Gamma}(\psi)\right|\left|\bar{\Gamma}''(\psi)-\Gamma''(\psi)\right|+\left|\Gamma''(\psi)\right|\left|\Gamma(\psi)-\bar{\Gamma}(\psi)\right|}{\left|\Gamma(\psi)\bar{\Gamma}(\psi)\right|}+$$

$$\frac{\left|\Gamma(\psi)-\bar{\Gamma}(\psi)\right|\left(\int_0^{\pi}d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\hbar^2\left(\lambda,\psi,\upsilon\right)d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\psi)\bar{\Gamma}(\psi)}+$$

$$\frac{\left|\Gamma(\psi)\right|\left(\int_0^{\pi}d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi}\left\{\hbar\left(\lambda,\psi,\upsilon\right)-\hbar\left(\lambda,\psi,\bar{\upsilon}\right)\right\}^2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\psi)\bar{\Gamma}(\psi)}$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizliğe Lipschits koşulu uygulanırsa,

$$\left|a(\psi)-\bar{a}(\psi)\right|\leq\frac{\left|\bar{\Gamma}(\psi)\right|\left|\bar{\Gamma}''(\psi)-\Gamma''(\psi)\right|+\left|\Gamma''(\psi)\right|\left|\Gamma(\psi)-\bar{\Gamma}(\psi)\right|}{\left|\Gamma(\psi)\bar{\Gamma}(\psi)\right|}+$$

$$\frac{\left|\Gamma(\psi)-\bar{\Gamma}(\psi)\right|\sqrt{\pi}\left(\int_0^{\pi}\hbar^2\left(\lambda,\psi,\upsilon\right)d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+\left|\Gamma(\psi)\right|\sqrt{\pi}\left(\int_0^{\pi}\left\{\ell(\lambda,\psi)\left|\upsilon-\bar{\upsilon}\right|\right\}^2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\psi)\bar{\Gamma}(\psi)}$$

elde edilir. Son olarak, maksimumu alınırsa,

$$\left\|a(\psi)-\bar{a}(\psi)\right\|\leq\frac{1}{M_3}\left\|\bar{\Gamma}''(\psi)-\Gamma''(\psi)\right\|+\frac{\left(M_3+\sqrt{\pi}M\right)}{M_3^2}\left\|\Gamma(\psi)-\bar{\Gamma}(\psi)\right\|+$$
$$\frac{\sqrt{\pi}}{M_3}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\upsilon(\psi)-\bar{\upsilon}(\psi)\right\| \tag{6.23}$$

elde edilir.

$$\upsilon(\lambda,\psi)-\bar{\upsilon}(\lambda,\psi)=\frac{\left(\vartheta_0-\bar{\vartheta}_0\right)}{2}+\frac{\left(\varpi_0-\bar{\varpi}_0\right)\psi}{2}+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\vartheta_{ck}-\bar{\vartheta}_{ck}\right)\cos 2k\psi+\frac{\left(\varpi_{ck}-\bar{\varpi}_{ck}\right)}{2k}\sin 2k\psi\right)\cos 2k\lambda+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\vartheta_{sk}-\bar{\vartheta}_{sk}\right)\cos 2k\psi+\frac{\left(\varpi_{sk}-\bar{\varpi}_{sk}\right)}{2k}\sin 2k\psi\right)\sin 2k\lambda+$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[\upsilon(\rho,\sigma)a(\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\upsilon)\right]d\rho d\tau-$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[\bar{\upsilon}(\rho,\sigma)\bar{a}(\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\bar{\upsilon})\right]d\rho d\sigma+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[a(\sigma)\upsilon(\rho,\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\upsilon)\right]d\rho d\tau\right)\cos 2k\lambda-$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\bar{a}(\sigma)\bar{\upsilon}(\rho,\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\bar{\upsilon})\right]d\rho d\sigma\right)\cos 2k\lambda+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[a(\sigma)\upsilon(\rho,\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\upsilon)\right]d\rho d\sigma\right)\sin 2k\lambda-$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\bar{a}(\sigma)\bar{\upsilon}(\rho,\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\bar{\upsilon})\right]d\rho d\sigma\right)\sin 2k\lambda.$$

Son denkleme $a(\sigma)\bar{\upsilon}(\rho,\sigma)$ eklenip çıkarıldıktan sonra mutlak değeri alınırsa,

$$\left|\upsilon(\psi)-\bar{\upsilon}(\psi)\right|=\frac{\left|\vartheta_0-\bar{\vartheta}_0\right|}{2}+\frac{\left|(\varpi_0-\bar{\varpi}_0)\psi\right|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|\vartheta_{ck}-\bar{\vartheta}_{ck}\right|+\left|\vartheta_{sk}-\bar{\vartheta}_{sk}\right|\right)+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\left(\left|\varpi_{ck}-\bar{\varpi}_{ck}\right|+\left|\varpi_{sk}-\bar{\varpi}_{sk}\right|\right)+\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[\upsilon(\rho,\sigma)-\bar{\upsilon}(\rho,\sigma)\right]a(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[a(\sigma)-\bar{a}(\sigma)\right]\bar{\upsilon}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon)-\hbar(\rho,\sigma,\bar{\upsilon})\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)a(\sigma)\left[\upsilon(\rho,\sigma)-\bar{\upsilon}(\rho,\sigma)\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[a(\sigma)-\bar{a}(\sigma)\right]\bar{\upsilon}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\cos(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon)-\hbar(\rho,\sigma,\bar{\upsilon})\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)a(\sigma)\left[\upsilon(\rho,\sigma)-\bar{\upsilon}(\rho,\sigma)\right]d\rho d\sigma\right|+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[a(\sigma)-\bar{a}(\sigma)\right]\bar{\upsilon}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2k}\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin 2k(\psi-\sigma)\sin(2k\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon)-\hbar(\rho,\sigma,\bar{\upsilon})\right]d\rho d\sigma\right|$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizliğe sırasıyla Cauchy, Hölder ve Bessel eşitsizlikleri ile Lipschitz koşulu uygulanırsa ve maksimum alınırsa,

$$\begin{aligned}&\left\|\upsilon(\psi)-\bar{\upsilon}(\psi)\right\|\le\frac{\left\|\varphi_0-\bar{\varphi}_0\right\|}{2}+\frac{\left\|\psi_0-\bar{\psi}_0\right\|\left|\Psi\right|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\varphi_{ck}-\bar{\varphi}_{ck}\right\|+\left\|\varphi_{sk}-\bar{\varphi}_{sk}\right\|\right)+\\&\frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\psi_{ck}-\bar{\psi}_{ck}\right\|+\left\|\psi_{sk}-\bar{\psi}_{sk}\right\|\right)+A\left\|a(\psi)\right\|\left\|\upsilon(\psi)-\bar{\upsilon}(\psi)\right\|+\\&A\left\|a(\psi)-\bar{a}(\psi)\right\|\left\|\bar{\upsilon}(\lambda,\psi)\right\|+A\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\upsilon(\psi)-\bar{\upsilon}(\psi)\right\|\end{aligned}\tag{6.24}$$

elde edilir. Denklem (6.23), Denklem (6.24)'te yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}&\left\|\upsilon(\psi)-\bar{\upsilon}(\psi)\right\|\le\frac{\left\|\varphi_0-\bar{\varphi}_0\right\|}{2}+\frac{\left\|\psi_0-\bar{\psi}_0\right\|\left|\Psi\right|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\varphi_{ck}-\bar{\varphi}_{ck}\right\|+\left\|\varphi_{sk}-\bar{\varphi}_{sk}\right\|\right)+\\&\frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\psi_{ck}-\bar{\psi}_{ck}\right\|+\left\|\psi_{sk}-\bar{\psi}_{sk}\right\|\right)+\frac{A\left(M_3+\sqrt{\pi}M\right)\left\|\bar{\upsilon}(\lambda,\psi)\right\|}{M_3^2}\left\|\Gamma(\psi)-\bar{\Gamma}(\psi)\right\|+\\&\frac{A\left\|\bar{\upsilon}(\lambda,\psi)\right\|}{M_3}\left\|\bar{\Gamma}''(\psi)-\Gamma''(\psi)\right\|+\\&A\left(\left\|a(\psi)\right\|+\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|+\frac{\sqrt{\pi}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\bar{\upsilon}(\lambda,\psi)\right\|}{M_3}\right)\left\|\upsilon(\psi)-\bar{\upsilon}(\psi)\right\|\end{aligned}\tag{6.25}$$

elde edilir. Burada

$$A=\frac{\sqrt{3\pi}\Psi\left(\Psi\sqrt{\Psi}+\sqrt{2\Psi\pi}\right)}{3}.$$

Eğer

$$\left\|\vartheta-\bar{\vartheta}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\vartheta_0-\bar{\vartheta}_0\right\|+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\vartheta_{ck}-\bar{\vartheta}_{ck}\right\|+\left\|\vartheta_{sk}-\bar{\vartheta}_{sk}\right\|\right),$$

$$\left\|\varpi-\bar{\varpi}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\varpi_0-\bar{\varpi}_0\right\|\left|\Psi\right|+\frac{\pi}{2\sqrt{6}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\varpi_{ck}-\bar{\varpi}_{ck}\right\|+\left\|\varpi_{sk}-\bar{\varpi}_{sk}\right\|\right),$$

$$\left\|\Gamma(\psi)-\bar{\Gamma}(\psi)\right\|=\frac{A\left(M_3+\sqrt{\pi}M\right)\left\|\bar{\upsilon}(\lambda,\psi)\right\|}{M_3^2}\left\|\Gamma(\psi)-\bar{\Gamma}(\psi)\right\|+\frac{A\left\|\bar{\upsilon}(\lambda,\psi)\right\|}{M_3}\left\|\bar{\Gamma}''(\psi)-\Gamma''(\psi)\right\|$$

olarak alınırsa, burada

$$M_4=\max\left\{\frac{1}{2},1\right\},$$

$$M_5=\max\left\{\frac{\left|\Psi\right|}{2},\frac{\pi}{2\sqrt{6}}\right\},$$

$$M_6=\max\left\{\frac{A\left(M_3+\sqrt{\pi}M\right)\left\|\bar{\upsilon}(\lambda,\psi)\right\|}{M_3^2},\frac{A\left\|\bar{\upsilon}(\lambda,\psi)\right\|}{M_3}\right\},$$

$$M_7=A\left\|a(\psi)\right\|+A\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|+\frac{\sqrt{\pi}A\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\bar{\upsilon}(\lambda,\psi)\right\|}{M_3}$$

belirlenir ve Denklem (6.25),

$$\left\|\upsilon(\psi)-\bar{\upsilon}(\psi)\right\|\le M_4\left\|\vartheta-\bar{\vartheta}\right\|+M_5\left\|\varpi-\bar{\varpi}\right\|+M_6\left\|\Gamma''(\psi)-\bar{\Gamma}''(\psi)\right\|+M_7\left\|\upsilon(\psi)-\bar{\upsilon}(\psi)\right\|$$

şeklinde yazılır. Eğer $M_8=\max\left\{M_4,M_5,M_6\right\}$ olarak kabul edildiğinde, son eşitsizlik

$$\left\|\upsilon(\psi)-\bar{\upsilon}(\psi)\right\|\le M_8\left\|\Theta-\bar{\Theta}\right\|+M_7\left\|\upsilon(\psi)-\bar{\upsilon}(\psi)\right\|$$

olur. $(c+d)^2\le 2c^2+2d^2$ eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left\|\upsilon(\psi)-\bar{\upsilon}(\psi)\right\|^2\le 2M_8^2\left\|\Theta-\bar{\Theta}\right\|^2+2M_7^2\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left|\upsilon(\sigma)-\bar{\upsilon}(\sigma)\right|^2 d\rho d\sigma$$

olur. Son eşitsizliğe Gronwall eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left\|\upsilon(\psi)-\bar{\upsilon}(\psi)\right\|^2 \le 2M_8^2\left\|\Theta-\bar{\Theta}\right\|^2 e^{2M_7^2}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\Theta\to\bar{\Theta}$ iken, $\upsilon(\psi)\to\bar{\upsilon}(\psi)$'dır. Dolayısıyla, $a(\psi)\to\bar{a}(\psi)$ olur.

6.7.Doğrusal Olmayan Problem için Sayısal Çözüm

Doğrusal olmayan problemlerin doğrudan çözümünün güç olması nedeniyle, bu çalışmada çözüm sürecinden önce problem doğrusal bir forma indirgenir. Bu amaçla

$$\frac{\partial^2\upsilon^{(n)}}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\upsilon^{(n)}}{\partial x^2}-a(t)\upsilon^{(n)}=\hbar\left(x,t,\upsilon^{(n-1)}\right), \tag{6.26}$$

$$\upsilon^{(n)}(x,0)=\vartheta(x),\ \partial_t\upsilon^{(n)}(x,0)=\varpi(x), x\in[0,\pi] \tag{6.27}$$

$$\upsilon^{(n)}(0,t)=\upsilon^{(n)}(\pi,t),\ \partial_x\upsilon^{(n)}(0,t)=\partial_x\upsilon^{(n)}(\pi,t),\ t\in[0,\Psi] \tag{6.28}$$

problemi için iteratif bir algoritma oluşturulur. $\upsilon^{(n)}(x,t)=v^{(n)}(x,t)$ ve $\hbar\left(x,t,\upsilon^{(n-1)}\right)=\tilde{\hbar}\left(x,t\right)$ belirleyerek (6.26)-(6.28) problemi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-a(t)v=\tilde{\hbar}\left(x,t\right), \tag{6.29}$$

$$v^{(n)}(x,0)=\vartheta(x),\ \partial_t v^{(n)}(x,0)=\varpi(x),\ x\in[0,\pi] \tag{6.30}$$

$$v^{(n)}(0,t)=v^{(n)}(\pi,t),\ \partial_x v^{(n)}(0,t)=\partial_x v^{(n)}(\pi,t),\ t\in[0,\Psi] \tag{6.31}$$

doğrusal bir problem olarak ifade edilebilir. Elde edilen (6.29)-(6.31) problemi sayısal olarak çözmek için kapalı sonlu fark şeması

$$\frac{1}{\Delta t^2}\left(v_i^{j+2}-2v_i^{j+1}+v_i^{j}\right)=\frac{1}{\Delta x^2}\left(v_{i-1}^{j+2}-2v_i^{j+2}+v_{i+1}^{j+2}\right)+a^{j+1}v_i^{j+1}+\tilde{\hbar}_i^{j+1}. \tag{6.32}$$

kullanılmıştır. Başlangıç ve sınır koşulları $[0,\pi]\times[0,\Psi]$ bölgesi için

$$v_i^1 = \vartheta_i,\ \frac{v_i^2 - v_i^1}{\Delta t} = \varpi_i,$$

$$v_1^j = v_{Nx}^j,\ v_{Nx}^j = \frac{v_2^j + v_{Nx-1}^j}{2}.$$

$[0,\pi]\times[0,\Psi]$ aralığı ayrıklaştırılarak $x_i = \Delta x(i-1)$, $i = 1,2,....,Nx$ ve $t_j = j\Delta t$, $j = 1,2,....,Nt$ şeklinde tanımlansın. Burada $\Delta x = \frac{\pi}{Nx}$ ve $\Delta t = \frac{\Psi}{Nt}$ sırasıyla x yönündeki uzay adımını ve zaman adımını göstermektedir. Nx ve Nt pozitif tam sayılardır. Ayrık çözüm $v_i^j = v(x_i, t_j)$ ile, başlangıç fonksiyonu $\vartheta_i = \vartheta(x_i)$ ve kaynak terimi $\tilde{\hbar}^{j+2} = \hbar(x_i, t_{j+2})$ biçiminde tanımlanmıştır.

Hesaplamalarda $j+2$ indeksi mevcut zamanı, $j+1$ bir önceki zamanı, j adım önceki zamanı ifade etmektedir.

Ters katsayı,

$$a(t) = \frac{\Gamma"(t) - \int_0^{\pi} v_{xx}dx - \int_0^{\pi} \tilde{\hbar}(x,t)\,dx}{\Gamma(t)}$$

oluşturan Γ'' teriminin sonlu fark şeması,

$$\Gamma''(t) = \frac{\Gamma^{j+2} - 2\Gamma^{j+1} - 4\Gamma^j}{\Delta t^2}$$

şeklindedir. Pay kısmındaki integralleri hesaplamak için trapezoidal integrasyon kuralı kullanılır. Denklem (6.32)'nin sayısal çözümünde, elde edilen lineer denklem sistemi doğrudan çözüm yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Önceki zaman adımlarından bilinen terimleri içeren sağ taraf vektörü,

$$V_i = 2v_i^{j+1} - v_i^j + \Delta t^2\left(a(t)v_i^{j+1} + \tilde{\hbar}_i^{j+1}\right).$$

şeklindedir.

Örnek 6.1.

$$\upsilon_{tt} - \upsilon_{xx} - a(t)\upsilon = e^{t^2}\left[2 - 5t^2 + \left(6 - 5t^2\right)\cos\left(2x\right)\right],$$

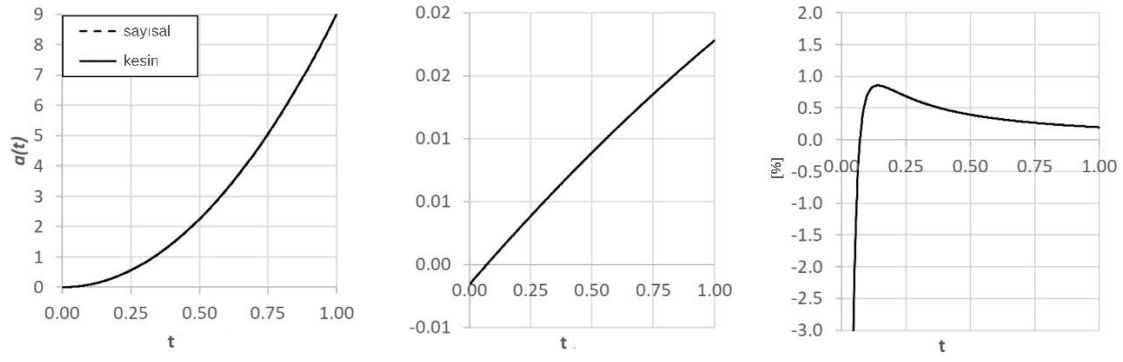
$$\upsilon\left(x,0\right) = 1 + \cos 2x,\ \partial_t \upsilon\left(x,0\right) = 0,\ x \in \left[0,\pi\right]$$

$$\upsilon(0,t) = \upsilon(\pi,t),\ \partial_x \upsilon(0,t) = \partial_x \upsilon(\pi,t),\ 0 \le t \le \Psi$$

$$\Gamma\left(t\right) = \frac{1}{2}e^{t^2}\left(2\pi + \sin\left(2\pi\right)\right).$$

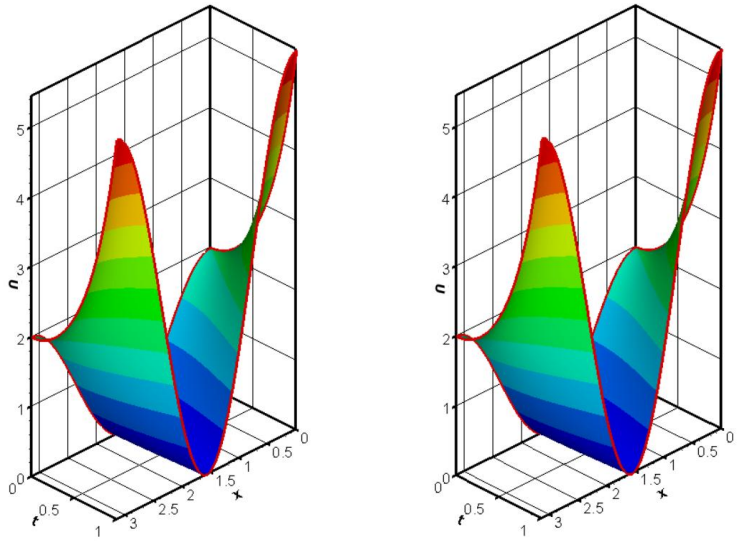
Ters problemin analitik çözümü, $\left\{a\left(t\right), \upsilon\left(x,t\right)\right\} = \left\{9t^2, \left(1 + \cos\left(2x\right)\right)e^{t^2}\right\}$.

Şekil 6.1 (a) hem kesin hem de sayısal olarak hesaplanan ters katsayının, (b) bu iki çözüm arasındaki mutlak hatanın ve (c) bu iki çözüm arasındaki bağıl hatanın zamana bağlı değişimini göstermektedir. Şekil 6.1(a)'da görüldüğü üzere, kesin ve sayısal olarak hesaplanan ters katsayılar zamanla artmakta ve birbirine oldukça yakın değerler almaktadır. Bu yakınlık Şekil 6.1(b)'deki mutlak hatanın incelenmesiyle daha net bir şekilde tespit edilebilir. Şekil 6.1(b)'ye göre, mutlak hata zaman ilerledikçe artmaktadır; ancak bu artışlar çok küçüktür ve makul sınırlar içinde kalmaktadır. Şekil 6.1(c)'den, bağıl hatanın ilk aşamalarda yaklaşık -%3'ten başladığı ve zaman arttıkça yaklaşık %0,25'e düştüğü görülebilir. Bu da analitik olarak hesaplanan ters katsayının sayısal olarak hesaplanan ters katsayıya çok yakın olduğunu göstermektedir.



(a) (b) (c)

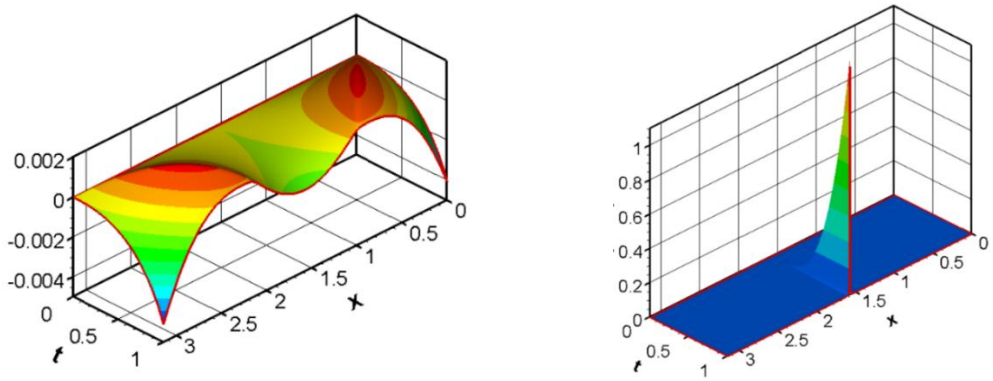
Şekil 6.1. (a) Ters katsayının, (b) mutlak hatanın ve (c) bağıl hatanın zamana bağlı değişimi



(a) (b)

Şekil 6.2. (a) Kesin çözüm ve (b) sayısal çözüm için υ değerinin zamana bağlı değişimi

Şekil 6.2'de, (a) kesin çözüm ve (b) sayısal çözüm için υ değerinin zamana bağlı değişimi gösterilmektedir. Her iki çözümün de birbirine oldukça yakın olduğu görülmektedir. υ değeri, tüm zaman adımlarında içbükey bir yapı sergilemektedir. Periyodik sınır koşulu nedeniyle, çözüm alanının her iki ucundaki değerler birbirine eşittir. Başlangıç zamanlarında iç bükeylik daha az belirgin iken, zaman ilerledikçe bu yapının derinleştiği gözlemlenmektedir. İç bükeyliğin minimum değeri zaman boyunca nispeten sabit kalırken, iç bükeyliğin kenar bölgelerindeki değerlerin zamanla arttığı anlaşılmaktadır. Şekil 6.2'de analitik ve sayısal çözümler arasında çok az fark olduğu görülmektedir. Ancak, iki hesaplama arasındaki farkı daha iyi karşılaştırmak için Şekil 6.3'te (a) mutlak hatanın ve (b) bağıl hatanın zamana bağlı değişimleri gösterilmektedir.



(a) (b)

Şekil 6.3. (a) Mutlak hatanın ve (b) bağıl hatanın zamana bağlı değişimi

Mutlak hata zamanla artmakta ve “m” harfi şeklini almaktadır. Mutlak hata, periyodik sınır koşullarına sahip bölgelerde negatif, sınır koşullarının hemen bitişiğindeki bölgelerde ise pozitiftir. Şekil 6.3(b)’de, bağıl hatanın zamanla arttığı ve alanın ortasında yoğunlaştığı görülebilir. Bir saniyelik çözümde, maksimum bağıl hata %1 civarındadır, bu da analitik ve sayısal çözümlerin birbirine çok yakın olduğunu gösterir.

7.TERS KATSAYILI PSEUDO-HİPERBOLİK PROBLEMİN İNCELENMESİ

7.1.Çözümün Bulunması

$\Psi > 0$ olmak üzere, $\Omega := \{0 < \lambda < \pi, 0 < \psi < \Psi\}$ bölgesinde tanımlı Denklem (7.1) ile verilen ters katsayılı pseudo-hiperbolik denklem incelenmektedir:

$$v_{\psi\psi}(\lambda,\psi) - \varepsilon v_{\lambda\lambda\psi\psi}(\lambda,\psi) - v_{\lambda\lambda}(\lambda,\psi) - a(\psi)v(\lambda,\psi) = \hbar(\lambda,\psi,v) \tag{7.1}$$

Denklem için başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} &v(\lambda,0) = \vartheta(\lambda), \\ &\partial_{\psi} v(\lambda,\psi) = \varpi(\lambda), \end{aligned} \tag{7.2}$$

periyodik sınır koşulları

$$\begin{aligned} &v(0,\psi) = v(\pi,\psi), \\ &\partial_{\lambda} v(0,\psi) = \partial_{\lambda} v(\pi,\psi), \end{aligned} \tag{7.3}$$

ve ek koşul

$$\Gamma(\psi) = \int_0^{\pi} v(\lambda,\psi)d\lambda \tag{7.4}$$

ile birlikte ele alınmaktadır. Burada ϑ, ϖ ve Γ fonksiyonları $[0,\pi]$ aralığında, $\hbar(\lambda,\psi,v)$ fonksiyonu $\bar{\Omega}\times\{-\infty,\infty\}$ üzerinde tanımlı verilen fonksiyonlardır.

Problem (7.1)–(7.3)'ün çözümü Fourier yöntemiyle Denklem (7.5) şeklinde elde edilir:

$$\begin{aligned} v(\lambda,\psi) = {} & \frac{1}{2}\left(\vartheta_0 + \varpi_0\psi + \frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi} (\psi-\sigma)[v(\rho,\sigma)a(\sigma) + \hbar(\rho,\sigma,v)]d\rho d\sigma \right) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty}\left(\vartheta_{cn}\cos\wp_n\psi + \frac{1}{\wp_n}\varpi_{cn}\sin\wp_n\psi \right)\cos 2n\lambda + \\ & \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi} \sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)[v(\rho,\sigma)a(\sigma) + \hbar(\rho,\sigma,v)]d\rho d\sigma \right)\cos 2n\lambda + \end{aligned} \tag{7.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\vartheta_{sn}\cos\wp_n\psi+\frac{1}{\gamma_n}\varpi_{sn}\sin\wp_n\psi\right)\sin 2n\lambda+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)[a(\sigma)\nu(\rho,\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\nu)]d\rho d\sigma\right)\sin 2n\lambda.$$

Burada

$$\vartheta_0(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\vartheta(\lambda)dz,\ \varpi_0(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varpi(\lambda)d\lambda,$$

$$\vartheta_{cn}(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\vartheta(\lambda)\cos 2n\lambda d\lambda,\ \varpi_{cn}(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varpi(\lambda)\cos 2n\lambda d\lambda,$$

$$\vartheta_{sn}(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\vartheta(\lambda)\sin n\lambda d\lambda,\ \varpi_{sn}(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varpi(\lambda)\sin n\lambda d\lambda,$$

$$\wp_n=\frac{2n}{\sqrt{1+\varepsilon(2n)^2}}.$$

Ek koşul (7.4) ve Denklem (7.5) kullanılarak $a(t)$ ters katsayı,

$$a(\psi)=\frac{\Gamma''(\psi)-\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda}{\Gamma(\psi)} \tag{7.6}$$

elde edilir.

7.2.Çözümün Varlığı

Teorem 7.1.

K1. $\Gamma(\psi)\in C^2[0,\Psi],\ a(\psi)\in C[0,\Psi].$

K2. $\vartheta(\lambda)\in C[0,\pi],\ \varpi(\lambda)\in C[0,\pi].$

K3.1 $\hbar(\lambda,\psi,\nu)$ fonksiyonu $\Omega\times(-\infty,\infty)$ bölgesinde sürekli ve aşağıdaki koşullar sağlansın: $\left|\frac{\partial^{(n)}\hbar(\lambda,\psi,\nu)}{\partial\lambda^{(n)}}-\frac{\partial^{(n)}\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})}{\partial\lambda^{(n)}}\right|\le\ell(\lambda,\psi)\left|\nu-\bar{\nu}\right|,\ n=\overline{0,2},$

burada $\ell(\lambda,\psi)\in L_2(\Omega),\ \ell(\lambda,\psi)\ge 0$.

K3.2 $\hbar(\lambda,\psi,\nu)\in C[0,\pi],\ \psi\in[0,\Psi],\ \left|\hbar(\lambda,\psi,\nu)\right|\le M,$

K3.3 $\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)\neq 0,\ \forall\psi\in[0,\Psi],$

K1-K3 koşulları sağlandığında, Denklem (7.1)–(7.4)'in çözümü var ve tektir.

İspat. Picard ardışık yaklaşım yöntemi kullanılarak, Denklem (7.5) ve (7.6) için ardışık yaklaşımlar aşağıdaki biçimde oluşturulur:

$$\nu_0^{(N+1)}(\psi)=\vartheta_0+\varpi_0\psi+\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)[\nu^{(N)}(\rho,\sigma)a^{(N)}(\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})]d\rho d\sigma,$$

$$\begin{aligned}\nu_{cn}^{(N+1)}(\psi)&=\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_{cn}\cos\wp_n\psi+\frac{\sin\wp_n\psi}{\wp_n}\varpi_{cn}+\\&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)[\nu^{(N)}(\rho,\sigma)a^{(N)}(\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})]d\rho d\sigma,\end{aligned}\tag{7.7}$$

$$\begin{aligned}\nu_{sn}^{(N+1)}(\psi)&=\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_{sn}\cos\wp_n\psi+\frac{\sin\wp_n\psi}{\wp_n}\varpi_{sn}+\\&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)[\nu^{(N)}(\rho,\sigma)a^{(N)}(\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})]d\rho d\sigma,\end{aligned}$$

$$a^{(N+1)}(\psi)=\frac{\Gamma''(\psi)-\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(N)})d\lambda}{\Gamma(\psi)}.\tag{7.8}$$

Burada,

$$\nu_0^{(0)} = \vartheta_0 + \varpi_0\psi,$$

$$\nu_{cn}^{(0)} = \vartheta_{cn}\cos\wp_n\psi + \frac{1}{\wp_n}\varpi_{cn}\sin\wp_n\psi,$$

$$\nu_{sn}^{(0)} = \vartheta_{sn}\cos\wp_n\psi + \frac{1}{\wp_n}\varpi_{sn}\sin\wp_n\psi.$$

Teorem gereği $\nu^{(0)}(\psi)\in \mathrm{B}, \psi\in[0,\Psi]$ olduğu aşikardır.

$N=0$ için (7.7) ve (7.8) sistemi,

$$\nu_0^{(1)}(\psi) = \vartheta_0 + \varpi_0\psi + \frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)[\nu^{(0)}(\rho,\sigma)a^{(0)}(\sigma) + \hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})]d\rho d\sigma,$$

$$\begin{aligned}\nu_{cn}^{(1)}(\psi) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\vartheta_{cn}\cos\wp_n\psi + \frac{\sin\wp_n\psi}{\wp_n}\varpi_{cn}\right) + \\ &\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)[a^{(0)}(\sigma)\nu^{(0)}(\rho,\sigma) + \hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})]d\rho d\sigma\right),\end{aligned} \tag{7.9}$$

$$\begin{aligned}\nu_{sn}^{(1)}(\psi) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\vartheta_{sn}\cos\wp_n\psi + \frac{\sin\wp_n\psi}{\wp_n}\varpi_{sn}\right) + \\ &\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)[\nu^{(0)}(\rho,\sigma)a^{(0)}(\sigma) + \hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})]d\rho d\sigma\right),\end{aligned}$$

$$a^{(1)}(\psi) = \frac{\Gamma''(\psi) - \int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu^{(0)})d\lambda}{\Gamma(\psi)} \tag{7.10}$$

olur. Denklem (7.9) için $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma$ ifadesi eklenip çıkarılırsa ve mutlak değeri alınırsa,

$$\left|\nu_0^{(1)}(\psi)\right| \le \left|\vartheta_0\right| + \left|\varpi_0\psi\right| + \left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)a^{(0)}(\sigma)\nu^{(0)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right| +$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)]d\rho d\sigma\right|+\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\nu_{cn}^{(1)}(\psi)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|\vartheta_{cn}\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\varpi_{cn}}{\wp_n}\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)\nu^{(0)}(\rho,\sigma)a^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)]d\rho d\sigma\right|+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|\nu_{sn}^{(1)}(\psi)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|\vartheta_{sn}\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\varpi_{sn}}{\wp_n}\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)\nu^{(0)}(\rho,\sigma)a^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)[\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)]d\rho d\sigma\right|+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma\right|$$

elde edilir. Sırasıyla Cauchy, Hölder, Bessel eşitsizlikleri ile Lipschitz koşulu uygulanırsa,

$$\left|\nu_0^{(1)}(\psi)\right|\le\left|\vartheta_0\right|+\left|\varpi_0\psi\right|+2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{a^{(0)}(\sigma)\nu^{(0)}(\rho,\sigma)\right\}^2d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\ell(\rho,\sigma)\left|\nu^{(0)}(\sigma)\right|\right\}^2d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+2\sqrt{\frac{\psi^3}{3\pi}}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar^2(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{cn}^{(1)}(\psi)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|\vartheta_{cn}\right|+\sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varpi_{cn}\right|+2\sqrt{\frac{\psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar^2(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$2\sqrt{\frac{\psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{a^{(0)}(\sigma)\nu^{(0)}(\rho,\sigma)\right\}^2d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$2\sqrt{\frac{\psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\ell(\rho,\sigma)\nu^{(0)}(\rho,\sigma)\right\}^2d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\nu_{sn}^{(1)}(\psi)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|\vartheta_{sn}\right| + \sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varpi_{sn}\right| + 2\sqrt{\frac{\psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar^2(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$2\sqrt{\frac{\psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{a^{(0)}(\sigma)\nu^{(0)}(\rho,\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$2\sqrt{\frac{\psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\ell\left\{b(\rho,\sigma)\nu^{(0)}(\rho,\sigma)\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Son olarak, maksimumu alınırsa,

$$\left\|\nu^{(1)}(\psi)\right\| \le \frac{\left\|\vartheta_0\right\|+\left\|\varpi_0\right\|\left|\Psi\right|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\vartheta_{cn}\right\|+\left\|\vartheta_{sn}\right\|\right) + \sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\varpi_{cn}\right\|+\left\|\varpi_{sn}\right\|\right) +$$

$$\left(\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}\left|\Psi\right|\pi + 4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\left|\Psi\right|\pi\right)\left\|a^{(0)}(\psi)\right\|\left\|\nu^{(0)}(\psi)\right\| +$$

$$\left(\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}\left|\Psi\right|\pi + 4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\left|\Psi\right|\pi\right)\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu^{(0)}(\psi)\right\| +$$

$$\left(\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}\left|\Psi\right|\pi + 4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\left|\Psi\right|\pi\right)\left\|\hbar(\lambda,\psi,0)\right\|$$

elde edilir.

Denklem (7.10) için $\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,0)d\lambda$ ifadesi eklenip çıkarıldıktan ve mutlak değer alındıktan sonra, Cauchy eşitsizliği ile Lipschitz koşulu uygulanırsa,

$$\left|a^{(1)}(\psi)\right| \le \frac{\left|\Gamma''(\psi)\right| + \sqrt{\pi}\left(\int_0^{\pi}\ell^2(\lambda,\psi)\left|\nu^{(0)}(\psi)\right|d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\pi}\left(\int_0^{\pi}\hbar^2(\lambda,\psi,0)d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}}{\left|\Gamma(\psi)\right|}$$

elde edilir. Son olarak, maksimumu alınırsa,

$$\left\|a^{(1)}(\psi)\right\| \le \frac{\left\|\Gamma''(\psi)\right\| + \sqrt{\pi}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu^{(0)}(\psi)\right\| + \sqrt{\pi}\left\|\hbar(\lambda,\psi,0)\right\|}{\left\|\Gamma(\psi)\right\|}$$

elde edilir. Teorem koşulundan $\nu^{(1)}(\psi)\in \mathrm{B}$.

Tümevarım yönteminden N+1.yaklaşım için,

$$\left\|\nu^{(N+1)}(\psi)\right\|\le \frac{\left\|\vartheta_0\right\|+\left\|\varpi_0\right\|\left|\Psi\right|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\vartheta_{cn}\right\|+\left\|\vartheta_{sn}\right\|\right)+\sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\varpi_{cn}\right\|+\left\|\varpi_{sn}\right\|\right)+$$
$$\left(\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}\left|\Psi\right|\pi+4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\left|\Psi\right|\pi\right)\left\|a^{(N)}(\psi)\right\|\left\|\nu^{(N)}(\psi)\right\|+$$
$$\left(\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}\left|\Psi\right|\pi+4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\left|\Psi\right|\pi\right)\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu^{(N)}(\psi)\right\|+$$
$$\left(\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}\left|\Psi\right|\pi+4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}\left|\Psi\right|\pi\right)\left\|\hbar(\lambda,\psi,0)\right\|,$$

$$\left\|a^{(N+1)}(\psi)\right\|\le \frac{\left\|\Gamma''(\psi)\right\|+\sqrt{\pi}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu^{(N)}(\psi)\right\|+\sqrt{\pi}\left\|\hbar(\lambda,\psi,0)\right\|}{\left\|\Gamma(\psi)\right\|}$$

elde edilir. Teoremden koşulları gereği ve $\nu^{(N)}(\psi)\in \mathrm{B}$ olduğundan, $\nu^{(N+1)}(\psi)\in B$ 'dır.

7.3.Ardışık Yaklaşımların Yakınsaklığı

Ardışık yaklaşımların yakınsaklığını göstermek için ardışık terimler arasındaki farklar ele alınır:

$$\nu_0^{(1)}(\psi)-\nu_0^{(0)}(\psi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}a^{(0)}(\sigma)(\psi-\sigma)\nu^{(0)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma+\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})d\rho d\sigma,$$

$$\nu_{cn}^{(1)}(\psi)-\nu_{cn}^{(0)}(\psi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)a^{(0)}(\sigma)\nu^{(0)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right)+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(0)})d\rho d\sigma\right),$$

$$\nu_{sn}^{(1)}(\psi)-\nu_{sn}^{(0)}(\psi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)a^{(0)}(\sigma)\nu^{(0)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right)+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)\hbar(\rho,\sigma,v^{(0)})d\rho d\sigma\right)$$

olur. Denklemlere $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma$ ifadesi eklenip çıkarılırsa ve mutlak değeri alınırsa,

$$\left|v_0^{(1)}(\psi)-v_0^{(0)}(\psi)\right|\le\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)a^{(0)}(\sigma)v^{(0)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$
$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,v^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]d\rho d\sigma\right|+\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|v_{cn}^{(1)}(\psi)-v_{cn}^{(0)}(\psi)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)v^{(0)}(\rho,\sigma)a^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,v^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]d\rho d\sigma\right|+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|v_{sn}^{(1)}(\psi)-v_{sn}^{(0)}(\psi)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)v^{(0)}(\rho,\sigma)a^{(0)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,v^{(0)})-\hbar(\rho,\sigma,0)\right]d\rho d\sigma\right|+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)\hbar(\rho,\sigma,0)d\rho d\sigma\right|$$

elde edilir. Sırasıyla Cauchy, Bessel, Hölder eşitsizlikleri ile Lipschitz koşulu uygulanırsa ve maksimumu alınırsa,

$$\left\|v^{(1)}(\psi)-v^{(0)}(\psi)\right\|\le\left(\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}|\Psi|\pi+4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}|\Psi|\pi\right)\left\|a^{(0)}(\psi)\right\|\left\|v^{(0)}(\psi)\right\|+$$
$$\left(\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}|\Psi|\pi+4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}|\Psi|\pi\right)\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|v^{(0)}(\psi)\right\|+$$

$$\left(\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}|\Psi|\pi+4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}|\Psi|\pi\right)\left\|\hbar(\lambda,\psi,0)\right\|$$

elde edilir. Bu eşitsizlik, teoremde verilen koşullar altında sınırlıdır.

$$K:=\left\|v^{(1)}(\psi)-v^{(0)}(\psi)\right\|<\infty \tag{7.11}$$

belirlensin. Ters katsayı için,

$$a^{(2)}(\psi)-a^{(1)}(\psi)=\frac{-\int_0^{\pi}\left[\hbar\left(\lambda,\psi,v^{(2)}\right)-\hbar\left(\lambda,\psi,v^{(1)}\right)\right]d\lambda}{\Gamma(\psi)}$$

mutlak değeri alınarak Cauchy eşitsizliği ile Lipschitz koşulu uygulanıp maksimumu alınırsa,

$$\left\|a^{(2)}(\psi)-a^{(1)}(\psi)\right\|\leq\frac{\sqrt{\pi}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|v^{(2)}(\psi)-v^{(1)}(\psi)\right\|}{\left\|\Gamma(\psi)\right\|} \tag{7.12}$$

elde edilir.

Yeniden,

$$v_0^{(2)}(\psi)-v_0^{(1)}(\psi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}a^{(2)}(\sigma)(\psi-\sigma)v^{(2)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma+\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,v^{(1)})d\rho d\sigma-$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)a^{(1)}(\sigma)v^{(1)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma-\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,v^{(0)})d\rho d\sigma,$$

$$v_{cn}^{(2)}(\psi)-v_{cn}^{(1)}(\psi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)v^{(2)}(\rho,\sigma)a^{(2)}(\sigma)d\rho d\sigma+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)\hbar(\rho,\sigma,v^{(1)})d\rho d\sigma-$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)v^{(1)}(\rho,\sigma)a^{(1)}(\sigma)d\rho d\sigma-$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)\hbar(\rho,\sigma,v^{(0)})d\rho d\sigma,$$

$$v_{sn}^{(2)}(\psi)-v_{sn}^{(1)}(\psi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)v^{(2)}(\rho,\sigma)a^{(2)}(\sigma)d\rho d\sigma+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)\hbar(\rho,\sigma,v^{(1)})d\rho d\sigma-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)v^{(1)}(\rho,\sigma)a^{(1)}(\sigma)d\rho d\sigma-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)\hbar(\rho,\sigma,v^{(0)})d\rho d\sigma$$

farkı alınsın. $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}a^{(1)}(\sigma)v^{(2)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma$ ifadesi eklenip çıkarılırsa ve mutlak değeri alınırsa,

$$\left|v_0^{(2)}(\psi)-v_0^{(1)}(\psi)\right|\le\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left[a^{(2)}(\sigma)-a^{(1)}(\sigma)\right](\psi-\sigma)v^{(2)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[\upsilon^{(2)}(\rho,\sigma)-\upsilon^{(1)}(\rho,\sigma)\right]a^{(1)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(1)})-\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(0)})\right]d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|v_{cn}^{(2)}(\psi)-v_{cn}^{(1)}(\psi)\right|\le$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)\left[a^{(2)}(\sigma)-a^{(1)}(\sigma)\right]v^{(2)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)\left[\upsilon^{(2)}(\rho,\sigma)-\upsilon^{(1)}(\rho,\sigma)\right]a^{(1)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(1)})-\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(0)})\right]d\rho d\sigma\right|,$$

$$\left|v_{sn}^{(2)}(\psi)-v_{sn}^{(1)}(\psi)\right|\le$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)\left[a^{(2)}(\sigma)-a^{(1)}(\sigma)\right]v^{(2)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)\left[\upsilon^{(2)}(\rho,\sigma)-\upsilon^{(1)}(\rho,\sigma)\right]a^{(1)}(\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(1)})-\hbar(\rho,\sigma,\upsilon^{(0)})\right]d\rho d\sigma\right|$$

elde edilir. Sırasıyla Cauchy, Bessel, Hölder eşitsizlikleri ile Lipschitz koşulu uygulanıp maksimumu alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\left\|\nu^{(2)}(\psi)-\nu^{(1)}(\psi)\right\|\le\\
&\left(\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}|\Psi|\pi+4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}|\Psi|\pi\right)\left\|a^{(2)}(\psi)-a^{(1)}(\psi)\right\|\left\|\nu^{(2)}(\lambda,\psi)\right\|+\\
&\left(\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}|\Psi|\pi+4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}|\Psi|\pi\right)\left\|a^{(1)}(\psi)\right\|\left\|\nu^{(2)}(\psi)-\nu^{(1)}(\psi)\right\|+\\
&\left(\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}|\Psi|\pi+4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}|\Psi|\pi\right)\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu^{(1)}(\psi)-\nu^{(0)}(\psi)\right\|
\end{aligned}\tag{7.13}$$

elde edilir. Denklem (7.12), Denklem (7.13)'de yerine yazıldığında,

$$\left\|\nu^{(2)}(\psi)-\nu^{(1)}(\psi)\right\|\le\frac{A}{D_1}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left\{\ell(\rho,\sigma)\left|\nu^{(1)}(\sigma)-\nu^{(0)}(\sigma)\right|\right\}^2 d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\tag{7.14}$$

elde edilir. Denklem (7.11), Denklem (7.14)'de yerine yazıldığında,

$$\left\|\nu^{(2)}(\psi)-\nu^{(1)}(\psi)\right\|\le\frac{AK}{D_1}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\ell^2(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\tag{7.15}$$

elde edilir. Burada,

$$A=\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}|\Psi|\pi+4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}|\Psi|\pi,$$

$$D_1=1-A\left\|a^{(1)}(\psi)\right\|-\frac{A\sqrt{\pi}\left\|b(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu^{(2)}(\lambda,\psi)\right\|}{\left\|\Gamma(\psi)\right\|}.$$

Sonraki iterasyonlar için de aynı yöntemler uygulanırsa,

$$\left\|a^{(3)}(\psi)-a^{(2)}(\psi)\right\| \le \frac{\sqrt{\pi}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|v^{(3)}(\psi)-v^{(2)}(\psi)\right\|}{\left\|\Gamma(\psi)\right\|}, \tag{7.16}$$

$$\begin{aligned}\left\|v^{(3)}(\psi)-v^{(2)}(\psi)\right\| &\le A\left\|v^{(3)}(\psi)\right\|\left\|a^{(3)}(\psi)-a^{(2)}(\psi)\right\|+\\ A\left\|a^{(2)}(\psi)\right\|&\left\|v^{(3)}(\psi)-v^{(2)}(\psi)\right\|+A\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|v^{(2)}(\psi)-v^{(1)}(\psi)\right\|\end{aligned} \tag{7.17}$$

elde edilir. Denklem (7.15) ve (7.16), Denklem (7.17)'de yerine yazıldığında,

$$\left\|v^{(3)}(\psi)-v^{(2)}(\psi)\right\| \le \frac{A^2K}{D_2D_1}\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\ell^2(\rho,\sigma)\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}b^2(\rho_1,\sigma_1)d\rho_1 d\sigma_1\right)d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. İntegral için değişken değiştirme yöntemi uygulanırsa,

$$\left\|v^{(3)}(\psi)-v^{(2)}(\psi)\right\| \le \frac{A^2K}{D_2D_1}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\ell^2(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Burada,

$$D_2 = 1-A\left\|a^{(2)}(\psi)\right\|-\frac{A\sqrt{\pi}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\upsilon^{(3)}(\psi)\right\|}{\left\|\Gamma(\psi)\right\|}.$$

Eğer N+1.iterasyona kadar sürekli olarak aynı yöntemler uygulanırsa,

$$\left\|v^{(N+1)}(\psi)-v^{(N)}(\psi)\right\| \le \frac{A^NK}{\prod_{i=1}^{N}D_i}\frac{1}{\sqrt{N!}}\left(\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\ell^2(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right)^N\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7.18}$$

$$\left\|a^{(N+1)}(\psi)-a^{(N)}(\psi)\right\| \le \frac{\sqrt{\pi}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|v^{(N+1)}(\psi)-v^{(N)}(\psi)\right\|}{\left\|\Gamma(\psi)\right\|}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $N\to\infty$ iken $v^{(N+1)}\to v^{(N)}$ ve $a^{(N+1)}\to a^{(N)}$ olur.

7.4.Kesin Çözüm ile Ardışık Çözümün Farkın Değerlendirilmesi

Bu bölümde, aşağıdaki limitin sağlandığı gösterilecektir:

$$\lim_{N\to\infty} \nu^{(N+1)}(\psi,\varepsilon)=\nu(\psi,\varepsilon),\ \lim_{N\to\infty} a^{(N+1)}(\psi)=a(\psi).$$

Öncelikle, ters katsayı için aşağıdaki fark ele alınır:

$$a(\psi)-a^{(N+1)}(\psi)=\frac{-\int_0^{\pi}\left[\hbar\left(\lambda,\psi,\nu\right)-\hbar\left(\lambda,\psi,\nu^{(N+1)}\right)\right]d\lambda}{\Gamma(\psi)}.$$

Denklemin mutlak değeri alınarak Cauchy eşitsizliği ile Lipschitz koşulu uygulanıp maksimumu alınırsa,

$$\left\|a(\psi)-a^{(N+1)}(\psi)\right\|\le\frac{\sqrt{\pi}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu(\psi)-\nu^{(N+1)}(\psi)\right\|}{\left\|\Gamma(\psi)\right\|} \tag{7.19}$$

elde edilir.

Kesin ve yaklaşık çözümlerinin farkı alınırsa,

$$\nu_0(\psi)-\nu_0^{(N+1)}(\psi)=$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}a(\sigma)(\psi-\sigma)\nu(\rho,\sigma)d\rho d\sigma-\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}a^{(N+1)}(\sigma)(\psi-\sigma)\nu^{(N+1)}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma+$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu)d\rho d\sigma-\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})d\rho d\sigma,$$

$$\nu_{cn}(\psi)-\nu_{cn}^{(N+1)}(\psi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)a(\sigma)\nu(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right)-$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)\nu^{(N+1)}(\rho,\sigma)a^{(N+1)}(\sigma)d\rho d\sigma\right)+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu)d\rho d\sigma\right)-$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})d\rho d\sigma\right),$$

$$\nu_{sn}(\psi)-\nu_{sn}^{(N+1)}(\psi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)a(\sigma)\nu(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right)-$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)\nu^{(N+1)}(\rho,\sigma)a^{(N+1)}(\sigma)d\rho d\sigma\right)+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu)d\rho d\sigma\right)-$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N)})d\rho d\sigma\right)$$

olur. $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\nu^{(N+1)}(\rho,\sigma)a(\sigma)d\rho d\sigma$ ve $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,\nu^{(N+1)})d\rho d\sigma$ ifadelerini ekleme çıkarma yapılarak Cauchy, Bessel, Hölder eşitsizlikleri ile Lipschitz koşulu uygulanıp maksimumu alınırsa,

$$\begin{aligned}\left\|\nu(\psi)-\nu^{(N+1)}(\psi)\right\|\le{}&\left(\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}|\Psi|\pi+4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}|\Psi|\pi\right)\left\|a(\psi)\right\|\left\|\nu^{(N+1)}(\psi)-\nu(\psi)\right\|+\\&\left(\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}|\Psi|\pi+4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}|\Psi|\pi\right)\left\|a^{(N+1)}(\psi)-a(\psi)\right\|\left\|\nu^{(N+1)}(\lambda,\psi)\right\|+\\&\left(\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}|\Psi|\pi+4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}|\Psi|\pi\right)\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu^{(N+1)}(\psi)-\nu(\psi)\right\|+\\&\left(\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}|\Psi|\pi+4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}|\Psi|\pi\right)\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\nu^{(N+1)}(\psi)-\nu^{(N)}(\psi)\right\|\end{aligned}\tag{7.20}$$

elde edilir. Denklem (7.18) ve (7.19), Denklem (7.20)'da yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}\left\|\nu(\psi)-\nu^{(N+1)}(\psi)\right\|\le{}&\frac{A^{N+1}K}{\prod_{i=1}^{N}D_i}\frac{1}{\sqrt{N+1!}}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|^{N+1}+\\&\left(A\left\|a(\psi)\right\|+A\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|+\frac{A\sqrt{\pi}\left\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\right\|\left\|\nu^{(N+1)}(\lambda,\psi)\right\|}{\left\|\Gamma(\psi)\right\|}\right)\left\|\nu(\psi)-\nu^{(N+1)}(\psi)\right\|\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizliğe $\left(y_1+y_2+...+y_n\right)^n\le n\left(y_1^2+y_2^2+...+y_n^2\right)$ eşitsizliği kullanılarak Gronwall eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left\|\nu(\psi)-\nu^{(N+1)}(\psi)\right\|^2 \le 2\left(\frac{A^{N+1}K}{\prod_{i=1}^{N} D_i}\frac{1}{\sqrt{N+1!}}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|^{N+1}\right)^2 \times$$

$$\exp\left[2\left(A\left\|a(\psi)\right\|+A\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|+\frac{A\sqrt{\pi}\left\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\right\|\left\|\nu^{(N+1)}(\lambda,\psi)\right\|}{\left\|\Gamma(\psi)\right\|}\right)^2\right]$$

elde edilir. Sonuç olarak $N\to\infty$ iken $\nu^{(N+1)}(\psi)\to\nu(\psi)$'dır.

7.5.Çözümün Tekliği

(7.1)–(7.4) probleminin (a,v) ve (q,w) olmak üzere iki farklı çözümünün olduğu varsayılsın. Öncelikle, ters katsayıların farkı ele alınır;

$$a(\psi)-q(\psi)=\frac{-\int_0^{\pi}\left[\hbar(\lambda,\psi,v)-\hbar(\lambda,\psi,w)\right]d\lambda}{\Gamma(\psi)}.$$

Denklemin mutlak değeri alınarak Cauchy eşitsizliği ile Lipschitz koşulu uygulanıp maksimumu alınırsa,

$$\left\|a(\psi)-q(\psi)\right\|\le\frac{\sqrt{\pi}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|v(\psi)-w(\psi)\right\|}{\left\|\Gamma(\psi)\right\|} \tag{7.21}$$

elde edilir.

v ve w çözümlerinin farkı alınırsa,

$$v_0(\psi)-w_0(\psi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}a(\sigma)(\psi-\sigma)v(\rho,\sigma)d\rho d\sigma-\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}q(\sigma)(\psi-\sigma)w(\rho,\sigma)d\rho d\sigma+$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,v)d\rho d\sigma-\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\hbar(\rho,\sigma,w)d\rho d\sigma,$$

$$v_{cn}(\psi)-w_{cn}(\psi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)v(\rho,\sigma)a(\sigma)d\rho d\sigma-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)w(\rho,\sigma)q(\sigma)d\rho d\sigma+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)\hbar(\rho,\sigma,v)d\rho d\sigma-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)\hbar(\rho,\sigma,w)d\rho d\sigma,$$

$$v_{sn}(\psi)-w_{sn}(\psi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)v(\rho,\sigma)a(\sigma)d\rho d\sigma-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)q(\sigma)w(\rho,\sigma)d\rho d\sigma+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)\hbar(\rho,\sigma,v)d\rho d\sigma-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)\hbar(\rho,\sigma,w)d\rho d\sigma$$

olur. $\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}a(\sigma)w(\rho,\sigma)d\rho d\sigma$ ifadesi eklenip çıkarıldıktan ve mutlak değer alındıktan sonra, sırasıyla Cauchy, Hölder ve Bessel eşitsizlikleri ile Lipschitz koşulu uygulanıp maksimumu alınırsa,

$$\begin{aligned}\|v(\psi)-w(\psi)\|\le&\left(\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}|\Psi|\pi+4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}|\Psi|\pi\right)\|a(\psi)\|\|v(\psi)-w(\psi)\|+\\&\left(\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}|\Psi|\pi+4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}|\Psi|\pi\right)\|a(\psi)-q(\psi)\|\|w(\lambda,\psi)\|+\\&\left(\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}|\Psi|\pi+4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}|\Psi|\pi\right)\|\ell(\lambda,\psi)\|\|v(\psi)-w(\psi)\|\end{aligned}\tag{7.22}$$

elde edilir. Burada

$$A=\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}|\Psi|\pi+4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}|\Psi|\pi.$$

Denklem (7.21), Denklem (7.22)'de yerine yazıldığında,

$$\|\nu(\psi)-w(\psi)\| \leq$$

$$A\left(\|a(\psi)\|+\|\ell(\lambda,\psi)\|+\frac{\sqrt{\pi}\,\|\ell(\lambda,\psi)\|\|w(\lambda,\psi)\|}{\|\Gamma(\psi)\|}\right)\left(\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}|\nu(\sigma)-\omega(\sigma)|^2\,d\rho d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir.

Elde edilen eşitsizliğin karesi alınarak Gronwall eşitsizliği uygulanırsa,

$$\|\nu(\psi)-w(\psi)\|^2 \leq 0\cdot\exp\left[A^2\left(\|a(\psi)\|+\|\ell(\lambda,\psi)\|+\frac{\sqrt{\pi}}{\|\Gamma(\psi)\|}\|\ell(\lambda,\psi)\|\|w(\lambda,\psi)\|\right)^2\right]$$

elde edilir. Sonuç olarak $\nu(\psi)=w(\psi)$ ve $a(\psi)=q(\psi)$ 'dır.

7.6.Çözümün Kararlılığı

Teorem 7.2. Teorem 7.1 koşulları sağlanırsa, (7.1)–(7.4) probleminin (a,v) çözümü ϑ,ϖ ve Γ başlangıç verilerine göre sürekli bağımlıdır.

İspat. Teorem 7.1'in koşullarını sağlayan iki veri kümesi

$$\Theta=\{\vartheta,\varpi,\Gamma\},\ \ \overline{\Theta}=\{\overline{\vartheta},\overline{\varpi},\overline{\Gamma}\}$$

olsun. Aşağıdaki sınırlamaların sağlandığı varsayılsın:

$$\|\vartheta\|_{C[0,\pi]}\leq \mathrm{M}_1,\ \|\varpi\|_{C[0,\pi]}\leq \mathrm{M}_2,\ \|\Gamma\|_{C^2[0,T]}\leq \mathrm{M}_3$$

ve benzer şekilde

$$\|\overline{\vartheta}\|_{C[0,\pi]}\leq \mathrm{M}_1,\ \|\overline{\varpi}\|_{C[0,\pi]}\leq \mathrm{M}_2,\ \|\overline{\Gamma}\|_{C^2[0,T]}\leq \mathrm{M}_3$$

olmak üzere $\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,\mathrm{M}_3$ pozitif sabitlerin var olduğu kabul edilsin. Buna bağlı olarak normlar

$$\|\Theta\|=\|\vartheta\|_{C[0,\pi]}+\|\varpi\|_{C[0,\pi]}+\|E\|_{C^2[0,T]},\ \ \|\overline{\Theta}\|=\|\overline{\vartheta}\|_{C[0,\pi]}+\|\overline{\varpi}\|_{C[0,\pi]}+\|\overline{E}\|_{C^2[0,T]}$$

şeklinde tanımlanır. (a,v) ve$(\overline{a},\overline{v})$, Θ ve $\overline{\Theta}$ verilerine karşılık gelen (7.1)–(7.4) problemine ait çözümler olsun. İlk olarak,

$$a(\psi)-\overline{a}(\psi)=\frac{\Gamma''(\psi)-\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,v)\,d\lambda}{\Gamma(\psi)}-\frac{\overline{\Gamma}''(\psi)-\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\overline{v})\,d\lambda}{\overline{\Gamma}(\psi)}$$

katsayısı incelenecektir. Son denkleme $\Gamma(\psi)\overline{\Gamma}(\psi)$ ve $\Gamma(\psi)\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,v)\,d\lambda$ ifadelerini eklenip çıkarılırsa,

$$a(t)-\overline{a}(t)=\frac{\overline{\Gamma}(\psi)\left(\overline{\Gamma}''(\psi)-\Gamma''(\psi)\right)-\Gamma''(\psi)\left(\Gamma(\psi)-\overline{\Gamma}(\psi)\right)}{\Gamma(\psi)\overline{\Gamma}(\psi)}+$$
$$\frac{\left(\Gamma(\psi)-\overline{\Gamma}(\psi)\right)\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,v)\,d\lambda-\Gamma(\psi)\int_0^{\pi}\left(\hbar(\lambda,\psi,v)-\hbar(\lambda,\psi,\overline{v})\right)d\lambda}{\Gamma(\psi)\overline{\Gamma}(\psi)}$$

elde edilir. Mutlak değeri alınır ve sırasıyla Cauchy eşitsizliğiyle Lipschits koşulu uygulanırsa,

$$\left|a(\psi)-\overline{a}(\psi)\right|\le\frac{\left|\overline{\Gamma}(\psi)\right|\left|\overline{\Gamma}''(\psi)-\Gamma''(\psi)\right|+\left|\Gamma''(\psi)\right|\left|\Gamma(\psi)-\overline{\Gamma}(\psi)\right|}{\left|\Gamma(\psi)\overline{\Gamma}(\psi)\right|}+$$
$$\frac{\left|\Gamma(\psi)-\overline{\Gamma}(\psi)\right|\sqrt{\pi}\left(\int_0^{\pi}\hbar^2(\lambda,\psi,v)\,d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}+\left|\Gamma(\psi)\right|\sqrt{\pi}\left(\int_0^{\pi}\left\{\ell(\lambda,\psi)\left|v-\overline{v}\right|\right\}^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}}{\left|\Gamma(\psi)\overline{\Gamma}(\psi)\right|}$$

elde edilir. Son olarak, maksimumu alınırsa,

$$\left\|a(\psi)-\overline{a}(\psi)\right\|\le\frac{1}{M_3}\left\|\overline{\Gamma}''(\psi)-\Gamma''(\psi)\right\|+\frac{\left(M_3+\sqrt{\pi}M\right)}{M_3^2}\left\|\Gamma(\psi)-\overline{\Gamma}(\psi)\right\|+$$
$$\frac{\sqrt{\pi}}{M_3}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|v(\psi)-\overline{v}(\psi)\right\| \tag{7.23}$$

elde edilir.

$$v(\lambda,\psi)-\bar{v}(\lambda,\psi)=$$

$$\frac{\left(\vartheta_0-\bar{\vartheta}_0\right)+\left(\varpi_0-\bar{\varpi}_0\right)\psi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\vartheta_{cn}-\bar{\vartheta}_{cn}\right)\cos 2n\psi+\frac{\left(\varpi_{cn}-\bar{\varpi}_{cn}\right)}{\wp_n}\sin 2n\psi\right)\cos 2n\lambda+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\vartheta_{sn}-\bar{\vartheta}_{sn}\right)\cos 2n\psi+\frac{\left(\varpi_{sn}-\bar{\varpi}_{sn}\right)}{\wp_n}\sin 2n\psi\right)\sin 2n\lambda+$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)[a(\sigma)v(\rho,\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,v)]d\rho d\sigma-$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)[\bar{a}(\sigma)\bar{v}(\rho,\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\bar{v})]d\eta d\sigma+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)[a(\sigma)v(\rho,\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,v)]d\rho d\sigma\right)\cos 2n\lambda-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)[\bar{a}(\sigma)\bar{v}(\rho,\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\bar{v})]d\rho d\sigma\right)\cos 2n\lambda+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)[a(\sigma)v(\rho,\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,v)]d\rho d\sigma\right)\sin 2n\lambda-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)[\bar{a}(\sigma)\bar{v}(\rho,\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\bar{v})]d\rho d\sigma\right)\sin 2n\lambda$$

Yukarıdaki denkleme $a(\sigma)\bar{v}(\rho,\sigma)$ eklenip çıkarıldıktan sonra mutlak değeri alınırsa,

$$\left|v(\psi)-\bar{v}(\psi)\right|\le\frac{\left|\vartheta_0-\bar{\vartheta}_0\right|}{2}+\frac{\left|(\varpi_0-\bar{\varpi}_0)\psi\right|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|\vartheta_{cn}-\bar{\vartheta}_{cn}\right|+\left|\vartheta_{sn}-\bar{\vartheta}_{sn}\right|\right)+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_n}\left(\left|\varpi_{cn}-\bar{\varpi}_{cn}\right|+\left|\varpi_{sn}-\bar{\varpi}_{sn}\right|\right)+\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)a(\sigma)\left[v(\rho,\sigma)-\bar{v}(\rho,\sigma)\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[a(\sigma)-\bar{a}(\sigma)\right]\bar{v}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right|+\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,v)-\hbar(\rho,\sigma,\bar{v})\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\wp_n\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)a(\sigma)\left[v(\rho,\sigma)-\bar{v}(\rho,\sigma)\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\wp_n\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)\left[a(\sigma)-\bar{a}(\sigma)\right]\bar{\upsilon}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\wp_n\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,v)-\hbar(\rho,\sigma,\bar{v})\right]d\rho d\sigma\right|+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\wp_n\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)a(\sigma)\left[v(\rho,\sigma)-\overline{v}(\rho,\sigma)\right]d\rho d\sigma\right|+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\wp_n\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)\left[a(\sigma)-\overline{a}(\sigma)\right]\overline{v}(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\right|+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\wp_n\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)\left[\hbar(\rho,\sigma,v)-\hbar(\rho,\sigma,\overline{v})\right]d\rho d\sigma\right|$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizliğe sırasıyla Cauchy, Hölder ve Bessel eşitsizlikleri ile Lipschitz koşulu uygulanırsa ve maksimum alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\left\|v(\psi)-\overline{v}(\psi)\right\|\le\frac{\left\|\vartheta_0-\overline{\vartheta}_0\right\|+\left\|\varpi_0-\overline{\varpi}_0\right\||\Psi|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left\|\vartheta_{cn}-\overline{\vartheta}_{cn}\right\|+\left\|\vartheta_{sn}-\overline{\vartheta}_{sn}\right\|\right)+\\
&\sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left\|\varpi_{cn}-\overline{\varpi}_{cn}\right\|+\left\|\varpi_{sn}-\overline{\varpi}_{sn}\right\|\right)+\\
&\left(\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}|\Psi|\pi+4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}|\Psi|\pi\right)\left\|a(\psi)\right\|\left\|v(\psi)-\overline{v}(\psi)\right\|+\\
&\left(\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}|\Psi|\pi+4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}|\Psi|\pi\right)\left\|a(\psi)-\overline{a}(\psi)\right\|\left\|\overline{v}(\lambda,\psi)\right\|+\\
&\left(\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}|\Psi|\pi+4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}|\Psi|\pi\right)\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|v(\psi)-\overline{v}(\psi)\right\|
\end{aligned}\tag{7.24}$$

elde edilir. Denklem (7.23), Denklem (7.24)'de yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
&\left\|v(\psi)-\overline{v}(\psi)\right\|\le\frac{\left\|\vartheta_0-\overline{\vartheta}_0\right\|+\left\|\varpi_0-\overline{\varpi}_0\right\||\Psi|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left\|\vartheta_{cn}-\overline{\vartheta}_{cn}\right\|+\left\|\vartheta_{sn}-\overline{\vartheta}_{sn}\right\|\right)+\\
&\sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left\|\varpi_{cn}-\overline{\varpi}_{cn}\right\|+\left\|\varpi_{sn}-\overline{\varpi}_{sn}\right\|\right)+\frac{A\left\|\overline{v}(\lambda,\psi)\right\|}{M_3}\left\|\overline{\Gamma}''(\psi)-\Gamma''(\psi)\right\|+\\
&\frac{A\left(M_3+\sqrt{\pi}M\right)\left\|\overline{v}(\lambda,\psi)\right\|}{M_3^2}\left\|\Gamma(\psi)-\overline{\Gamma}(\psi)\right\|+\\
&\left(A\left\|a(\psi)\right\|+A\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|+\frac{\sqrt{\pi}A}{M_3}\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\overline{v}(\lambda,\psi)\right\|\right)\left\|v(\psi)-\overline{v}(\psi)\right\|
\end{aligned}\tag{7.25}$$

elde edilir. Burada,

$$A=\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}|\Psi|\pi+4\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon\right)}|\Psi|\pi.$$

Eğer

$$\left\|\vartheta-\bar{\vartheta}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\vartheta_0-\bar{\vartheta}_0\right\|+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\vartheta_{cn}-\bar{\vartheta}_{cn}\right\|+\left\|\vartheta_{sn}-\bar{\vartheta}_{sn}\right\|\right),$$

$$\left\|\varpi-\bar{\varpi}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\varpi_0-\bar{\varpi}_0\right\||\Psi|+\sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\varpi_{cn}-\bar{\varpi}_{cn}\right\|+\left\|\varpi_{sn}-\bar{\varpi}_{sn}\right\|\right),$$

$$\left\|\Gamma(\psi)-\bar{\Gamma}(\psi)\right\|=\frac{A\left(M_3+\sqrt{\pi}M\right)\left\|\bar{v}(\lambda,\psi)\right\|}{M_3^2}\left\|\Gamma(\psi)-\bar{\Gamma}(\psi)\right\|+\frac{A\left\|\bar{v}(\lambda,\psi)\right\|}{M_3}\left\|\bar{\Gamma}''(\psi)-\Gamma''(\psi)\right\|$$

olarak alınırsa, burada

$$M_4=\max\left\{\frac{1}{2},1\right\},$$

$$M_5=\max\left\{\frac{|\Psi|}{2},\sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\right\},$$

$$M_6=\max\left\{\frac{A\left(M_3+\sqrt{\pi}M\right)\left\|\bar{v}(\lambda,\psi)\right\|}{M_3^2},\frac{A\left\|\bar{v}(\lambda,\psi)\right\|}{M_3}\right\},$$

$$M_7=A\left\|a(\psi)\right\|+A\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|+\frac{\sqrt{\pi}A\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\bar{v}(\lambda,\psi)\right\|}{M_3}$$

belirlenir ve Denklem (7.25),

$$\left\|v(\psi)-\bar{v}(\psi)\right\|\le M_4\left\|\vartheta-\bar{\vartheta}\right\|+M_5\left\|\varpi-\bar{\varpi}\right\|+M_6\left\|\Gamma''(\psi)-\bar{\Gamma}''(\psi)\right\|+M_7\left\|v(\psi)-\bar{v}(\psi)\right\|$$

şeklinde yazılır. Eğer $M_8=\max\left\{M_4,M_5,M_6\right\}$ olarak kabul edildiğinde, son eşitsizlik

$$\left\|v(\psi)-\bar{v}(\psi)\right\|\le M_8\left\|\Theta-\bar{\Theta}\right\|+M_7\left\|v(\psi)-\bar{v}(\psi)\right\|$$

olur. $(c+d)^2 \le 2c^2 + 2d^2$ eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left\|v(\psi)-\overline{v}(\psi)\right\|^2 \le 2M_8^2\left\|\Theta-\overline{\Theta}\right\|^2 + 2M_7^2\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\left|v(\sigma)-\overline{v}(\sigma)\right|^2 d\rho d\sigma$$

olur. Son eşitsizliğe Gronwall eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left\|v(\psi)-\overline{v}(\psi)\right\|^2 \le 2M_8^2\left\|\Theta-\overline{\Theta}\right\|^2 e^{2M_7^2}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\Theta \to \overline{\Theta}$ iken $v(\psi)=\overline{v}(\psi)$ ve $a(\psi)=\overline{a}(\psi)$ olur.

7.7.Doğrusal Olmayan Problem için Sayısal Çözüm

Doğrusal olmayan problemlerin doğrudan çözümünün güç olması nedeniyle, bu çalışmada çözüm sürecinden önce problem doğrusal bir forma indirgenir. Bu amaçla

$$\frac{\partial^2 v^{(n)}}{\partial t^2} - \varepsilon\frac{\partial^4 v^{(n)}}{\partial z^2\partial t^2} - \frac{\partial^2 v^{(n)}}{\partial z^2} - a(t)v^{(n)} = \hbar\left(z,t,v^{(n-1)}\right), \tag{7.26}$$

$$v^{(n)}(z,0)=\vartheta(z),\ \ \partial_t v^{(n)}(z,0)=\varpi(z),\ z\in[0,\pi] \tag{7.27}$$

$$v^{(n)}(0,t)=v^{(n)}(\pi,t),\ \partial_z v^{(n)}(0,t)=\partial_z v^{(n)}(\pi,t),\ \ t\in[0,\Psi] \tag{7.28}$$

problemi için iteratif bir algoritma oluşturulur. $v^{(n)}(z,t)=w^{(n)}(z,t)$ ve $\hbar\left(z,t,v^{(n-1)}\right)=\tilde{\hbar}\left(z,t\right)$ belirleyerek (7.26)-(7.28) problemi

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varepsilon\frac{\partial^4 w}{\partial z^2\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - a\left(t\right)w = \tilde{\hbar}\left(z,t\right) \tag{7.29}$$

$$w^{(n)}(z,0)=\vartheta(z),\ \ \partial_t w^{(n)}(z,0)=\varpi(z),\ z\in[0,\pi] \tag{7.30}$$

$$w^{(n)}(0,t)=w^{(n)}(\pi,t),\ \partial_z w^{(n)}(0,t)=\partial_z w^{(n)}(\pi,t),\ \ t\in[0,T] \tag{7.31}$$

doğrusal bir problem olarak ifade edilebilir. Elde edilen (7.29)-(7.31) problemi sayısal olarak çözmek amacıyla iki farklı kapalı sonlu fark şeması uygulanmıştır:

$$\frac{w_i^{j+3}-2w_i^{j+2}+w_i^{j+1}}{\Delta t^2}=$$
$$\frac{\varepsilon\left[\left(w_{i-1}^{j+3}-2w_i^{j+3}+w_{i+1}^{j+3}\right)-\left(2w_{i-1}^{j+2}-4w_i^{j+2}+2w^{j+2}_{i+1}\right)+\left(w_{i-1}^{j+1}-2w_i^{j+1}+w_{i+1}^{j+1}\right)\right]}{\Delta z^2\Delta t^2}+ \tag{7.32}$$
$$\frac{w_{i-1}^{j+3}-2w_i^{j+3}+w_{i+1}^{j+3}}{\Delta z^2}+a(t)w_i^{j+2}+\tilde{\hbar}_i^{j+2}$$

ve Denklem (7.29)'in çözümünde daha yüksek doğruluk elde edebilmek için,

$$\frac{2w_i^{j+3}-5w_i^{j+2}+4w_i^{j+1}-w_i^{j}}{\Delta t^2}=$$
$$\frac{\varepsilon\left[\left(w_{i-2}^{j+3}-2w_i^{j+3}+w_{i+2}^{j+2}\right)-\left(2w_{i-2}^{j+1}-4w_i^{j+1}+2w^{j+1}_{i+2}\right)+\left(w_{i-2}^{j-1}-2w_i^{j-1}+w_{i+2}^{j-1}\right)\right]}{16\Delta z^2\Delta t^2}+ \tag{7.33}$$
$$\frac{-w_{i-2}^{j+3}+16w_{i-1}^{j+3}-30w_i^{j+3}+16w_{i+1}^{j+3}-w_{i+2}^{j+3}}{12\Delta z^2}+a(t)w_i^{j+2}+\tilde{\hbar}_i^{j+2}$$

kullanılmıştır. Başlangıç ve sınır koşulları $[0,\pi]\times[0,\Psi]$ bölgesi için

$$w_i^1=\vartheta_i,\ \frac{w_i^2-w_i^1}{\Delta t}=\varpi_i,\ w_1^j=w_{Nz}^j,\ \ w_2^j=w_{Nz-1}^j.$$

$[0,\pi]\times[0,\Psi]$ aralığı ayrıklaştırılarak $z_i=\Delta z(i-1),\quad i=1,2,....,Nz$ ve $t_j=j\Delta t$, $j=1,2,....,Nt$ şeklinde tanımlansın. Burada $\Delta z=\frac{\pi}{Nz}$ ve $\Delta t=\frac{\Psi}{Nt}$ sırasıyla z yönündeki uzay adımını ve zaman adımını göstermektedir. Nz ve Nt pozitif tam sayılardır. Ayrık çözüm $w_i^j=w(z_i,t_j)$, başlangıç fonksiyonu $\vartheta_i=\vartheta(z_i)$ ve kaynak terimi $\tilde{\hbar}^{j+2}=\hbar(z_i,t_{j+2})$ biçiminde tanımlanmıştır. Hesaplamalarda $j+3$ indeksi mevcut zamanı, $j+2$ bir önceki zamanı, $j+1$ iki adım önceki zamanı ve j ise üç adım önceki zamanı ifade etmektedir.

Ters katsayı,

$$a(t)=\frac{\Gamma''(t)-\varepsilon\int_o^{\pi}w_{zztt}dz-\int_o^{\pi}w_{zz}dz-\int_o^{\pi}\tilde{\hbar}(z,t)dz}{\Gamma(t)}. \tag{7.34}$$

oluşturan E'' teriminin sonlu fark şeması, Denklem (7.32) için,

$$\Gamma''(t)=\frac{\Gamma^{j+3}-2\Gamma^{j+3}+\Gamma^{j+1}}{\Delta t^2}, \tag{7.35}$$

ve Denklem (7.33) için,

$$\Gamma''(t)=\frac{\Gamma^{j+3}-5\Gamma^{j+2}+4\Gamma^{j+1}-\Gamma^{j}}{\Delta t^2} \tag{7.36}$$

şeklindedir. Denklem (7.31)'da paydaki integralleri hesaplanması için trapezoidal integrasyon kuralı kullanılır. Denklem (7.32) ve (7.33)'nin sayısal çözümünde, elde edilen lineer denklem sistemi doğrudan çözüm yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Önceki zaman adımlarından bilinen terimleri içeren sağ taraf vektörü, Denklem (7.32) ve (7.33) için farklı biçimde elde edilmektedir. Denklem (7.32)'e karşılık gelen sağ taraf vektörü,

$$V_i=2w_i^{j+2}-w_i^{j+1}+\frac{\varepsilon}{\Delta z^2}\left(2w_{i-1}^{j+2}+4w_i^{j+2}-2w_{i+1}^{j+2}+w_{i-1}^{j+1}-2w_i^{j+1}+w_{i+1}^{j+1}\right)-$$
$$a(t)w_i^{j+2}\Delta t^2+\hbar^{j+2}\Delta t^2$$

ve Denklem (7.33)'ye karşılık gelen sağ taraf vektörü,

$$V_i=5w_i^{j+2}-4w_i^{j+1}+w_i^{j}+\frac{\varepsilon}{16\Delta z^2}\left(2w_{i-2}^{j+1}+4w_i^{j+1}-2w_{i+2}^{j+1}+w_{i-2}^{j-1}-2w_i^{j-1}+w_{i+2}^{j-1}\right)-$$
$$a(t)w_i^{j+2}\Delta t^2+\hbar^{j+2}\Delta t^2.$$

şeklindedir.

Örnek 7.1.

$$v_{tt}(z,t)-\varepsilon v_{zztt}(z,t)-v_{zz}(z,t)-a(t)v(z,t)=\hbar(z,t,v),$$

$$v(z,0)=1+\cos 2z,\quad \partial_t v(z,0)=0,\quad z\in[0,\pi]$$

$$v(0,t)=v(\pi,t),\ \partial_z v(0,t)=\partial_z v(\pi,t),\ 0\le t\le \Psi$$

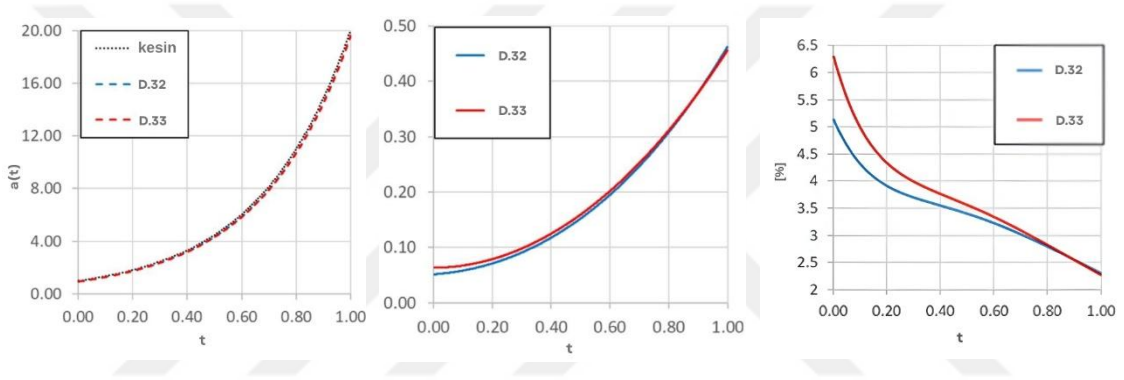
$$\Gamma(t)=\frac{e^{\varepsilon t^2}}{2}\left[2\pi+\sin(2\pi)\right].$$

Burada

$$\hbar(z,t,v)=e^{\varepsilon t^2}\left\{\cos 2z\left[\left[2\varepsilon\left(1+2\varepsilon t^2+4\varepsilon+8\varepsilon^2t^2\right)\right]+4-e^{\varepsilon t}\right]+2\varepsilon\left(1+2\varepsilon t^2\right)-e^{\varepsilon t}\right\}.$$

Ters problemin analitik çözümü, $\left\{a(t),v(z,t)\right\}=\left\{e^{\varepsilon t},(1+\cos 2z)e^{\varepsilon t^2}\right\}$.

Sayısal çözümde z yönü boyunca 640 adet kafes ve zaman adımı da 0,0003125 s olarak belirlenmiştir. Sayısal yöntemin güvenilirliğini göstermek amacıyla, çözümün ağdan bağımsızlığı farklı uzaysal ve zamansal ağ boyutları kullanılarak Bağlan ve diğ. (2025) tarafından yapılan çalışmada ele alınmıştır.

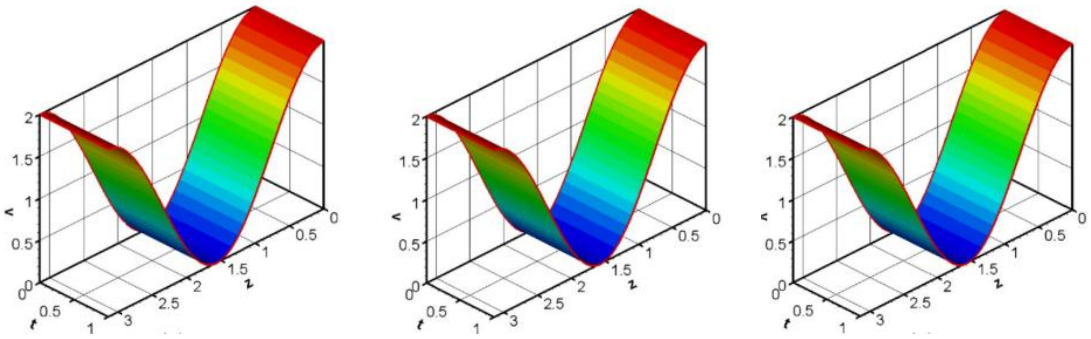


(a) (b) (c)

Şekil 7.1. $\varepsilon=3$ için (a) ters katsayının, (b) mutlak hatanın ve (c) bağıl hatanın zamana bağlı değişimi

Belirlenen sayısal örneğe göre, $\varepsilon=0$ durumunda ters katsayı bire eşittir. Sayısal çözümlerin doğruluğunu değerlendirmek amacıyla Şekil 7.1(b)'de, her iki sonlu fark şeması için de mutlak hataların zamanla arttığı gözlemlenmektedir. Bağıl hata incelendiğinde ise, hatanın zamanla azaldığı ve $1\,s$ anında her iki sayısal çözümün de aynı bağıl hata değerine sahip olduğu görülmektedir.

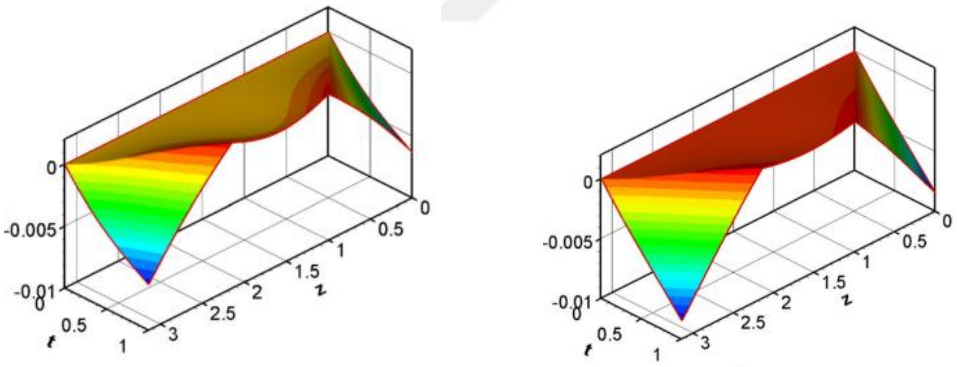
Benzer şekilde, dalga denklemi çözümü v'nin incelenmesi sırasıyla $\varepsilon=0$ ve $\varepsilon=3$ durumları için gerçekleştirilmiştir. Şekil 7.2'de $\varepsilon=0$ durumu için v değerinin zamana bağlı değişimi; (a) kesin çözüm, (b) Denklem (7.32) ve (c) Denklem (7.33) için gösterilmektedir. Hem kesin hem de sayısal çözümlerde, v değeri $0\,s$ anında "U" şeklinde bir profil almakta ve zaman ilerledikçe bu şeklini korumaktadır.



(a) (b) (c)

Şekil 7.2. $\varepsilon = 0$ için v değerinin zamana bağlı değişimi: (a) kesin çözüm, (b) Denklem (7.32) ve (c) Denklem (7.33) sayısal çözümleri

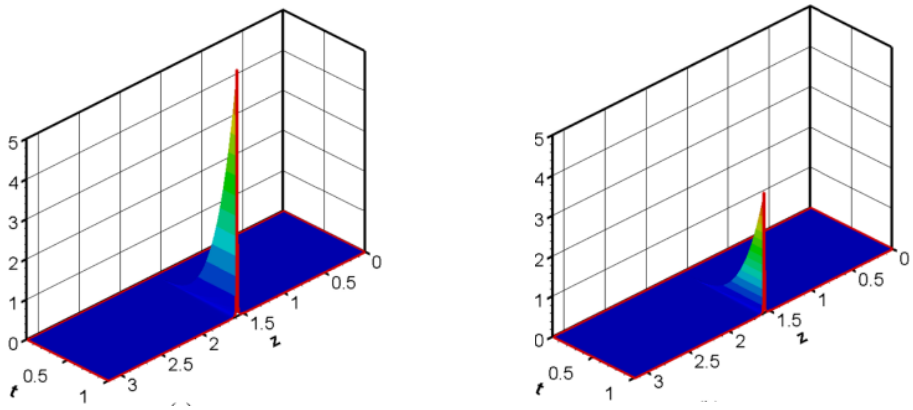
Şekil 7.3'te, hem Denklem (7.32) hem de Denklem (7.33) için mutlak hataların zamana bağlı değişimi sunulmaktadır. Her iki denklem için de $0s$ anında mutlak hata değerleri hesaplama alanının tamamında oldukça küçüktür. Zaman ilerledikçe, özellikle sınır noktalarında mutlak hata değerlerinin arttığı görülmektedir. Sınır noktalarında, Denklem (7.33) şeması mutlak hata değerleri daha büyükken; hesaplama alanının merkezinde ise daha az doğru şemalar içeren Denklem (7.32) daha büyük mutlak hatalar üretmektedir.



(a) (b)

Şekil 7.3. $\varepsilon = 0$ için (a) Denklem (7.32) ve (b) Denklem (7.33) mutlak hatasının zamana bağlı değişimi

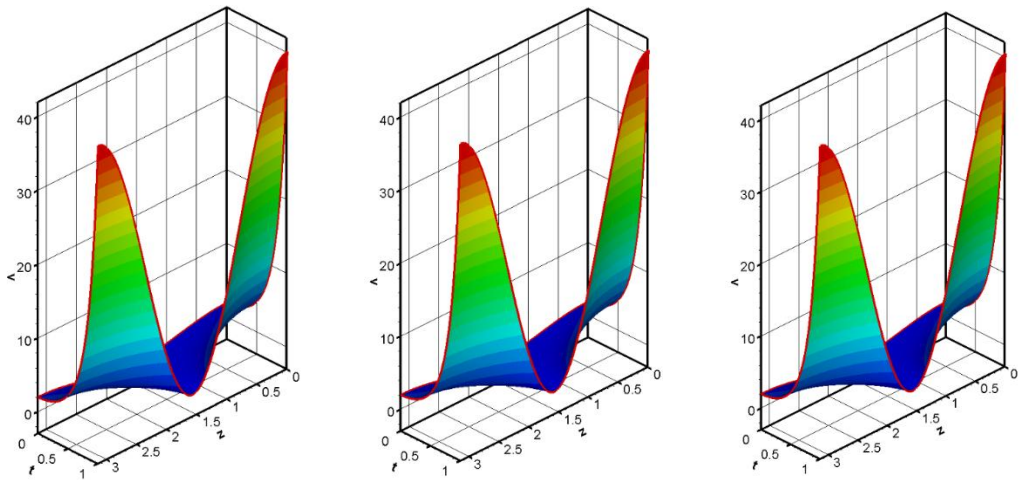
Şekil 7.4'te, Denklem (7.32) ve Denklem (7.33) için bağıl hata değerleri sunulmaktadır. Her iki denklem için de başlangıç zamanlarında bağıl hata düşüktür; ancak zaman ilerledikçe, hesaplama alanının merkezinde bağıl hata artmaya başlamaktadır. Denklem (7.32) için bağıl hata $1s$ anında yaklaşık %5'e ulaşırken, Denklem (7.33) için bu değer yaklaşık %2,5 civarındadır.



(a) (b)

Şekil 7.4. $\varepsilon = 0$ için (a) Denklem (7.32) ve (b) Denklem (7.33) bağıl hatasının zamana bağlı değişimi

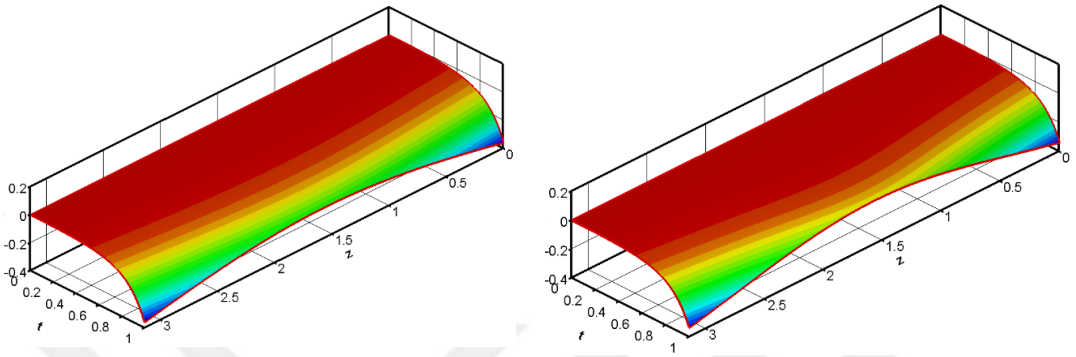
Şekil 7.5'te, $\varepsilon = 3$ için v değerinin zamana bağlı değişimi (a) analitik çözüm, (b) Denklem (7.32) ve (c) Denklem (7.33) için gösterilmiştir. Genel olarak, v değeri hesaplama bölgesinin sınır noktalarında yüksek olup, periyodik sınır koşulu nedeniyle her iki sınırda da eşit değerler almaktadır. Ancak, bölgenin orta noktasında v değeri her zaman için sıfırdır ve bu durum, profilde "U" harfine benzer bir şekil oluşmasına neden olmaktadır. Zaman ilerledikçe bu şeklin derinliği artmaktadır. Her iki şemadan elde edilen sonuçlar, kesin çözümle oldukça benzerlik göstermektedir.



(a) (b) (c)

Şekil 7.5. $\varepsilon = 3$ için v değerinin zamana bağlı değişimi: (a) kesin çözüm, (b) Denklem (7.32) ve (c) Denklem (7.33) sayısal çözümleri

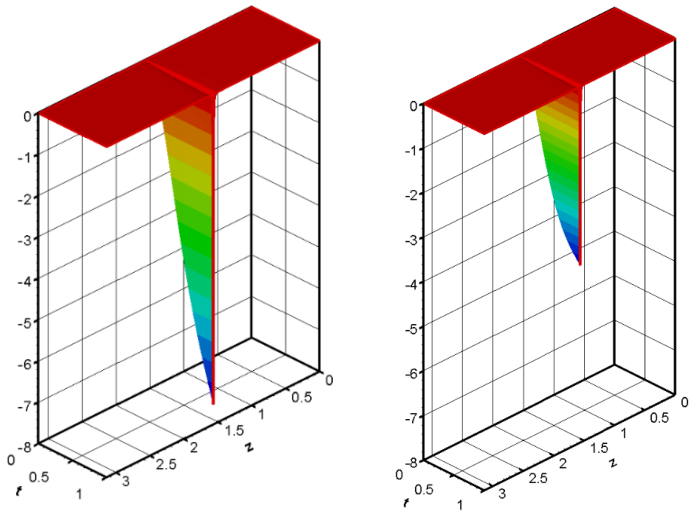
Şekil 7.6'da her iki denklem için de mutlak hataların zamana bağlı değişimleri sunulmuştur. Başlangıçta mutlak hatalar yaklaşık sıfırken, zamanla artmıştır. Hatalar sınır noktalarında daha büyük, orta noktalarda daha küçük olduğu gözlemlenmiştir. Denklem (7.32) için maksimum bağıl hata %8, Denklem (7.33) için %4'tür.



(a) (b)

Şekil 7.6. $\varepsilon = 3$ için (a) Denklem (7.32) ve (b) Denklem (7.33) mutlak hatasının zamana bağlı değişimi:

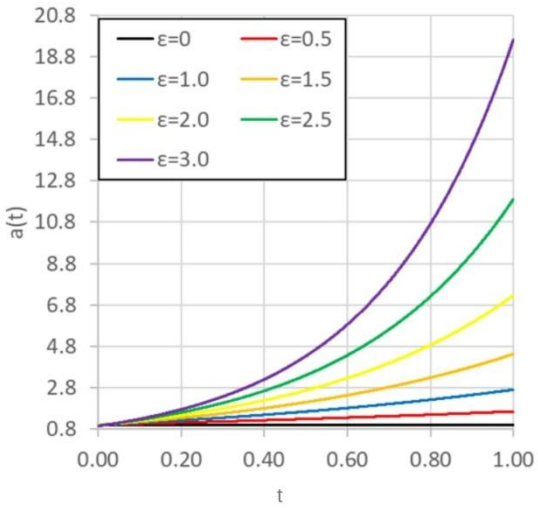
Şekil 7.7'de bağıl hatanın zamana bağlı değişimi gösterilmiştir. Bağıl hataların yalnızca hesaplama bölgesinin orta kısmında ortaya çıktığı gözlemlenmiştir. Zaman ilerledikçe bağıl gerçek hataların da arttığı görülmektedir.



(a) (b)

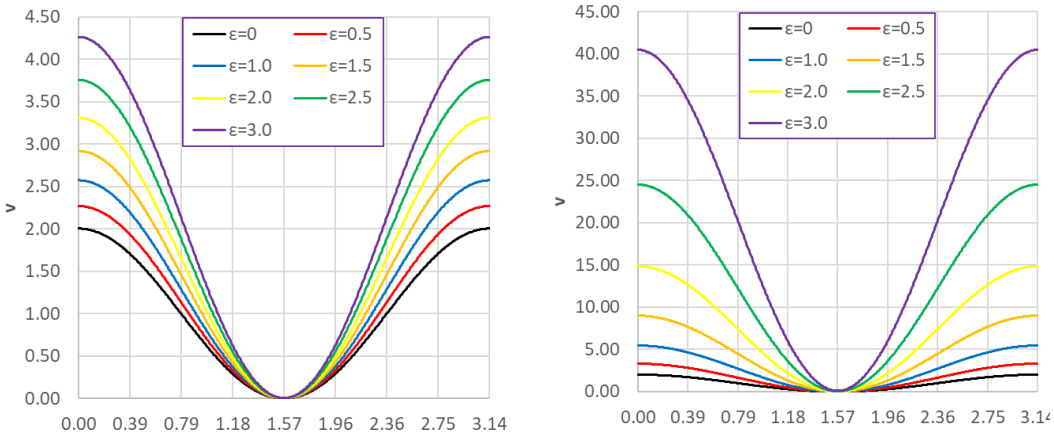
Şekil 7.7. $\varepsilon = 3$ için (a) Denklem (7.32) ve (b) Denklem (7.33) bağıl hatasının zamana bağlı değişimi

Şekil 7.8'de, ε'nın ters katsayı üzerindeki etkisi gösterilmektedir. $\varepsilon = 0$ durumunda ters katsayı birim değerinde olup ε'nın sıfırdan farklı olduğu durumlarda ters katsayı zamanla artmaktadır.



Şekil 7.8. ε değerinin ters katsayı üzerindeki etkisi (Denklem 7.33)

Şekil 7.9'da, ε değerinin v üzerindeki etkisi $0,5s$ ve $1s$ anlarında incelenmiştir. Tüm değerlendirilen zamanlarda, Şekil 7.5'te de gösterildiği üzere, v profili "U" biçimindedir ve ε değeri arttıkça sınır noktalarındaki v değerlerinin de artarak "U" şeklindeki profilin derinliği daha belirgin hale gelmektedir.

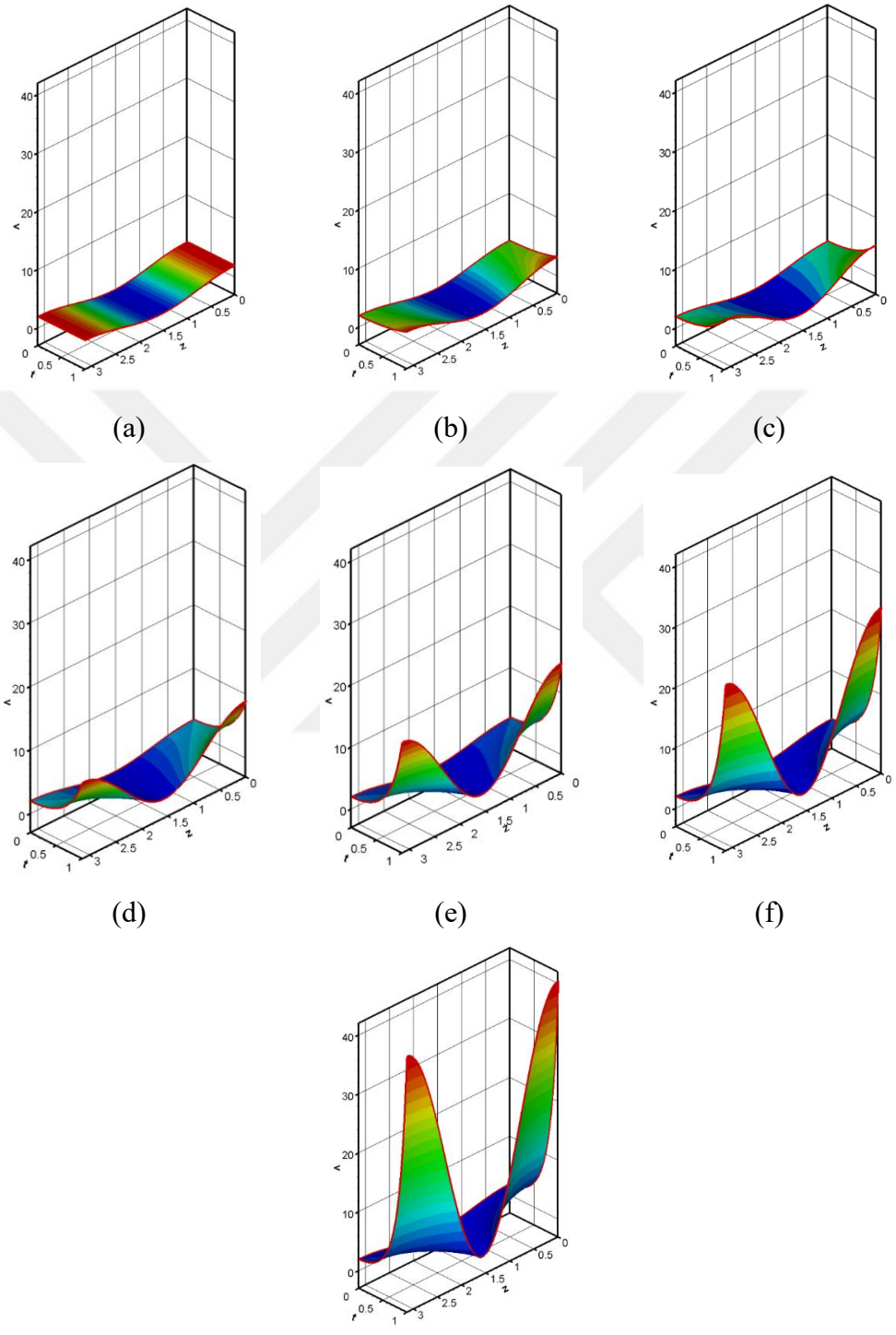


(a) (b)

Şekil 7.9. ε değerinin v çözümü üzerindeki etkisi: (a) $t = 0,5s$ ve (b) $t = 1s$ (Denklem 7.33)

Şekil 7.10'da, farklı ε değerleri için v değerinin üç boyutlu grafikleri sunulmuştur. Şekil 7.10(a)'da, $\varepsilon = 0$ olduğundan v değeri zamanla değişmemekte, ancak "U" biçimli bir

profil sergilemektedir. $\varepsilon \neq 0$ olduğu durumlarda ise sınır noktalarındaki v değerleri zamanla değişmeye ve artmaya başlamaktadır.



Şekil 7.10. ε değerinin v çözümü üzerindeki etkisi: (a) $\varepsilon = 0$; (b) $\varepsilon = 0,5$; (c) $\varepsilon = 1$; (d) $\varepsilon = 1,5$; (e) $\varepsilon = 2$; (f) $\varepsilon = 2,5$ ve (g) $\varepsilon = 3$

8.HİPERBOLİK VE PSEUDO-HİPERBOLİK PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN ARASINDAKİ BAĞLANTI

8.1.Analitik Çözümün İncelenmesi

Bu bölümde, $\Omega := \{0 < \lambda < \pi, 0 < \psi < \Psi\}$ bölgesinde,

$$\nu_{\psi\psi}(\lambda,\psi) - \nu_{\lambda\lambda}(\lambda,\psi) - a(\psi)\nu(\lambda,\psi) = \hbar(\lambda,\psi,\nu), \tag{8.1}$$

$$\nu(\lambda,0) = \vartheta(\lambda), \partial_{\psi}\nu(\lambda,0) = \varpi(\lambda), \tag{8.2}$$

$$\nu(0,\psi) = \nu(\pi,\psi), \partial_{\lambda}\nu(0,\psi) = \partial_{\lambda}\nu(\pi,\psi), \tag{8.2}$$

$$\Gamma(\psi) = \int_0^{\pi} \nu(\lambda,\psi) d\lambda \tag{8.4}$$

ve

$$\bar{\nu}_{\psi\psi}(\lambda,\psi) - \varepsilon\bar{\nu}_{\lambda\lambda\psi\psi}(\lambda,t) - \bar{\nu}_{\lambda\lambda}(\lambda,\psi) - \bar{a}(\psi)\bar{\nu}(\lambda,\psi) = \hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu}), \tag{8.5}$$

$$\bar{\nu}(\lambda,0) = \vartheta(\lambda), \partial_{\psi}\bar{\nu}(\lambda,0) = \varpi(\lambda), \tag{8.6}$$

$$\bar{\nu}(0,\psi) = \bar{\nu}(\pi,\psi), \partial_{\lambda}\bar{\nu}(0,\psi) = \partial_{\lambda}\bar{\nu}(\pi,\psi), \tag{8.7}$$

$$\bar{\Gamma}(\psi) = \int_0^{\pi} \bar{\nu}(\lambda,\psi) d\lambda \tag{8.8}$$

hiperbolik ve pseudo-hiperbolik problemlerin çözümleri arasındaki bağlantı incelenecektir. Burada, $\varepsilon \geq 0$ parametre olmak üzere ϑ, ϖ ve Γ fonksiyonları $[0,\pi]$ aralığında, $\hbar(\lambda,\psi,\nu)$ fonksiyonu $\bar{\Omega} \times \{-\infty,\infty\}$ üzerinde tanımlı verilen fonksiyonlardır.

Problem (8.1)-(8.4)'in çözümü,

$$\nu(\lambda,\psi)=\frac{1}{2}\left(\vartheta_0+\varpi_0\psi+\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[\nu(\rho,\sigma)a(\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\nu)\right]d\rho d\sigma\right)+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\vartheta_{cn}\cos\wp_n\psi+\frac{1}{\wp_n}\varpi_{cn}\sin\wp_n\psi\right)\cos 2n\lambda+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\wp_n\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)\left[\nu(\rho,\sigma)a(\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\nu)\right]d\rho d\sigma\right)\cos 2n\lambda+ \qquad (8.9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\vartheta_{sn}\cos\wp_n\psi+\frac{1}{\wp_n}\varpi_{sn}\sin\wp_n t\right)\sin 2n\lambda+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\wp_n\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)\left[\nu(\rho,\sigma)a(\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\nu)\right]d\rho d\sigma\right)\sin 2n\lambda,$$

$$a(\psi)=\frac{\Gamma''(\psi)-\int_0^{\pi}\hbar\left(\lambda,\psi,\nu\right)d\lambda}{\Gamma(\psi)}, \qquad (8.10)$$

Problem (7.5)-(7.8)'in çözümü,

$$\bar{\nu}(\lambda,\psi,\varepsilon)=\frac{1}{2}\left(\vartheta_0+\varpi_0\psi+\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)[\bar{\nu}(\rho,\sigma,\varepsilon)\bar{a}(\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})]d\rho d\sigma\right)+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\vartheta_{cn}\cos\bar{\wp}_n\psi+\frac{1}{\bar{\wp}_n}\varpi_{cn}\sin\bar{\wp}_n\psi\right)\cos 2n\lambda+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\bar{\wp}_n\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\bar{\wp}_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)[\bar{\nu}(\rho,\sigma,\varepsilon)\bar{a}(\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})]d\rho d\sigma\right)\cos 2n\lambda+ \qquad (8.11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\vartheta_{sn}\cos\bar{\wp}_n\psi+\frac{1}{\bar{\wp}_n}\varpi_{sn}\sin\bar{\wp}_n\psi\right)\sin 2n\lambda+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\bar{\wp}_n\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\bar{\wp}_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)[\bar{\nu}^{(N)}(\rho,\sigma,\varepsilon)\bar{a}(\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})]d\rho d\tau\right)\sin 2n\lambda,$$

$$\bar{a}(\psi)=\frac{\bar{\mathrm{E}}''(\psi)-\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda}{\bar{\Gamma}(\psi)} \qquad (8.12)$$

elde edilmiştir. Burada,

$$\vartheta_0(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\vartheta(\lambda)d\lambda,\ \varpi_0(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varpi(\lambda)d\lambda,$$

$$\vartheta_{cn}(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\vartheta(\lambda)\cos 2n\lambda d\lambda,\ \varpi_{cn}(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varpi(\lambda)\cos 2n\lambda d\lambda,$$

$$\vartheta_{sn}(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\vartheta(\lambda)\sin 2n\lambda d\lambda,\ \varpi_{sn}(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varpi(\lambda)\sin 2n\lambda d\lambda,$$

$$\wp_n=2n,\ \overline{\wp}_n=\frac{2n}{\sqrt{1+\varepsilon(2n)^2}}.$$

Teorem 8.1.

K1. $\Gamma(\psi)\in C^2[0,\Psi]$, $a(\psi)\in C[0,\Psi]$ ve $\Gamma(\psi)\neq 0$.

K2. $\vartheta(\lambda)\in C[0,\pi]$, $\varpi(\lambda)\in C[0,\pi]$.

K3.1 $\hbar(\lambda,\psi,\nu)$ fonksiyonu $\Omega\times(-\infty,\infty)$ bölgesinde sürekli ve aşağıdaki koşullar sağlansın: $\left|\frac{\partial^{(n)}\hbar(\lambda,\psi,\nu)}{\partial\lambda^{(n)}}-\frac{\partial^{(n)}\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})}{\partial\lambda^{(n)}}\right|\le\ell(\lambda,\psi)\left|\nu-\bar{\nu}\right|$, $n=\overline{0,2}$,

burada $\ell(\lambda,\psi)\in L_2(\Omega)$, $\ell(\lambda,\psi)\ge 0$.

K3.2 $\hbar(\lambda,\psi,\nu)\in C[0,\pi],\psi\in[0,\Psi],\left|\hbar(\lambda,\psi,\nu)\right|\le M$,

K3.3 $\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\neq 0,\forall\,\psi\in[0,\Psi]$,

koşulları sağlanırsa $\lim_{\varepsilon\to 0}\bar{\nu}(\lambda,\psi,\varepsilon)=\nu(\lambda,\psi)$ 'dır.

İspat. Ters katsayı (8.10) ve (8.12) farkı alınırsa,

$$\bar{a}(\psi)-a(\psi)=\frac{1}{\bar{\Gamma}(\psi)}\left(\bar{\Gamma}''(\psi)-\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})d\lambda\right)-\frac{1}{\Gamma(\psi)}\left(\mathrm{E}''(t)-\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\right)$$

olur. Son denkleme ekleme çıkarma işlemi yapılırsa,

$$\bar{a}(\psi)-a(\psi)=\frac{1}{\bar{\Gamma}(\psi)\Gamma(\psi)}\left(\Gamma(\psi)\left[\bar{\Gamma}''(\psi)-\Gamma''(\psi)\right]-\Gamma''(\psi)\left[\bar{\Gamma}(\psi)-\Gamma(\psi)\right]\right)$$
$$\frac{1}{\bar{\Gamma}(\psi)\Gamma(\psi)}\left(\Gamma(\psi)\int_0^{\pi}\left[\hbar(\lambda,\psi,\bar{\nu})-\hbar(\lambda,\psi,\nu)\right]d\lambda-\left[\bar{\Gamma}(\psi)-\Gamma(\psi)\right]\int_0^{\pi}\hbar(\lambda,\psi,\nu)d\lambda\right)$$

elde edilir. Mutlak değeri alınıp ardından sırasıyla Cauchy eşitsizliği, Lipschitz koşulu ve maksimumu alınırsa,

$$\begin{aligned}&\left\|\bar{a}(\psi)-a(\psi)\right\|\le\frac{1}{\left\|\bar{\Gamma}(\psi)\right\|\left\|\Gamma(\psi)\right\|}\sqrt{\pi}\left\|\Gamma(\psi)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|\left\|\bar{\nu}(\psi)-\nu(\psi)\right\|\\&\frac{1}{\left\|\bar{\Gamma}(\psi)\right\|\left\|\Gamma(\psi)\right\|}\left(\left\|\Gamma(\psi)\right\|\left\|\bar{\Gamma}''(\psi)-\bar{\Gamma}(\psi)\right\|+\left(\left\|\Gamma''(\psi)\right\|+M\right)\left\|\bar{\Gamma}(\psi)-\bar{\Gamma}(\psi)\right\|\right)\end{aligned}\tag{8.13}$$

elde edilir.

Çözüm (8.9) ve (8.11) farkı alınsın;

$$\bar{\nu}(\lambda,\psi,\varepsilon)-\nu(\lambda,\psi)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)[\bar{a}(\sigma)\bar{\nu}(\rho,\sigma,\varepsilon)+\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})]d\rho d\sigma\right)-$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[a(\sigma)\nu(\rho,\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\nu)\right]d\rho d\sigma\right)+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\vartheta_{cn}\cos\bar{\wp}_n\psi+\frac{1}{\bar{\wp}_n}\varpi_{cn}\sin\bar{\wp}_n\psi\right)\cos 2n\lambda+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\bar{\wp}_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\bar{\wp}_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)[\bar{a}(\sigma)\bar{\nu}(\rho,\sigma,\varepsilon)+\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})]d\rho d\sigma\right)\cos 2n\lambda-$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\vartheta_{cn}\cos\wp_n\psi+\frac{1}{\wp_n}\varpi_{cn}\sin\wp_n\psi\right)\cos 2n\lambda+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)\left[a(\sigma)\nu(\rho,\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\nu)\right]d\rho d\sigma\right)\cos 2n\lambda+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\vartheta_{sn}\cos\bar{\wp}_n\psi+\frac{1}{\bar{\wp}_n}\varpi_{sn}\sin\bar{\wp}_n\psi\right)\sin 2n\lambda+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\bar{\wp}_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\bar{\wp}_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)[\bar{a}(\sigma)\bar{\nu}(\rho,\sigma,\varepsilon)+\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})]d\rho d\sigma\right)\sin 2n\lambda-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\vartheta_{sn}\cos\wp_n\psi+\frac{1}{\wp_n}\varpi_{sn}\sin\wp_n\psi\right)\sin 2n\lambda+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi\wp_n}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)\left[a(\sigma)\nu(\rho,\sigma)+\hbar(\rho,\sigma,\nu)\right]d\rho d\sigma\right)\sin 2n\lambda.$$

Ekleme çıkarma yapılarak mutlak değeri alınırsa,

$$\left|\bar{\nu}(\psi,\varepsilon)-\nu(\psi)\right|\le\frac{1}{2}\left(\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)[\bar{a}(\sigma)-a(\sigma)]\bar{\nu}(\rho,\sigma,\varepsilon)d\rho d\sigma\right|\right)+$$

$$\frac{1}{2}\left(\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(t\psi-\sigma)a(\sigma)\left[\bar{\nu}(\rho,\sigma,\varepsilon)-\nu(\rho,\sigma)\right]d\rho d\sigma\right|\right)+$$

$$\frac{1}{2}\left(\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})-\hbar(\rho,\sigma,\nu)\right]d\rho d\sigma\right|\right)+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\vartheta_{cn}-\vartheta_{sn}\right|\left|\cos\bar{\wp}_n\psi-\cos\wp_n\psi\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varpi_{cn}-\varpi_{sn}\right|\left|\frac{\sin\bar{\wp}_n\psi}{\bar{\wp}_n}-\frac{\sin\wp_n\psi}{\wp_n}\right|+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\bar{\wp}_n}\int_0^{\psi}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\bar{\wp}_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)[\bar{a}(\sigma)-a(\sigma)]\bar{\nu}(\rho,\sigma,\varepsilon)d\rho\right|d\sigma+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_n}\int_0^{\psi}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)[\bar{\nu}(\rho,\sigma,\varepsilon)-\nu(\rho,\sigma)]a(\sigma)d\rho\right|d\sigma+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_n}\int_0^{\psi}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}a(\sigma)\bar{\nu}(\rho,\sigma,\varepsilon)\cos 2n\rho d\rho\right|\left|\sin\bar{\wp}_n(\psi-\sigma)-\sin\wp_n(\psi-\sigma)\right|d\sigma+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\bar{\wp}_n}-\frac{1}{\wp_n}\right|\int_0^{\psi}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)a(\sigma)\bar{\nu}(\rho,\sigma,\varepsilon)d\rho\right|d\sigma+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_n}\int_0^{\psi}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)[\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})-\hbar(\rho,\sigma,\nu)]d\rho\right|d\sigma+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\bar{\wp}_n}\int_0^{\psi}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})\cos 2n\rho d\rho\right|\left|\sin\bar{\wp}_n(\psi-\sigma)-\sin\wp_n(\psi-\sigma)\right|d\sigma+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\bar{\wp}_n}-\frac{1}{\wp_n}\right|\int_0^{\psi}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})d\rho\right|d\sigma+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\bar{\wp}_n}\int_0^{\psi}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\bar{\wp}_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)[\bar{a}(\sigma)-a(\sigma)]\bar{\nu}(\rho,\sigma,\varepsilon)d\rho\right|d\sigma+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_n}\int_0^{\psi}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)[\bar{\nu}(\rho,\sigma,\varepsilon)-\nu(\rho,\sigma)]a(\sigma)d\rho\right|d\sigma+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_n}\int_0^{\psi}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}a(\sigma)\bar{\nu}(\rho,\sigma,\varepsilon)\sin 2n\rho d\rho\right|\left|\sin\bar{\wp}_n(\psi-\sigma)-\sin\wp_n(\psi-\sigma)\right|d\sigma+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\bar{\wp}_n}-\frac{1}{\wp_n}\right|\int_0^{\psi}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)a(\sigma)\bar{\nu}(\rho,\sigma,\varepsilon)d\rho\right|d\sigma+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_n}\int_0^{\psi}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)[\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})-\hbar(\rho,\sigma,\nu)]d\rho\right|d\sigma+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\bar{\wp}_n}\int_0^{\psi}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})\sin 2n\rho d\rho\right|\left|\sin\bar{\wp}_n(\psi-\sigma)-\sin\wp_n(\psi-\sigma)\right|d\sigma+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\bar{\wp}_n}-\frac{1}{\wp_n}\right|\int_0^{\psi}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})d\rho\right|d\sigma$$

elde edilir. k,σ ve ψ $\left(0\le\sigma\le\psi\le\Psi\right)$ için $\left|\cos\bar{\wp}_n\psi-\cos\wp_n\psi\right|\le\beta_1(\varepsilon)$,

$\left|\frac{\sin\bar{\wp}_n\psi}{\bar{\wp}_n}-\frac{\sin\wp_n\psi}{\wp_n}\right|\le\beta_2(\varepsilon)$, $\left|\sin\bar{\wp}_n(\psi-\sigma)-\sin\wp_n(\psi-\sigma)\right|\le\beta_3(\varepsilon)$, $\left|\frac{1}{\bar{\wp}_n}-\frac{1}{\wp_n}\right|\le\beta_4(\varepsilon)$

ifadeleri $\varepsilon\to 0$ iken sınırlıdır (Halilov ve diğ., 2015). Bu ifadeleri $\beta(\varepsilon)$ ile belirleyerek,

$$\left|\bar{\nu}(\psi,\varepsilon)-\nu(\psi)\right|\le\beta(\varepsilon)+\frac{1}{2}\left(\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)[\bar{a}(\sigma)-a(\sigma)]\bar{\nu}(\rho,\sigma,\varepsilon)d\rho d\sigma\right|\right)+$$

$$\frac{1}{2}\left(\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)a(\sigma)\left[\bar{\nu}(\rho,\sigma,\varepsilon)-\nu(\rho,\sigma)\right]d\rho d\sigma\right|\right)+$$

$$\frac{1}{2}\left(\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{\pi}(\psi-\sigma)\left[\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})-\hbar(\rho,\sigma,\nu)\right]d\rho d\sigma\right|\right)+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\bar{\wp}_n}\int_0^{\psi}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\bar{\wp}_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)[\bar{a}(\sigma)-a(\sigma)]\bar{\nu}(\rho,\sigma,\varepsilon)d\rho\right|d\sigma+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_n}\int_0^{\psi}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)a(\sigma)[\bar{\nu}(\rho,\sigma,\varepsilon)-\nu(\rho,\sigma)]d\rho\right|d\sigma+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_n}\int_0^{\psi}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\cos(2n\rho)[\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})-f(\rho,\sigma,\nu)]d\rho\right|d\sigma+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\bar{\wp}_n}\int_0^{\psi}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\bar{\wp}_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)[\bar{a}(\sigma)-a(\sigma)]\bar{\nu}(\rho,\sigma,\varepsilon)d\rho\right|d\sigma+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_n}\int_0^{\psi}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)a(\sigma)[\bar{\nu}(\rho,\sigma,\varepsilon)-\nu(\rho,\sigma)]d\rho\right|d\sigma+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\wp_n}\int_0^{\psi}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\wp_n(\psi-\sigma)\sin(2n\rho)[\hbar(\rho,\sigma,\bar{\nu})-\hbar(\rho,\sigma,\nu)]d\rho\right|d\sigma$$

elde edilir. Cauchy, Hölder, Bessel ve Lipschitz eşitsizlikleri sırasıyla uygulanırsa

$$\begin{aligned}&\left\|\bar{\nu}(\psi,\varepsilon)-\nu(\psi)\right\|\le\\&\beta(\varepsilon)+\left(\pi|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}+4\pi|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\right)\left\|\bar{a}(\psi)-a(\psi)\right\|\left\|\bar{\nu}(\lambda,\psi,\varepsilon)\right\|+\\&\left(\pi|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}+4\pi|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\right)\left\|a(\psi)\right\|\left\|\bar{\nu}(\psi,\varepsilon)-\nu(\psi)\right\|+\\&\left(\pi|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}+4\pi|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}\right)\left\|b(\lambda,\psi)\right\|\left\|\bar{\nu}(\psi,\varepsilon)-\nu(\psi)\right\|\end{aligned}\tag{8.15}$$

elde edilir. Burada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\wp}_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\varepsilon(4n^2)}{4n^2}=\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon.$$

Denklem (8.13), Denklem (8.15)'e yazılırsa,

$$\begin{aligned}&\left\|\bar{\nu}(\psi,\varepsilon)-\nu(\psi)\right\|\le\beta(\varepsilon)+\\&A\left(\left\|a(\psi)\right\|+\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|+\frac{\sqrt{\pi}\left\|\bar{\nu}(\psi,\varepsilon)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|}{\left\|\bar{\Gamma}(\psi)\right\|}\right)\left\|\bar{\nu}(\psi,\varepsilon)-\nu(\psi)\right\|+\\&A\left\|\bar{\nu}(\psi,\varepsilon)\right\|\frac{\left\|\bar{\Gamma}''(\psi)-\Gamma''(\psi)\right\|}{\left\|\bar{\mathrm{E}}(\psi)\right\|}+A\left\|\bar{\nu}(\psi,\varepsilon)\right\|\frac{\left(\left\|\Gamma''(\psi)\right\|+M\right)\left\|\bar{\Gamma}(\psi)-\Gamma(\psi)\right\|}{\left\|\bar{\Gamma}(\psi)\right\|\left\|\mathrm{E}(\psi)\right\|}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$A=\pi|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi^3}{3\pi}}+4\pi|\Psi|\sqrt{\frac{\Psi}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi^2}{24}+\varepsilon}.$$

$\left\|\bar{\Gamma}''(\psi)-\Gamma''(\psi)\right\|\le\beta_E$ ve $\left\|\bar{\Gamma}(\psi)-\Gamma(\psi)\right\|\le\beta_E$ olduğu kabul edilirse, sınırlı ifadeleri $o(\varepsilon)$ olarak belirlenebilir ve

$$\left\|\bar{\nu}(\psi,\varepsilon)-\nu(\psi)\right\| \le o(\varepsilon)+A\left(\left\|a(\psi)\right\|+\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|+\frac{\sqrt{\pi}\left\|\bar{\nu}(\psi,\varepsilon)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|}{\left\|\bar{\Gamma}(\psi)\right\|}\right)\left\|\bar{\nu}(\psi,\varepsilon)-\nu(\psi)\right\|$$

olur. Son denkleme $(a+b)^2 \le 2a^2+2b^2$ eşitsizliği ve Gronwall eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left\|\bar{\nu}(\psi,\varepsilon)-\nu(\psi)\right\|^2 \le 2o^2(\varepsilon)+e^{2A^2S^2} \tag{8.16}$$

elde edilir. Burada

$$S=\left\|a(\psi)\right\|+\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|+\frac{\sqrt{\pi}\left\|\bar{\nu}(\psi,\varepsilon)\right\|\left\|\ell(\lambda,\psi)\right\|}{\left\|\bar{\Gamma}(\psi)\right\|}.$$

Bu, $\lim_{\varepsilon\to 0}\bar{\nu}(\psi,\varepsilon)=\nu(\psi)$ 'dır. Sonuç olarak, $\varepsilon\to 0$ iken Teorem 8.1 koşulları altında Denklem (8.11)'in çözümü, Denklem (8.9)'in çözümüne yakınsar.

8.2.Sayısal Çözümün İncelenmesi

Bölüm 7.7'de ayrıntılı olarak incelenen denklem, bu bölümde yeniden ele alınmaktadır. Bu bölümdeki amaç, aynı denklemi farklı bir örnek problem üzerinde değerlendirerek ε parametresinin sayısal çözüm üzerindeki etkisini ortaya koymaktır. Başlangıç ve sınır koşulları ile doğrusallaştırma süreci, Bölüm 7.7'de verildiği şekilde alınmıştır:

$$\frac{\partial^2\nu^{(n)}}{\partial t^2}-\varepsilon\frac{\partial^4\nu^{(n)}}{\partial z^2\partial t^2}-\frac{\partial^2\nu^{(n)}}{\partial z^2}-a(t)\nu^{(n)}=\hbar\left(z,t,\nu^{(n-1)}\right), \tag{8.17}$$

Denklem (8.17) için kapalı sonlu fark şeması,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Delta t^2}\left(w_i^{j+3}-2w_i^{j+2}+w_i^{j+1}\right)=\\&\frac{\varepsilon}{\Delta z^2\Delta t^2}\left[\left(w_{i-1}^{j+3}-2w_i^{j+3}+w_{i+1}^{j+3}\right)-\left(2w_{i-1}^{j+2}-4w_i^{j+2}+2w^{j+2}_{i+1}\right)+\left(w_{i-1}^{j+1}-2w_i^{j+1}+w_{i+1}^{j+1}\right)\right]+\\&\frac{1}{\Delta z^2}\left(w_{i-1}^{j+3}-2w_i^{j+3}+w_{i+1}^{j+3}\right)+a\left(t\right)w_i^{j+2}+\tilde{\hbar}_i^{j+2}\end{aligned} \tag{8.18}$$

kullanılmıştır.

Ters katsayı,

$$a(t)=\frac{\Gamma''(t)-\varepsilon\int_o^{\pi}u_{zztt}dz-\int_o^{\pi}u_{zz}dz-\int_o^{\pi}\tilde{h}(z,t)dz}{\Gamma(t)}. \tag{8.19}$$

oluşturan Γ'' teriminin sonlu fark şeması,

$$\Gamma''(t)=\frac{\Gamma^{j+3}-2\Gamma^{j+3}+\Gamma^{j+1}}{\Delta t^2}$$

şeklindedir. Denklem (8.19)'de payda yer alan integrallerin hesaplanması için trapez kuralı kullanılmıştır. Bilinmeyen zaman seviyesine göre yeniden düzenlenen Denklem (8.18), aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$-\left(\frac{\varepsilon}{\Delta x^2}+\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right)u_{i-1}^{j+3}+\left(1+\left(\frac{\varepsilon}{\Delta x^2}+\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right)\right)u_i^{j+3}-\left(\frac{\varepsilon}{\Delta x^2}+\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right)u_{i+1}^{j+3}=$$
$$=2u_i^{j+2}-u_i^{j+1}-\frac{2\varepsilon}{\Delta z^2}\left(u_{i-1}^{j+2}-2u_i^{j+2}+u^{j+2}_{i+1}\right)+\frac{\varepsilon}{\Delta z^2}\left(u_{i-1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i+1}^{j+1}\right)+a^{j+2}u_i^{j+2}+f_i^{j+2}.$$

Elde edilen lineer denklem sistemi doğrudan çözüm yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Önceki zaman adımlarından bilinen terimleri içeren sağ taraf vektörü,

$$V_i=2w_i^{j+2}-w_i^{j+1}+\frac{\varepsilon}{\Delta z^2}\left(2w_{i-1}^{j+2}+4w_i^{j+2}-2w_{i+1}^{j+2}+w_{i-1}^{j+1}-2w_i^{j+1}+w_{i+1}^{j+1}\right)-$$
$$a(t)w_i^{j+2}\Delta t^2+\hbar^{j+2}\Delta t^2$$

şeklindedir.

Örnek 8.1.

$$v_{tt}(z,t)-\varepsilon v_{zztt}(z,t)-v_{zz}(z,t)-a(t)v(z,t)=\hbar(z,t,v),$$

$$v(z,0)=1+\sin 2z,\ z\in[0,\pi]$$
$$\partial_t v(z,0)=0,\ z\in[0,\pi]$$

$$v(0,t)=v(\pi,t),\ 0\le t\le\Psi$$
$$\partial_z v(0,t)=\partial_z v(\pi,t),\ 0\le t\le\Psi$$

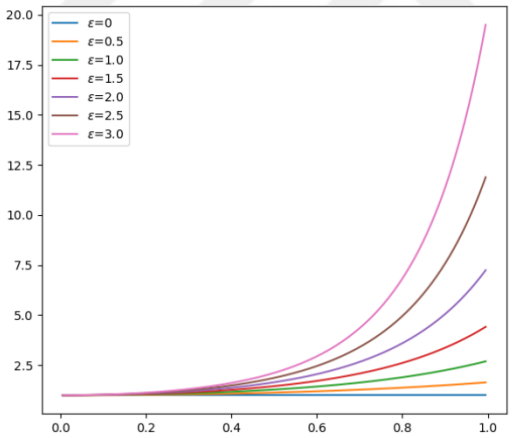
$\Gamma(t) = \pi e^{\varepsilon t^2}$.

Burada

$$\hbar(z,t,v) =$$
$$e^{\varepsilon t^2}\left[(1+\sin 2z)(2\varepsilon+4\varepsilon^2 t^2)+4\varepsilon\sin 2z(2\varepsilon+4\varepsilon^2 t^2)+4\sin 2z\right]-e^{2\varepsilon t^2}(1+\sin 2z).$$

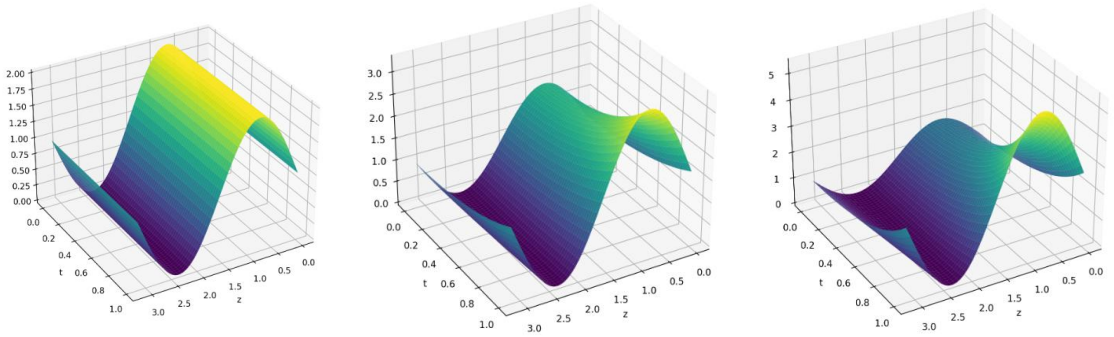
Ters problemin analitik çözümü, $\{a(t), v(z,t)\} = \{e^{\varepsilon t^2}, (1+\sin 2z)e^{\varepsilon t^2}\}$.

Şekil 8.1'de, farklı ε değerleri için ters katsayının zamana bağlı değişimi gösterilmektedir. Belirlenen sayısal örneğe göre, $\varepsilon = 0$ durumunda ters katsayının birim değerde kaldığı ve zamanla herhangi bir değişim göstermediği görülmektedir. Buna karşılık, $\varepsilon \neq 0$ olduğu durumlarda ters katsayının zamanla artış eğilimi sergilediği anlaşılmaktadır. Ayrıca, ε değeri arttıkça ters katsayının büyüme hızının da arttığı gözlemlenmektedir.

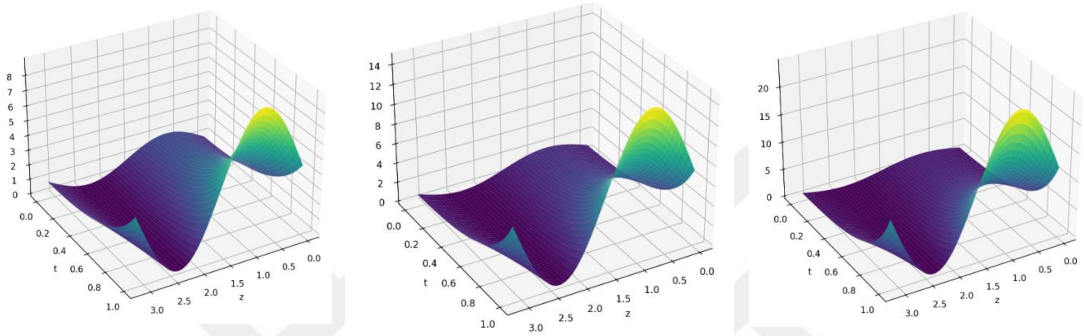


Şekil 8.1. ε değerinin ters katsayı üzerindeki etkisi

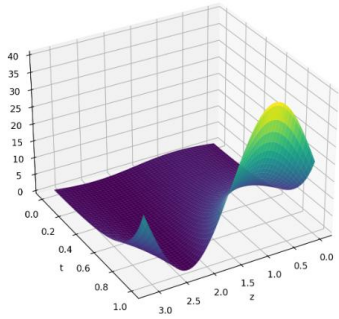
Şekil 8.2'de, farklı ε değerleri için v değerinin üç boyutlu grafikleri sunulmuştur. ε değerleri sırasıyla (a) $\varepsilon = 0$; (b) $\varepsilon = 0,5$; (c) $\varepsilon = 1$; (d) $\varepsilon = 1,5$; (e) $\varepsilon = 2$; (f) $\varepsilon = 2,5$ ve (g) $\varepsilon = 3$ olarak alınmıştır. $\varepsilon = 0$ durumunda v çözümü zamanla değişmezken, ε'nın artmasıyla birlikte çözümün zamana bağlı değiştiği ve özellikle sınır noktalarındaki genliğin arttığı görülmektedir. ε değerinin artışı, dalga benzeri biçimli profilin derinliğinin daha belirgin hâle gelmesine neden olmaktadır.



(a) (b) (c)



(d) (e) (f)



(g)

Şekil 8.2. ε değerinin v çözümü üzerindeki etkisi: (a) $\varepsilon = 0$; (b) $\varepsilon = 0,5$; (c) $\varepsilon = 1$; (d) $\varepsilon = 1,5$; (e) $\varepsilon = 2$; (f) $\varepsilon = 2,5$ ve (g) $\varepsilon = 3$

9.SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, doğrusal olmayan hiperbolik ve pseudo-hiperbolik denklemler için zamana bağlı katsayıların belirlendiği ters problemler, teorik ve sayısal olarak incelenmiştir. Periyodik sınır koşulları altında, Fourier yöntemi kullanılarak ters katsayılı problemlerin analitik çözümleri elde edilmiştir. Ters katsayının belirlenebilmesi amacıyla tanımlanan ek koşul yardımıyla katsayılar bulunmuştur. Ele alınan problemlere ait çözümlerinin varlığı, yakınsaklığı tekliği ve kararlılığı kanıtlanmıştır. Sonlu farklar yöntemi ile yapılan sayısal hesaplamalar, analitik çözümlerle karşılaştırılmış ve kullanılan sonlu fark şemaların analitik çözümlere yakın sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Pseudo-hiperbolik ve hiperbolik denklemlerin çözümleri arasındaki bağlantıları gösterilmiştir.

Gelecekte yapılacak çalışmalarda, ele alınan problemlerin farklı sınır koşulları altında incelenmesi, daha yüksek boyutlu problemlere genişletilmesi ve kesirli mertebeden türevler içeren denklemler için katsayı belirleme çalışmaları yürütülebilir. Ayrıca, sayısal çözümü için sonlu elemanlar yöntemi gibi alternatif sayısal yöntemlerin kullanılması da araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Baglan, I. (2015). Determination of a Coefficient in a Quasilinear Parabolic Equation with Periodic Boundary Condition. *Inverse Problems in Science and Engineering, 23*(5), 884-900. https://doi.org/10.1080/17415977.2014.947479

Bağlan, İ., Yernazar, A., Aslan, E., Budak, H., Vivas-Cortez, M. (2025). Analysis of Inverse Problem for Pseudo-Hyperbolic Equation under Periodic Boundary Condition. *Scientific Reports, 15*(1), 41218. https://doi.org/10.1038/s41598-025-25105-1

Bakushinsky, A. B., Leonov, A. S. (2018). Fast Numerical Method of Solving 3D Coefficient Inverse Problem for Wave Equation with Integral Data. *J. Inverse Ill-Posed Probl., 26*(4), 477–492.

Boumenir, A., Tuan, V. K. (2011). An Inverse Problem for the Wave Equation. *J. Inverse Ill-Posed Probl., 19*(4-5), 573–592.

Brown, J. W., Churchill, R. V. (1993). *Fourier Series and Boundary Value Problems* (5th ed.). New York: McGraw-Hill Education.

Ciftci, I., Halilov, H. (2008). Dependency of the Solution of Quasilinear Pseudoparabolic Equation with Periodic Boundary Condition on ε. *Int. J. Math. Anal., 2*(18), 881-888.

Courant, R., Hilbert, D. (1989). *Methods Of Mathematical Physics.* New York: Wiley-VCH.

Dragomir, S. S. (2003). *Some Gronwall Type Inequalities And Applications.* New York: Nova Science Publishers.

Güngör, F. (2025). *Diferansiyel Denklemler.* İstanbul: İTÜ Vakfı Yayınları.

Hadamard, J. (1902). Sur Les Problèmes Aux Derivées Partielles Et Leur Signification Physique. *Princeton University Bulletin, 13*, 49-52.

Halilov, H., Güler, B. O., Kutlu, K. (2015). Dependency of the Solution of a Class of Quartic Partial Differential Quasilinear Equation with Periodic Boundary Condition on ε. *Gen. Math. Notes, 28*(1), 59-71.

Halilov, H., Hasanoğlu, A., Can, M. (1999). *Yüksek Matematik 1.* İstanbul: Literatür Yayıncılık.

Hasanoğlu, A. (2011). *Kısmi Türevli Denklemler.* İstanbul: Literatür Yayıncılık.

Hill, G. W. (1886). On the Part of the Motion of the Lunar Perigee which is a Function of the Mean Motions of the Sun and Moon. *Acta Mathematica, 8*(1), 1-36.

Huntul, M. J. (2021). Determination of a Time-Dependent Potential in the Higher-Order Pseudo-Hyperbolic Problem. *Inverse Probl. Sci. Eng., 29*(12), 3331-3351.

Huntul, M. J., Tamsir, M., Dhiman, N. (2021). An Inverse Problem of Identifying the Time-Dependent Potential in a Fourth-Order Pseudo-Parabolic Equation from Additional Condition. *Numer. Methods Partial Differ. Equ., 37*(6), 3020-3037.

Hussein, S. O., Lesnic, D. (2015). Determination of Forcing Functions in the Wave Equation. Part II: the Time-Dependent Case. *J. Eng. Math., 96*(1), 135–153.

Isakov, V. (2006). *Inverse Problems for Partial Differential Equations* (2nd ed.). Berlin: Springer-Verlag.

Kabanikhin, S. I. (2009). *Obratnye i Nekorrektnye Zadachi* (2nd ed.). Novosibirsk: Sibirskoe Nauchnoe İzdatel'stvo.

Logan, J. D. (2008). *An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations* (3rd ed.). New York: Wiley.

Mitrinovic, D. S., Pecaric, J., Fink, A. M. (2012). *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives* (Vol. 53). Dordrecht: Springer Science & Business Media.

Musayev, B., Alp, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz.* Kütahya: Balcı Yayınları.

Pachpatte, B. G. (1998). *Inequalities for Differential and Integral Equations.* New York: Academic Press.

Rasulov, M. (2011). *Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Korunum Kuralları.* Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Samarskii, A. A., Vabishchevich, P. N. (2000). *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics.* Berlin: Walter De Gruyter.

Smith, G. D. (1985). *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods* (3rd ed.). Oxford: Oxford University Press.

Stein, E. M., Shakarchi, R. (2003). *Fourier Analysis: an Introduction.* Princeton: Princeton University Press.

Strauss, W. A. (2007). *Partial Differential Equations: an Introduction* (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons.

Strikwerda, J. C. (2004). *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations* (2nd Ed.). Philadelphia: SIAM.

Tekin, I. (2019). Determination of a Time-Dependent Coefficient in a Wave Equation with Unusual Boundary Condition. *Filomat, 33*(9), 2653–2665.

Tikhonov, A. N., Arsenin, V. Y. (1977). *Solutions of Ill-Posed Problems.* Washington: Winston & Sons.

Tikhonov, A. N., Samarskii, A. A. (1963). *Equations of Mathematical Physics.* Oxford: Pergamon Press.

Whitham, G. B. (1974). *Linear and Nonlinear Waves.* New York: Wiley-Interscience.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

Bağlan, İ., **Yernazar, A.** (2025). Well-Posedness Analysis for an Inverse Coefficient Nonlinear Wave Equation, *Natural and Applied Sciences Journal, 8*(2), 13-21. https://doi.org/10.38061/idunas.1800322

Bağlan, İ., **Yernazar, A.**, Aslan, E., Budak, H., Vivas-Cortez, M. (2025). Analysis of Inverse Problem for Pseudo-Hyperbolic Equation under Periodic Boundary Condition, *Scientific Reports, 15*(1), 41218.

Yernazar, A., Aslan, E., Bağlan, İ. (2023). Numerical Investigation of Quasi-linear Hyperbolic Equation with Periodic Boundary Condition, *6.International Conference on Life and Engineering Sciences – ICOLES*, Antalya, Turkey, November 2-5, 2023.

Yernazar, A., Aslan, E., Bağlan, İ. (2023). Solution of Fourier Method for Inverse Coefficient Non-Linear Hyperbolic Equation with Periodic Boundary Condition, *6.International Conference on Life and Engineering Sciences – ICOLES*, Antalya, Turkey, November 2-5, 2023.

Yernazar, A., Aslan, E., Bağlan, İ. (2024). The Dependency of the Analytical and Numerical Solution on the ε Parameter in Hyperbolic and Pseudo-Hyperbolic Problems with Inverse Coefficients, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 73*(4), 1171–1196.

Yernazar, A., Bağlan, İ. (2024). Fourier Analysis of Inverse Coefficient Nonlinear Hyperbolic Equations under Periodic Boundary Conditions, *Natural and Applied Sciences Journal, 7*(2), 1–7. https://doi.org/10.38061/idunas.1590039

Yernazar, A., Bağlan, İ. (2024). Periyodik Sınır Koşullu Lineer Olmayan Hiperbolik Problemin Yakınsaklık Analizi, *ADÜ Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 1*(2), 84–91.

Yernazar, A., Bağlan, İ., Aslan, E. (2024). Analysis of Inverse Coefficient Non-Linear Pseudo-Hyperbolic Equation with Periodic Boundary Condition, *Kocaeli Science Congress*, Kocaeli, Turkey, October 2-4, 2024. https://doi.org/10.5281/zenodo.14288563

Yernazar, A., Bağlan, İ., Aslan, E. (2024). Analytical and Computational Solutions for Nonlinear Hyperbolic Equation with Inverse Coefficient under Periodic Boundary Conditions, *Kocaeli Science Congress*, Kocaeli, Turkey, October 2-4, 2024. https://doi.org/10.5281/zenodo.14288303

Yernazar, A., Bağlan, İ., Aslan, E. (2025). Numerical Investigation of an Inverse Coefficient Problem in a Nonlinear Hyperbolic Equation, *Kocaeli Science Congress,* Kocaeli, Türkiye, November 19-21, 2025. https://doi.org/10.5281/zenodo.18011497

Yernazar, A., Bağlan, İ., Aslan, E. (2025). Numerical Method for Solving Nonlinear Hyperbolic Equation with Unknown Inverse Coefficient under Periodic Constraints, *2nd Kocaeli Science Congress,* Kocaeli, Türkiye, November 19-21, 2025. https://doi.org/10.5281/zenodo.17984960

ÖZGEÇMİŞ

2017 yılında Hoca Ahmet Yesevi Uluslararası Türk-Kazak Üniversitesi Matematik Öğretmenliği Bölümünden lisans, 2019 yılında Matematik ve Bilgisayar Modellemesi Bölümünden yüksek lisans derecesini aldı. 2018–2019 yılları arasında Kazakistan'da Genel Ortaöğretim Okulu No.19'da ortaokul ve lise düzeylerinde matematik öğretmeni olarak görev yaptı; aynı dönemde Kazakistan Ulusal Bilim ve Teknoloji Değerlendirme Merkezi (JSC "NCSTE") tarafından desteklenen araştırma projesinde uzman yardımcısı olarak görev aldı. 2019 yılında Türkiye Bursları kapsamında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda doktora programına başladı.