

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEZGİSEL BULANIK METRİK BENZERİ UZAYLAR
VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

ŞUARA ONBAŞIOĞLU ALTUHOVS

KOCAELİ 2024

**KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**SEZGİSEL BULANIK METRİK BENZERİ UZAYLAR
VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ**

ŞUARA ONBAŞIOĞLU ALTUHOVS

Doç.Dr. Banu PAZAR VAROL
Danışman, Kocaeli Üniversitesi

.....

Prof.Dr. Halis AYGÜN
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniversitesi

.....

Doç.Dr. İzzettin DEMİR
Jüri Üyesi, Düzce Üniversitesi

.....

Tezin Savunulduğu Tarih: 12.06.2024

ETİK BEYAN VE ARAŞTIRMA FONU DESTEĞİ

Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez/proje çalışmada,

- Bu tezin/projenin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu,
- Çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı,
- Bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi,
- Bu çalışmanın Kocaeli Üniversitesi'nin abone olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun olduğunu,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Tezin/Projenin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez/proje çalışması olarak sunmadığımı,

beyan ederim.

☒ Bu tez/proje çalışmasının herhangi bir aşaması hiçbir kurum/kuruluş tarafından maddi/alt yapı desteği ile desteklenmemiştir.

☐ Bu tez/proje çalışması kapsamında üretilen veri ve bilgiler tarafından no'lu proje kapsamında maddi/alt yapı desteği alınarak gerçekleştirilmiştir.

Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Şuara ONBAŞIOĞLU ALTUHOVS

YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI

Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/projemin tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda belirtilen koşullarla kullanıma açma izninin Kocaeli Üniversitesine verdiğimi beyan ederim. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin/projemin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanımı bana ait olacaktır.

Tezin/projenin kendi özgün çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin/projenin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim kurulu tarafından yayınlanan “**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge**” kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricinde YÖK Ulusal Tez Merkezi/ Kocaeli Üniversitesi Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

- ☐ Enstitü yönetim kurulu kararı ile tezimin/projemin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 2 yıl ertelenmiştir.
- ☐ Enstitü yönetim kurulu gerekçeli kararı ile tezimin/projemin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 6 ay ertelenmiştir.
- ☒ Tezim/projem ile ilgili gizlilik kararı verilmemiştir.

Şuara ONBAŞIOĞLU ALTUHOVS

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında, sezgisel bulanık metrik benzeri uzaylar ve sabit nokta teoremleri tanımlanmış olup bu uzaylarda yakınsaklık ve tamlık gibi temel özellikler incelenmiştir. Elde edilen bu yeni yapı üzerinde Banach sabit nokta teoreminin sonuçları sunulmuş ve (Alfa, Beta) daralma dönüşümü tanımlanmıştır.

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana gösterdiği destek ve yönlendirmeler ile beni her zaman cesaretlendiren, çağdaş, yenilikçi ve disiplinli çalışma prensipleri ile benim için gerçek bir örnek olan, hem akademik hem de etik değerleri ile çok şey öğrendiğim saygıdeğer danışmanım Doç. Dr. Banu PAZAR VAROL'a sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Bu tezin konusuyla ilgili olarak Letonya Üniversitesinde stajyer öğrenci olarak birlikte araştırma yapma fırsatına sahip olduğum, deneyim ve tecrübeleri ile akademik çalışmalarına sağladığı katkının yanı sıra gösterdiği nezaket ve samimiyet için sayın Prof. Dr. Alexander SHOSTAK'a teşekkür ederim.

Hayatım boyunca her zaman benden desteğini hiç esirgemeyen, bana cesaret ve güç veren, en zor ve en güzel anlarımda her zaman yanımda olan sevgili ailem; annem, babam ve kardeşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Haziran-2024

Şuara ONBAŞIOĞLU ALTUHOVS

İÇİNDEKİLER

ETİK BEYAN VE ARAŞTIRMA FONU DESTEĞİ.....	i
YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
TABLolar DİZİNİ.....	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x
1.GİRİŞ.....	1
2.TEMEL KAVRAMLAR	8
2.1.Üçgensel Norm ve Conorm	8
2.2.Bulanık Kümeler ve Sezgisel Bulanık Kümeler.....	10
2.3.Bulanık Metrik Uzaylar	12
2.4.Sezgisel Bulanık Metrik Uzaylar.....	16
2.5.Sezgisel Bulanık Metrik Uzaylarda Yakınsaklık.....	20
3.METRİK BENZERİ UZAYLAR.....	23
4.BULANIK METRİK BENZERİ UZAYLAR VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ.....	35
5.SEZGİSEL BULANIK METRİK BENZERİ UZAYLAR	40
5.1.Sezgisel Bulanık Metrik Benzeri Uzaylar	40
5.2.Sezgisel Bulanık Metrik Benzeri Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri.....	53
5.3.Sezgisel Bulanık Metrik Benzeri Uzaylarda (α, β) -Daralma Dönüşümü.....	67
5.4.Tam Sezgisel Bulanık Metrik Benzeri Uzaylar ve Sabit Nokta Teoremleri.....	73
6.SONUÇLAR VE ÖNERİLER	85
KAYNAKLAR.....	88
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER.....	92
ÖZGEÇMİŞ.....	93

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.	μ_B fonksiyonunun ve B bulanık kümesinin grafiği	11
Şekil 2.2.	μ_B, ν_B fonksiyonları ve B sezgisel bulanık kümesinin grafiği.....	12
Şekil 2.3.	$y \in [-1,1]$ değerleri için F_d ve G_d bulanık kümeleri	19
Şekil 2.4.	$y \in [-10,10]$ değerleri için F_d ve G_d bulanık kümeleri.....	20
Şekil 4.1.	$t = 2$ için F bulanık kümesi	37
Şekil 5.1.	$y \in [-10,1]$ noktaları için F ve G fonksiyonlarının davranışları.....	46
Şekil 5.2.	$y \in [-10,10]$ için F ve G fonksiyonlarının davranışları.....	46
Şekil 5.3.	$t = 2$ için $F(x, y, 2)$ ve $G(x, y, 2)$ 'nin grafiği	48
Şekil 5.4.	$t = 2$ için $F(x, x, 2)$ 'nin grafiği.....	48
Şekil 5.5.	$t = 2$ için $G(x, x, 2)$ 'nin grafiği	48
Şekil 5.6.	BMU'da kavramlar arası ilişkiler	76
Şekil 5.7.	BMBU'da kavramlar arası ilişkiler	77
Şekil 5.8.	BMU ve BMBU için kavramlar arası ilişkiler	77
Şekil 5.9.	SBMU ve SBMBU için kavramlar arası ilişkiler	78
Şekil 6.1.	Kavramlar arası ilişkiler	87

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 5.1. BMU’da Cauchy dizisi ve tamlık tanımları	76
Tablo 5.2. BMBU’da Cauchy dizisi ve tamlık tanımları.....	77



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\subset$	: Alt küme
$\cap (\cup)$	: Arakesit (Birleşim)
μ_B	: B bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu
χ_B	: B klasik kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\chi_{\mathbb{R}}$	: B klasik kümesinin karakteristik fonksiyonu
$+$ ($-$)	: Bilinen toplama (çıkarma) işlemi
$\emptyset$	: Boş küme
F, G, M	: Bulanık kümeler
$\geq$ ($\leq$)	: Büyük veya eşit (Küçük veya eşit)
$>$ ($<$)	: Büyüktür (Küçüktür)
T	: Daralma dönüşümü
λ	: Daralma sabiti
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\in$ ($\notin$)	: Eleman (Elemanı değil)
$=$ ($\neq$)	: Eşit (Eşit değil)
$\forall$	: Evrensel niceleyici, her
$\mathcal{T}_{(F,G)}$	: F ve G bulanık kümeleri ile elde edilen topoloji
α, β, g, h	: Fonksiyonlar
$\mathbb{R}$	: Gerçek sayılar kümesi
$\Leftrightarrow$	: Gerek ve yeter koşul (çift yönlü gerektirme)
$\Rightarrow$	: İse bağlacı (tek yönlü gerektirme)
$\times$	: Kartezyen çarpım
φ	: Kısmi metrik
X, B, D, E, S	: Klasik kümeler
$\bar{D}$	: Klasik kümenin kapanışı
d	: Klasik metrik fonksiyonu
$B(x, \xi)$	: Klasik metrik fonksiyonu ile elde edilen açık top
F_d, G_d	: Klasik metrik fonksiyonu ile elde edilen bulanık fonksiyonlar
σ	: Metrik benzeri dönüşüm
$B_\sigma(x, \xi)$	: Metrik benzeri dönüşüm ile elde edilen açık top
$\mathcal{T}_\sigma$	: Metrik benzeri dönüşüm ile elde edilen topoloji
$\subseteq$	: Öz alt küme
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif tam sayılar kümesi
d_s	: S klasik kümesi üzerindeki d klasik metriği
S^m	: S klasik sonlu diziler kümesi
S^w	: S klasik sonsuz diziler kümesi
∞	: Sonsuz
Δ	: t-conorm
$*$	: t-norm
$\exists$	: Varlıksal niceleyici, en az bir
$\rightarrow$	: Yakınsaklık (yaklaşım) gösterimi
$\mu_B(x)$	: $x \in X$ 'in B kümesine üye olma derecesi
$\nu_B(x)$	: $x \in X$ 'in B kümesine üye olmama derecesi
$\mathfrak{B}$	: α, β fonksiyonlarının ailesi

Kısaltmalar

BM	: Bulanık Metrik
BMBU	: Bulanık Metrik Benzeri Uzay
BMU	: Bulanık Metrik Uzay
Inf	: Infimum (En büyük alt sınır)
Lim	: Limit
Maks	: Maksimum
Min	: Minimum
SB	: Sezgisel Bulanık
SBM	: Sezgisel Bulanık Metrik
SBMBU	: Sezgisel Bulanık Metrik Benzeri Uzay
SBMU	: Sezgisel Bulanık Metrik Uzay
Sup	: Supremum (En küçük üst sınır)



SEZGİSEL BULANIK METRİK BENZERİ UZAYLAR VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

ÖZET

Altı bölümden oluşan bu tez, sezgisel bulanık metrik benzeri uzayları tanıtmayı ve elde edilen yeni sonuçları sunmayı amaçlamaktadır.

Giriş bölümünde tez boyunca kullanılan metrik türleri, bulanık mantığın tarihsel gelişimi, bulanık ve sezgisel bulanık kümeler, sabit nokta teorisi gibi temel kavramlar hakkında bilgilere ve açıklamalara yer verilmiştir.

İkinci bölümde tezin ilerleyen kısımlarında ele alınan kavramlara temel teşkil eden matematiksel tanım, teorem ve özellikler üzerinde durulmuş, çeşitli örneklerle daha iyi anlaşılması hedeflenmiştir.

Üçüncü bölümde Harandi (2012) ile Hosseini ve Fosner (2019) tarafından tanımlanan metrik benzeri uzaylar tanıtılmış ve bu uzayların yapısal özellikleri incelenerek elde edilen yeni sonuçlar sunulmuştur.

Dördüncü bölümde Shukla ve Abbas (2014) tarafından sunulan bulanık metrik benzeri uzaylar kavramı ve sabit nokta teoremleri verilmiştir.

Beşinci bölümde Shukla ve Abbas (2014) tarafından sunulan bulanık metrik benzeri uzayların bir genelleştirilmesi olarak sezgisel bulanık metrik benzeri uzaylar kavramı tanıtılmış ve bu uzaylardaki sabit nokta teoremleri incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar ayrıntılı olarak açıklanmış ve çeşitli örnekler verilmiştir. Ayrıca sezgisel bulanık metrik benzeri uzaylarda (Alfa, Beta) daralma dönüşümü tanımlanmış ve bu yeni yapı içerisinde 1-M Cauchy dizileri ve 1-M tam uzayların özellikleri sunulmuştur. Çeşitli görseller ile kavramlar arası ilişkiler özetlenmiştir.

Sonuç ve öneriler bölümünde çalışmanın ana ifadeleri özetlenmiş ve gelecekteki araştırmalara sağlayabileceği katkılardan bahsedilmiştir. Bu tezde kullanılan tüm bilimsel yayınlar kaynaklar bölümünde listelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: (Alfa, Beta) Daralma Dönüşümü, 1-M Tamlık, Metrik Benzeri Uzaylar, Sabit Nokta Teoremleri, Sezgisel Bulanık Metrik Benzeri Uzaylar.

INTUITIONISTIC FUZZY METRIC LIKE SPACES AND FIXED POINT THEOREMS

ABSTRACT

This thesis consists of six chapters and it is aimed to introduce intuitionistic fuzzy metric like spaces and present the new results obtained.

In the introduction section, there are explanations about some basic concepts which are used throughout the thesis, such as sorts of metrics, the historical development of fuzzy logic, fuzzy and intuitionistic fuzzy sets and fixed point theory based on existing literature sources that are given.

The second section elaborates on the mathematical definitions, theorems, and properties that serve as the foundation for the concepts discussed further in the thesis, aiming for a better understanding through various examples.

The third section introduces metric like spaces established by Harandi (2012) and Hosseini and Fosner (2019) and presents the properties of the structure of these space's new results obtained by examining them.

The fourth section presents the concept of fuzzy metric like spaces and fixed point theorems in these spaces defined by Shukla and Abbas (2014).

In the fifth section, the concept of intuitionistic fuzzy metric like spaces as a generalization of the fuzzy metric like spaces presented by Shukla and Abbas (2014) is introduced, and the fixed point theorems in these spaces are studied. The established results are explained in detail and given examples. Besides, the (Alpha, Beta) contraction mapping in intuitionistic fuzzy metric like spaces is defined and 1-M Cauchy sequences in these new settings and the properties of 1-M complete spaces are presented. The relationships between concepts are summarized with various visuals.

In the results and recommendations section, the main statements of the study are summarized and its contributions to future research are mentioned. All scientific publications used in this thesis are listed in the references section.

Keywords: (Alpha, Beta) Contraction Mapping, 1-M Completeness, Metric Like Spaces, Fixed Point Theorems, Intuitionistic Fuzzy Metric Like Spaces.

1.GİRİŞ

Metrik kavramı matematikte oldukça önemli bir yere sahiptir. Klasik kümeler üzerinde tanımlanan metrik fonksiyonu ile elde edilen metrik uzaylar, analizde bilinen birçok önemli özelliğin herhangi bir uzaya nasıl aktarılacağı konusunda yol gösterici olmuştur. Matematiğin önemli bir alt dalı olan topoloji içerisinde de pek çok önemli tanım ve teorem metrik uzaylardan elde edilmiştir. Somut bir anlatım ile metrik fonksiyonu günlük hayatta iki nesne veya herhangi iki nokta arasındaki uzaklığı ölçmeyi sağlayan bir ölçü aracı olarak düşünülebilir. Matematiksel olarak ise boştan farklı herhangi bir küme üzerinde tanımlanan metrik fonksiyonu, kümeye ait nesnelerin veya noktaların arasındaki uzaklığı ölçmenin soyut bir aracıdır. Burada seçilen kümenin özelliklerine göre üzerinde tanımlanan metriğin kuralının da değişiklik göstermesi beklenir. Bu nedenle herhangi bir küme üzerinde tanımlanan herhangi bir fonksiyon (dönüşüm) bir metriktir ve bir metrik uzay üretir demek doğru bir yaklaşım olmayacaktır. Metrik dönüşümü aksiyomlar adı verilen belirli özellikleri sağladıktan sonra metrik fonksiyonu olabilmekte ve üzerinde tanımlandığı küme ile birlikte matematiksel olarak bir uzay olma özelliği göstermektedir. Bu kısıtlılıklar ve problemlerdeki çeşitlilikler yeni metrik fonksiyonu tanımlarını ve farklı uzay yapılarını da beraberinde getirmiştir. Bu nedenle güncel kaynaklarda pek çok farklı metrik fonksiyonu tanımları mevcuttur. Klasik metrik tanımında yer alan bazı aksiyomların güçlendirilmesi, bazı özelliklerin zayıflatılması veya bazı özelliklere yeni koşulların eklenmesi gibi çeşitli modifikasyonlar yapılarak yeni metrik tanımları ve üzerinde tanımlandığı kümeye bağımlı olarak yeni yapılar elde edilmiştir. Bu gelişmeler hem matematik hem de uygulamalı bilimlerde problemlere farklı çözüm yaklaşımları sunmuş ve aynı zamanda yeni soruları da beraberinde getirerek yeni çalışma alanlarının doğmasına destekleyici etkiler yapmıştır. Örneğin klasik metrik tanımında yer alan üçgen eşitsizliğinin esnetilmesi ile elde edilen b-metrik uzaylar (quasimetrik uzaylar) Bakhtin (1989) ve Czerwik (1993) tarafından literatüre kazandırılmıştır. Benzer şekilde bir noktanın kendisine uzaklığının sıfır olmayabileceği özel bir dönüşüm olan kısmi metrik Mathews (1994), kısmi metrik uzaylar tanımına negatif mesafenin eklenmesi ile elde edilen dualistik kısmi metrik uzaylar da O'Neill (1996) tarafından yapılmış olan metrik uzayların kaynaklarda yer alan farklı genelleştirmeleridir.

Klasik kümeler üzerindeki metrik çalışmaları halen önemini ve varlığını sürdürürken, her daim gelişmeye devam eden matematik bilimi içerisinde matematiğin önemli bir alt dalı olan mantık kavramı da matematikçiler tarafından çalışılmaya ve ilgi görmeye devam etmiştir. George Boole (1847) yayınlamış olduğu ‘Matematiksel Analiz Mantığı’ adlı eserinde modern anlamda genel bir mantık sistemi geliştirerek, önermeler mantığının temellerini atmış ve eserinde mantıksal operatörleri kullanarak matematiksel mantığı sembolik bir şekilde ifade etmeye çalışmıştır. Boole’un eseri, Aristoteles’in felsefe ve mantık alanında referans kabul edilen ikili mantık sistemini, matematiksel anlamda kullanışlı hale getiren önemli bir çalışma olmuş ve gelecek çalışmalara bir zemin hazırlamıştır. Ayrıca Boole dijital mantık devrelerinin ve bilgisayar algoritmalarının temelini oluşturan matematiksel mantık sistemi ile yalnızca matematiğe değil bilgisayar bilimlerine de katkı sağlamıştır. Zaman içerisinde mantık alanındaki problemler çeşitlendikçe, Aristoteles ve Boole’un sunduğu önermelerin kesin olarak doğru veya yanlış olduğunu varsayan yaklaşım bazı problemlere uygun çözüm arayışında eksik kalmıştır. Bu durum mantık alanında yeni bir yaklaşıma ihtiyaç duyulduğunun göstergesi olmuş ve ikili mantık sistemine bir alternatif aranmaya başlanmıştır. Jan Łukasiewicz klasik Aristoteles mantığındaki ikili mantıksal sisteme ek olarak üçüncü bir değer eklenmesini ve bu değerlerin önermelerin "doğru", "yanlış" ve "belirsizlik" (veya "bulanıklık") olasılıklarını temsil edeceğini iddia ederek üç değerli bir mantık sistemi önermiştir. Daha sonraları birçok araştırmacı üç değerli mantık sistemi üzerinde çalışmıştır (Yüksel, 2006). Ancak bu üç değerli yöntemler de yetersiz kalmıştır.

Modern anlamda çok değerli mantık, bulanık mantık veya puslu mantık kuramı ise ilk kez Azerbaycanlı bilim insanı Lütüfî Zadeh (1965) tarafından ‘Fuzzy Sets’ adlı makalede tanımlanmış ve bu çalışması ile Zadeh bulanık mantık ve dolayısıyla bulanık küme teorisinin de öncüsü olmuştur. Zadeh, önermelerin kesin doğru (totoloji) veya kesin yanlış (çelişki) olarak nitelendirilmesi yerine, önermeleri $[0,1]$ aralığında derecelendiren ve önermelere doğruluk derecesi ile yaklaşan çok değerli mantık sistemini literatüre kazandırmıştır. Bu yaklaşım ile matematiksel olarak bir elemanın bir kümenin elemanı olması veya olmaması yani ‘kesinlik’ durumu yerini elemanın ait olma derecesine bırakmış ve böylece kümeler de bulanık olarak tanımlanmıştır. Bu nedenle bulanık mantığın literatürde kabul gören bilimsel adı ‘çoklu değerlilik’ olmuştur (Kosko, 1993).

Çok değerli yaklaşımın dilsel ifadeleri veya matematiksel belirsizlikleri modelleyebilmek için esnek bir araç sunduğu görülmektedir. Örneğin, günlük yaşamda deniz suyu sıcaklığının uygun ölçüm aletleriyle ölçülemediği bir senaryoda denize giren kişiler için deniz suyu sıcaklığı soğuk/ılık/sıcak/çok sıcak vb. olarak nitelendirilebilmektedir. Fakat bu ifadeler kişisel görüşleri bildirdiğinden matematiksel olarak klasik mantıkta bir önerme değeri taşımamaktadırlar. Ancak bulanık mantıkta bir önerme olabilmekte ve dereceli doğruluk değerleri alabilmektedirler. Dolayısıyla bu yaklaşım Boole'un ve Jan Łukasiewicz'in mantıksal çıkarımını geliştirmiş ve yeni çalışma alanlarının doğmasına da öncülük etmiştir.

Hem matematikçi hem bilgisayar bilimci olan Zadeh'nin bulanık mantık yaklaşımı sayesinde bilgisayar algoritmalarının insan düşünce sistemine daha yakın, insanı daha iyi taklit edebilen, matematiksel olarak formüle edilebilir modeller üretebileceği ortaya konmuştur. Nitekim gelişen teknoloji ile birlikte teoremin uygulamalarda tutarlı sonuçlar elde etmeye olanak sağladığı, bulanık mantık ile her mantıksal sistemin bulanık olarak ifade edilebileceği, bulanık çıkarımın dilsel ifadeler arasında tanımlanan kurallar ile yapılabileceği görülmüştür. Hızla gelişen bilim ve teknoloji içerisinde bulanık mantık yaklaşımı, yapay zekâ ve akıllı sistemlerin geliştirilmesinde de insan düşünce sistemine benzerliği sebebi ile tercih edilmektedir. Örneğin Alroshan ve diğ., (2022), sürücüsüz araçlarda ortaya çıkan önemli sorunlardan birinin sanal güvenlik sorunu olduğunu ve bu soruna çeşitli bulanık yaklaşımlar ile çözüm getirilebileceğini göstermiş, belirsizlik içeren problemlere uygun çözümü sunan bulanık mantık ile sürücüsüz araçların doğabilecek güvenlik açıklarının giderilebileceğini göstermiştir.

Matematik içerisinde ise bulanık küme ve topoloji kavramı Chang'ın (1968) klasik topoloji aksiyomlarını kullanarak bulanık topolojiyi tanımlaması ile literatüre girmiş, Lowen (1976) tarafında geliştirilmiştir. Daha sonra Shostak (1985) bulanık kümelerin açıklığının derecelendirildiği bulanık topoloji kavramını vermiş ve Ying (1991) klasik kümelerin açıklığının derecelendirildiği klasik topolojik uzaylarda mevcut bazı kavramları bulanıklaştırılmış topolojik uzaylara taşımıştır.

Bulanık mantık ve bulanık küme teorisi üzerine inşa edilen çalışmalar gelişmeye devam ederken, Krassimir T. Atanassov (1986) bulanık küme teorisine yeni bir boyut kazandıran sezgisel bulanık küme kavramını sunmuştur. Bu yaklaşım ile bir kümenin

elemanlarının $[0,1]$ içerisindeki elemanı olma (kabul) derecesine yine $[0,1]$ içinde elemanı olmama (ret) derecesi de eklenmiştir. Klasik kümelerde bir elemanın kümenin elemanı olması veya olmaması ile karşılaştırıldığında bulanık küme teorisinin içerdiği elemanı olma durumunu derecelendirmesi yani bulanıklaştırma ve sezgisellik, belirsizlik içeren durumları modellemede daha elverişli olduğunu ortaya koymaktadır. Bulanık küme teorisi ile karşılaştırıldığında ise sezgisel bulanık kümelerin elemanı olmama derecesini de içermesi yani iki belirsizlik değerini de barındırıyor olması, sezgisel bulanık küme kuramının belirsizlik içeren durumları modellemede daha elverişli olduğunu ortaya koymakta ve bulanık küme kuramını başarılı bir şekilde genelleştirmektedir. Bu nedenle sezgisel küme kuramı da belirsizlik içeren problemlerin çözümünde geniş bir uygulama alanı edinmiştir.

Mantık ve kümeler üzerindeki çalışmalar gelişmeye devam ettikçe, bu yeni tanımlanmış kümelerin nesneleri arasındaki mesafeyi ölçmek için uygun metrik tanımlarına ihtiyaç duyulmuştur. Dolayısıyla klasik kümeler üzerindeki metrik fonksiyonu kullanılarak bulanık kümeler ve sezgisel bulanık kümeler üzerinde farklı şekillerde metrikler tanımlanmış ve bu kümeler üzerinde farklı metrik uzaylar elde edilmiştir. Ancak bulanık metrik uzaylar ve sezgisel bulanık metrik uzaylardaki metrik yapısı klasik metrik yapısından farklı olmuştur. Bulanık metrik uzaylar ilk defa Kramosil ve Michálek (1975) tarafından tanımlanmış ve bu uzaylara Kramosil ve Michálek anlamında bulanık metrik uzaylar denilmiştir. Daha sonraları bu tanım George ve Veeramani (1994) tarafından sürekli t-normlar (üçgensel normlar) yardımıyla modifiye edilmiş ve George ve Veeramani anlamında bulanık metrik uzay tanımı da literatürde yerini almıştır. Gregori ve diğ., (2000) her iki tanımda da boştan farklı bir küme üzerinde verilen bulanık metrik yapısı ile metriklenebilir topolojinin elde edilebildiğini göstermiştir. Bulanık metrik uzaylar üzerindeki çalışmalar halen devam etmektedir. Örneğin yakın zamanda güçlü bulanık metrik uzay ve kelime kombinatoriğine ilişkin uygulaması Bets ve Shostak (2022) tarafından, t-conorm tabanlı bulanık (pseudo) metrik uzaylar ise Grigorenko ve diğ., (2020) tarafından literatüre kazandırılmıştır.

Sezgisel bulanık küme fikriyle, George ve Veeramani anlamında sezgisel bulanık metrik uzay tanımı ise Park (2004) tarafından literatüre kazandırılmıştır. Saadati ve diğ., (2008) sezgisel bulanık metrik uzay kavramını modifiye etmiş ve sezgisel bulanık

metrik uzayların yeni bir notasyonunu sunmuştur. Bu alandaki gelişmelerde devam etmekte ve sezgisel bulanık metrik uzaylar hem teoride hem de uygulamada popülerliğini korumaktadır. Örneğin Pazar Varol ve Aygün (2012) sezgisel bulanık metrik grupları ve Pazar Varol (2022) sezgisel bulanık metrik uzaylar üzerinde istatistiksel yakınsaklık kavramını literatüre kazandırmıştır. Sezgisel bulanık yapı içerisinde 2-Metrik uzaylar incelemesi Güner ve diğ., (2018) tarafından yapılmış ve sezgisel bulanık metrik uzaylar üzerine birçok yazar çeşitli çalışmalar yapmıştır. (Alaca ve diğ., (2006); Türkoğlu ve diğ., (2006); Sintunavarat ve Kumam (2012); Azam ve Kanwal (2022)).

Bilimin birçok alanı içerisinde uygulamaya sahip olan sabit nokta teorisi alanındaki çalışmalar ise ilk kez Stefan Banach (1922) tarafından Banach daralma (büzülme) dönüşümü prensibi ile atılmıştır. Tam metrik uzaylar yani yakınsak her dizinin limit noktasını içeren uzaylar üzerine çalışılan Banach sabit nokta teorisi, yakınsanan noktanın sabit nokta olduğunu gösterilmesi mantığına dayanmaktadır. Matematiksel gösterim ile bir T dönüşümü için $Tx = x$ şeklindeki problemlerin çözümünün araştırılmasıdır. Burada tanımlanan dönüşüm için farklı dönüşüm kuralları belirlenmesi, sabit nokta hakkında yorumlar geliştirilmesine ve bu ise farklı çalışma alanlarına doğmasına neden olmuştur. Banach'ın sabit nokta teorisi ise bir tam metrik uzay üzerinde tanımlanan öz dönüşümde, görüntüler arasındaki mesafesinin noktaların arasındaki mesafesinin bir pozitif h katından küçük veya eşit olması prensibine dayanmaktadır. Böylece Banach sabit nokta teoremi ile genel olarak eğer bir tam metrik uzay üzerinde bir daralma dönüşümü var ise bu daralma dönüşümünün sabit noktası biricik olduğu yani sabit noktanın yalnızca varlığı değil tekliği de garanti edilmiş olmaktadır.

Bulanık matematik içerisinde Grabiec (1988) bulanık metrik uzaylarda Banach daralma dönüşümünün bulanık versiyonunu ve sabit nokta teorisini sunmuştur. George ve Veeramani anlamında tam bulanık metrik uzaylar için sabit nokta teoremleri ve Kramosil ve Michalek anlamında bulanık metrik uzay için sabit nokta teoremleri de Gregori ve Sepana (2002) tarafından sunulmuştur. Rafi ve Noorani (2006) sezgisel bulanık metrik uzaylarda bulanık daralma dönüşümü ve sabit nokta teoremini sunmuşlardır. Hem bulanık metrik uzaylarda hem de sezgisel bulanık metrik uzaylar da

klasik bir metrik fonksiyonu kullanılarak bu yapıların elde edilebileceği görülmüştür. Klasik metrik uzayların ve bulanık metrik uzayların bir genellemesi olan sezgisel bulanık metrik uzaylar üzerinde birçok farklı daralma dönüşümü tanımlanmıştır. Priskillal ve Thangavelu (2017) ise sezgisel bulanık metrik uzaylarda (ψ, η) -daralma dönüşümünü tanımlamıştır.

Harandi (2012) metrik benzeri uzayları literatüre kazandırarak klasik metrik ve Matthews (1994) tarafından literatüre kazandırılan kısmi metrik uzayları genelleştirmiş ve böyle uzaylarda daralma dönüşümü için sabit nokta teorisinin sonuçlarını sunmuştur. Shukla ve Abbas (2014) ise metrik benzeri dönüşüm ve bulanık metrik yapılarını birleştirerek bulanık metrik benzeri uzayları tanıtmış ve bulanık metrik benzeri uzaylarda sabit nokta teoremlerinin sonuçlarını sunmuştur. Daha sonraları metrik benzeri dönüşüm üzerine Shukla ve Rai (2023) , Shukla ve Nashine (2016) , Shukla ve diğ., (2013) kapsamlı araştırmalar yapmış ve alana önemli katkılar sağlamıştır.

Tirado (2012) mevcut literatürde bulanık metrik uzaylarda Cauchy dizileri ve tamlık için Grabiec anlamında G -Cauchy ve G -tamlık, George ve Veeramani anlamında M -Cauchy ve M -tamlık olmak üzere iki farklı tanımlı sunmuştur. George ve Veeramani anlamındaki M -tamlık tanımının Grabiec anlamındaki G -tamlık tanımdan daha genel olduğunu göstermiştir. Bu nedenle Grabiec anlamında tam olan her bulanık metrik uzayın George ve Veeramani anlamında da tam olacağını göstermiştir. Shukla ve Abbas (2014) Grabiec anlamındaki Cauchy dizisi ve tamlık tanımlarını, bulanık metrik benzeri uzaylara genişletmiştir. Ardından, Shukla ve Abbas (2016) hem Grabiec hem de George ve Veeramani anlamında bulanık metrik uzaylarda verilen Cauchy dizisi ve tamlık tanımlarını genişleten ve birleştiren 1-Cauchy dizisi ve 1-tamlık tanımlarını literatüre kazandırmıştır. Ayrıca bulanık metrik benzeri uzaylarda bir önceki sonuçları birleştiren ve genişleten sabit nokta teoreminin sonuçlarını da kanıtlamışlardır.

Bu çalışmada, önce Harandi (2012) ile Hosseini ve Fosner (2019) tarafından tanımlanan metrik benzeri yapının özellikleri sunulmuştur. Herhangi bir noktanın kendisine olan mesafesinin sıfır olmak zorunda olmadığı metrik benzeri uzaylar, klasik metrik uzaylara kıyasla problemlere daha esnek bir yaklaşım olanağı sunmaktadır. Diğer yandan bu durum metrik benzeri uzaylarda, klasik metrik uzaylarda elde edilen dizilerin

yakınsaklığı, Cauchy dizisi ve uzayın tamlığı gibi temel tanımların da değişmesine neden olmuştur. Dolayısıyla klasik metrik uzay yapısından bulanık metrik uzaylara ve sezgisel bulanık metrik uzaylara aktarılan özelliklerinde değişmesi beklenmektedir.

Shukla ve Abbas (2014) metrik benzeri yapıyı bulanık metrik uzaylarda incelemiş ve bulanık metrik benzeri uzaylar ve sabit nokta sonuçlarını sunmuştur. Ardından bu özelliklerin sezgisel bulanık metrik uzaylarda incelenmesi ihtiyacı, bu tezin temel konusunu oluşturmuştur. Çalışmanın hedefi sezgisel bulanık metrik benzeri uzayları tanıtmak, bu uzayların özelliklerini sunmak ve çeşitli örneklerle elde edilen sonuçları detaylı olarak açıklamaktır. Ayrıca sezgisel bulanık metrik benzeri uzaylarda sabit nokta teoremleri içerisinde popüler olan ve uygulamalarda oldukça önemli bir yere sahip olan Banach sabit nokta teoremi ve bulanık daralma dönüşümünün sonuçlarıda araştırılmış ve bu uzaylarda da sabit noktanın varlığı ve tekliği gösterilmiştir. Özel olarak Priskillal ve Thangavelu (2017) tarafından literatüre kazandırılan sezgisel bulanık metrik uzaylarda (ψ, η) -daralma dönüşümünün bir modifikasyonu olarak, sezgisel bulanık metrik benzeri uzaylarda (α, β) -daralma dönüşümü tanımlanmıştır. Bulanık metrik uzaylar içerisinde Grabiec (1988) ve George ve Veeramani (1994) tarafından iki farklı şekilde tanımlanmış olan Cauchy dizisi ve tamlık tanımları, sezgisel bulanık metrik benzeri uzaylarda incelenmiş ve $1 - M$ tamlık kavramı tanıtılarak önceki tanımları birleştiren ve genelleştiren sonuçlar sunulmuştur. Sonuçların, hem Grabiec hem de George ve Veeramani'nin tanımlarının bir genişlemesi olduğu gösterilmiştir.

Sonuç olarak, bu çalışmanın bulanık metrik ve sezgisel bulanık metrik alanındaki araştırmaları ileriye taşıması ve mevcut teoriye yeni bir bakış açısı kazandırması hedeflenmiştir. Özellikle, sezgisel bulanık metrik benzeri uzaylardaki teori ve uygulamaların geliştirilmesinde bir temel sunması ve gelecekteki çalışmalar için ilham kaynağı olması amaçlanmıştır.

2.TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezin devamında kullanılacak olan temel tanımlara ve örneklere yer verilmiştir. Sırasıyla sürekli üçgensel normlar (veya kısaca t-norm ve t-conorm); karakteristik fonksiyon ve üyelik fonksiyonu; bulanık kümeler ve sezgisel bulanık kümeler ile bu kümeler üzerine inşa edilmiş metrik yapılar bu bölümde ele alınan kavramlardır.

2.1.Üçgensel Norm ve Conorm

Tanım 2.1.1: $*$: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ bir ikili işlem olmak üzere,

$$(T1) \forall u, v \in [0,1] \text{ için } u * v = v * u ;$$

$$(T2) \forall u, v, w \in [0,1] \text{ için } u * (v * w) = (u * v) * w ;$$

$$(T3) \forall u, v, w, t \in [0,1] \text{ için } u \leq v \text{ ve } w \leq t \text{ olmak üzere } u * w \leq v * t ;$$

$$(T4) \forall u \in [0,1] \text{ için } u * 1 = u ;$$

$*$ işlemi T1,T2,T3,T4 özellikleri sağlıyorsa $*$ işlemine $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde bir üçgensel norm veya kısaca t-norm denir (Klement ve diğ., (2000)).

Örnek 2.1.2: $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan ikili işlemler bilinen dört temel t-norm örnekleridir.

$$u * v = \min\{u, v\} \quad (\text{Minimum t-norm})$$

$$u * v = uv \quad (\text{Çarpım t-norm})$$

$$u * v = \max\{u + v - 1, 0\} \quad (\text{Lukasiewicz t-norm})$$

$$u * v = \begin{cases} 0 & ; (u, v) \in (0,1) \times (0,1) \\ \min\{u, v\} & ; \text{diğer durum} \end{cases} \quad (\text{Drastic çarpım t-norm})$$

(Klement ve diğ., (2000)).

Uyarı 2.1.3: Tanım 2.1.1'den her $u \in [0,1]$ için $u * 0 = 0 * u = 0$ eşitliğinin sağlandığı görülmektedir (Alghamdi ve diğ., (2012)).

Tanım 2.1.4: $\Delta : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ikili işlem olmak üzere,

$$(S1) \forall u, v \in [0,1] \text{ için } u \Delta v = v \Delta u ;$$

$$(S2) \forall u, v, w \in [0,1] \text{ için } u \Delta (v \Delta w) = (u \Delta v) \Delta w ;$$

$$(S3) \forall u, v, w, t \in [0,1] \text{ için } u \leq v \text{ ve } w \leq t \text{ olmak üzere } u \Delta w \leq v \Delta t ;$$

$$(S4) \forall u \in [0,1] \text{ için } u \Delta 0 = u ;$$

Δ işlemi S1,S2,S3,S4 aksiyomlarını sağlıyorsa Δ işlemine $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde bir üçgensel conorm veya kısaca t-conorm denir (Klement ve diğ., (2000)).

Örnek 2.1.5: $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan ikili işlemler bilinen dört temel t-conorm örnekleridir.

$$u \Delta v = \max\{u, v\} \quad (\text{Maksimum } t\text{-conorm})$$

$$u \Delta v = u + v - uv \quad (\text{İstatistiksel toplam } t\text{-conorm})$$

$$u \Delta v = \min\{u + v, 1\} \quad (\text{Lukasiewicz } t\text{-conorm})$$

$$u \Delta v = \begin{cases} 1 & ; (u, v) \in (0,1) \times (0,1) \\ \max\{u, v\} & ; \text{diğer durum} \end{cases} \quad (\text{Drastic sınırlı toplam } t\text{-conorm})$$

(Klement ve diğ., (2000)).

Uyarı 2.1.6: Tanım 2.1.4'ten her $u \in [0,1]$ için $u \Delta 1 = 1 \Delta u = 1$ eşitliğinin sağlandığı görülmektedir (Alghamdi ve diğ., (2012)).

Uyarı 2.1.7: Bir $\Delta : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ikili işlemi bir t-conormdur ancak ve ancak en az bir t-norm $*$ vardır öyle ki her $(u, v) \in [0,1] \times [0,1]$ için aşağıdaki eşitliklerden en az biri sağlanır.

$$u * v = 1 - [(1 - u) \Delta (1 - v)] \quad (2.1)$$

$$u \Delta v = 1 - [(1 - u) * (1 - v)] \quad (2.2)$$

Uyarı 2.1.7’de verilen Denklem (2.1)’deki t-conorma t-normun duali ve Denklem (2.2)’deki t-norma ise t-conormun duali denir (Klement ve diğ., (2005)).

Not 2.1.8: Tanım 2.1.1 ve Tanım 2.1.4’te verilen t-norm ve t-conorm tanımları sırasıyla bulanık arakesit ve birleşimi karakterize etmek için kullanılan aksiyomatik yapıtaşları olarak bilinmektedir. Bu tanımlar ilk olarak istatistiksel metrik uzaylar çalışması ile Menger tarafından verilmiştir. Daha sonraları sürekli t-norm ve sürekli t-conorm için birçok yazar çeşitli örnekler vermiştir (Park J. H., 2004).

Uyarı 2.1.9: $u_1 > u_2$ olmak üzere her $u_1, u_2 \in (0,1)$ için en az bir $u_3, u_4 \in (0,1)$ vardır öyle ki $u_1 * u_3 \geq u_2$ ve $u_1 \geq u_4 \Delta u_2$ sağlanır. Benzer şekilde her $u_5 \in (0,1)$ için en az bir $u_6, u_7 \in (0,1)$ vardır öyle ki $u_6 * u_6 \geq u_5$ ve $u_7 \Delta u_7 \leq u_5$ sağlanır (Park J. H., 2004).

2.2.Bulanık Kümeler ve Sezgisel Bulanık Kümeler

Tanım 2.2.1: $X \neq \emptyset$ ve $B \subset X$ olmak üzere $\chi_B: X \rightarrow \{0,1\}$,

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in B, \\ 0 & ; x \notin B. \end{cases}$$

fonksiyonuna B kümesinin karakteristik fonksiyonu denir.

Tanım 2.2.2 : $X \neq \emptyset$ bir küme, $B \subset X$ ve $I = [0,1]$ olmak üzere $\mu_B(x): X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu tarafından karakterize edilen

$$B = \{(x, \mu_B(x)) : x \in X, \mu_B(x) \in [0,1]\} \subset X \times I$$

kümesine X ’de bir bulanık küme denir. Burada μ_B ’ye B bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu ve her $x \in X$ için $\mu_B(x) \in I$ değerine de x ’in B ’ye üye olma derecesi denir (Zadeh , 1965).

Not 2.2.3: Tanım 2.2.1 ve Tanım 2.2.2 karşılaştırıldığında görülmektedir ki üyelik fonksiyonu yardımıyla elde edilen bir B bulanık kümesi için $x \in B$ iken $\mu_B(x)$ üyelik fonksiyonu $[0,1]$ aralığında değerler almaktadır. Özel olarak üyelik fonksiyonu $\mu_B(x)$ ’in sadece ‘0’ ve ‘1’ değeri aldığı durumda B kümesine adi veya basit küme denir.

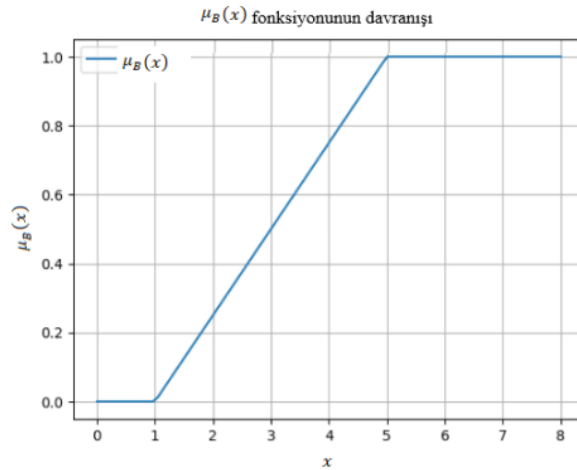
Bulanık küme teorisinde evrensel ve boş küme aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$X = \{(x, \mu_X(x) = 1) | x \in X\}, \quad \emptyset = \{(x, \mu_X(x) = 0) | x \in X\}.$$

Örnek 2.2.4:

$$\mu_B: \mathbb{R} \rightarrow [0,1], \quad \mu_B(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 1 \\ \frac{1}{4}(x-1) & , \quad 1 \leq x \leq 5 \\ 1 & , \quad 5 \leq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $B = \{(x, \mu_B(x)) : x \in \mathbb{R}, \mu_B(x) \in [0,1]\}$ kümesi bir bulanık kümedir. Şekil 2.1.1'de yukarıdaki şekilde tanımlanan μ_B fonksiyonun grafiği verilmiştir. Burada grafik üzerinde seçilen $(x, \mu_B(x))$ sıralı ikilileri ile elde edilen küme B bulanık kümesidir.



Şekil 2.1. μ_B fonksiyonunun ve B bulanık kümesinin grafiği

Tanım 2.2.5: $X \neq \emptyset$ bir küme ve $B \subset X$ olmak üzere her $x \in X$ için $\mu_B: X \rightarrow [0,1]$ ve $\nu_B: X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonları ile elde edilen, sırasıyla üyelik derecesi $\mu_B(x)$ ve üye olmama derecesi $\nu_B(x)$ değeri olan $B = \{(x, \mu_B(x), \nu_B(x)) : x \in X\}$ kümesine bir sezgisel bulanık küme denir (Atanassov, 1986).

Burada her $x \in X$ için $0 \leq \mu_B(x) + \nu_B(x) \leq 1$ sağlanır (Atanassov, 1986).

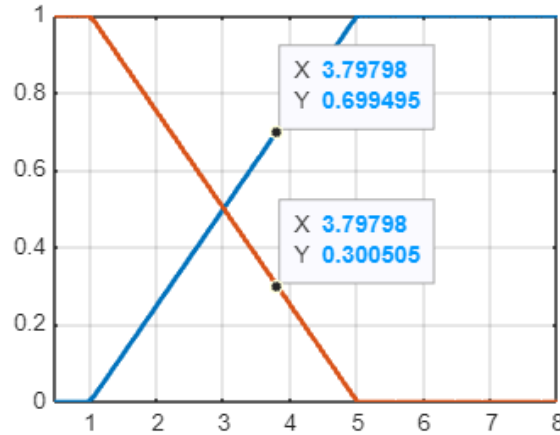
Örnek 2.2.6 : $X \neq \emptyset$ kümesi üzerinde her B bulanık küme,

$B = \{ (x, \mu_B(x), 1 - \nu_B(x)) : x \in X \}$ yazılışı ile bir sezgisel bulanık kümedir (Atanassov, 1986).

Not: 2.2.7: Şekil 2.2.2’de, Örnek 2.2.4’te verilen μ_B üyelik fonksiyonu yardımıyla elde edilen noktaların üyelik dereceleri mavi çizgi ile gösterilmiştir. $0 \leq \mu_B(x) + \nu_B(x) \leq 1$ olduğundan noktaların üye olmama derecelerini belirleyen ν_B üyelik fonksiyonu

$$\nu_B(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{4}(x - 1) & , \quad 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & , \quad 5 \leq x \end{cases}$$

kuralıyla belirlidir. Noktaların üye olmama dereceleri grafik üzerinde kırmızı renkli çizgi ile gösterilmiştir. Sonuç olarak B sezgisel bulanık kümesi sırasıyla elemanın kendisi, üyelik derecesi ve üye olmama derecesi olmak üzere, $(x, \mu_B(x), \nu_B(x))$ sıralı üçlülerinden oluşan kümedir.



Şekil 2.2. μ_B , ν_B fonksiyonları ve B sezgisel bulanık kümesinin grafiği

2.3.Bulanık Metrik Uzaylar

Kramosil ve Michálek (1975) metrik uzayların bir genelleştirmesi olarak olasılıksal metrik uzay kavramını (Schweizer ve Sklar, (1960)) bulanık duruma genelleştirerek bulanık metrik uzayı tanımlamıştır. Ardından George ve Veeramani (1994) sürekli

üçgensel t-normlar yardımıyla bu tanımları modifiye etmiş ve bulanık metrik uzaylarda Hausdorff topolojisini elde etmiştir. Bu kısımda önce Kramosil ve Michálek anlamında bulanık metrik uzaylar ve daha sonra George ve Veeramani anlamında bulanık metrik uzaylar incelenmiştir.

Tanım 2.3.1: $E \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $X \times X \times E$ kümesi üzerinde $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ karakteristik fonksiyonu ile tanımlı B bulanık kümesine, eğer her $x, y \in X$ ve $k, l \in E$ için;

$$(i) \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(x, y, k) = 0, \forall k \leq 0 ;$$

$$(ii) k > 0, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(x, y, k) = 1 \Leftrightarrow x = y ;$$

$$(iii) \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(x, y, \omega) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(y, x, \omega) ;$$

$$(iv) S: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] \text{ ölçülebilir ve ikili fonksiyon, } S(1,1) = 1 \text{ olmak üzere } \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(y, x, k+l) \geq S(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(y, x, k), \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(y, x, l));$$

$$(v) \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(y, x, \omega), \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(y, x, \omega) = 1 \text{ için her } (x, y) \in X \times X \text{ çifti soldan sürekli ve } k \text{ 'nın artan bir fonksiyonu ;}$$

şartları sağlanıyorsa, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ile belirli B bulanık kümesine X kümesi üzerinde bir bulanık metrik denir (Kramosil ve Michálek, (1975)).

Tanım 2.3.2: $(X, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, *)$ bir bulanık metrik uzay ve $\{x_n\} \subset X$ olsun.

i) Her $t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(x_n, x, t) = 1$ ise $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına yakınsaktır denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ olarak gösterilir.

ii) Her $t > 0, p > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(x_{n+p}, x_n, t) = 1$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy (G-Cauchy) dizisi denir (Kramosil ve Michálek, (1975)).

Tanım 2.3.3: $X \neq \emptyset$ bir küme, $*$ sürekli t-norm ve $F, X \times X \times [0, \infty)$ üzerinde bir bulanık küme olsun. F bulanık kümesi her $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ için

$$i) F(x, y, 0) = 0;$$

$$ii) F(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y;$$

$$\text{iii)} F(x, y, t) = F(y, x, t);$$

$$\text{iv)} F(x, y, t) * F(y, z, s) \leq F(x, z, t + s);$$

$$\text{v)} F(x, y, .) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1] \text{ sol s\u00fcrekli} \text{dir,}$$

koşulları sağlanıyorsa $(F, *)$ ikilisine X üzerinde Kramosil ve Michalek anlamında bulanık metrik ve $(X, F, *)$ üçlüsüne de Kramosil ve Michalek anlamında bulanık metrik uzay denir (Kramosil ve Michálek, (1975)).

Tanım 2.3.4: $X \neq \emptyset$ bir küme, $*$ sürekli t-norm ve $F, X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde bir bulanık küme olsun. F bulanık kümesi her $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ için

$$\text{(BM1)} F(x, y, t) > 0;$$

$$\text{(BM2)} F(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y;$$

$$\text{(BM3)} F(x, y, t) = F(y, x, t);$$

$$\text{(BM4)} \forall t, s > 0 \text{ için } F(x, y, t) * F(y, z, s) \leq F(x, z, t + s);$$

$$\text{(BM5)} F(x, y, .) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1] \text{ s\u00fcrekli} \text{dir,}$$

koşullarını sağlıyorsa F 'ye X üzerinde bir bulanık metrik (BM) ve $(X, F, *)$ üçlüsüne de bir bulanık metrik uzay (BMU) denir. Burada $F(x, y, t)$ değeri x ve y 'nin t parametresine göre yakınlık derecesini ifade etmektedir (George ve Veeramani, (1994)).

Örnek 2.3.5 : (X, d) bir klasik metrik uzay ve $u * v = uv$ olsun. Her k, m, n pozitif reel sayısı için $F_d(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x, y)}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir bulanık metriktir (George ve Veeramani, (1994)).

Gerçekten $k, m, n \in \mathbb{R}^+$; $x, y, z \in X$; $t, s > 0$ olmak üzere,

(i) d, X üzerinde klasik metrik olduğundan $d(x, y) \geq 0$ ve $t > 0, k, m, n$ pozitif reel sayılar olduğundan da $F_d(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x, y)} > 0$ olduğu görülür.

$$\text{(ii)} F_d(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow kt^n = kt^n + md(x, y) \Leftrightarrow md(x, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

(iii) d , X üzerinde klasik metrik olduğundan $d(x, y) = d(y, x)$ ' dir.

$$F_d(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x, y)} = \frac{kt^n}{kt^n + md(y, x)} = F_d(y, x, t)$$

(iv) $F_d(x, y, t) * F_d(y, z, s) \leq F_d(x, z, t + s)$ olduğu gösterilmelidir. Açıkça d bir klasik metrik ve $k, m, n \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$\frac{kt^n}{kt^n + md(x, y)} * \frac{ks^n}{kt^n + md(y, z)} \leq \frac{k(t+s)^n}{k(t+s)^n + md(x, z)}$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmelidir.

Üçgen eşitsizliğinden $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ' dir.

$$\frac{k(t+s)^n}{t^n} > 1 \text{ ve } \frac{k(t+s)^n}{s^n} > 1 \text{ olduğundan } m \frac{k(t+s)^n}{t^n} > m \text{ ve } m \frac{k(t+s)^n}{s^n} > m \text{ 'dir.}$$

$$md(x, z) \leq m \frac{k(t+s)^n}{t^n} d(x, y) + m \frac{k(t+s)^n}{s^n} d(y, z)$$

$$\Rightarrow \frac{md(x, z)}{k(t+s)^n} \leq m \frac{d(x, y)}{kt^n} + m \frac{d(y, z)}{ks^n} = \frac{ks^n md(x, y) + kt^n md(y, z)}{k^2 t^n s^n}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{md(x, z)}{k(t+s)^n} \leq 1 + \frac{ks^n md(x, y) + kt^n md(y, z)}{k^2 t^n s^n}$$

$$\Rightarrow \frac{k(t+s)^n + md(x, z)}{k(t+s)^n} \leq \frac{k^2 t^n s^n + ks^n md(x, y) + kt^n md(y, z)}{k^2 t^n s^n}$$

$m > 0$ olduğundan $m^2 d(x, y) d(y, z) \geq 0$ ' dir.

$$\Rightarrow \frac{k(t+s)^n + md(x, z)}{k(t+s)^n} \leq \frac{k^2 t^n s^n + ks^n md(x, y) + kt^n md(y, z)}{k^2 t^n s^n}$$

$$\leq \frac{k^2 t^n s^n + ks^n md(x, y) + kt^n md(y, z) + m^2 d(x, y) d(y, z)}{k^2 t^n s^n}$$

$$\frac{k^2 t^n s^n}{k^2 t^n s^n + ks^n md(x, y) + kt^n md(y, z) + m^2 d(x, y) d(y, z)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{k(t+s)^n}{k(t+s)^n + md(x,z)} \\
&\Rightarrow \frac{kt^n}{kt^n + md(x,y)} \frac{ks^n}{ks^n + md(y,z)} \leq \frac{k(t+s)^n}{k(t+s)^n + md(x,z)} \\
&\Rightarrow F_d(x,y,t) * F_d(y,z,s) \leq F_d(x,z,t+s) \text{ olur.}
\end{aligned}$$

(v) $t_0 > 0$ ve her $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow t_0} F_d(x,y,t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{kt^n}{kt^n + md(x,y)} = \frac{\lim_{t \rightarrow t_0} kt^n}{\lim_{t \rightarrow t_0} kt^n + md(x,y)} \\
&= \frac{kt_0^n}{kt_0^n + md(x,y)} = F_d(x,y,t_0) \text{ olup, } F_d \text{ bir bulanık metriktir.}
\end{aligned}$$

Sonuç 2.3.6: Örnek 2.3.5'te $k = m = n = 1$ alınırsa $F_d(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ elde edilir. F_d bulanık metriğine d metriği tarafından indirgenen standart bulanık metrik denir (George ve Veeramani, (1994)).

Sonuç 2.3.7: Her klasik metrik uzaydan bir BMU elde edilebilir (George ve Veeramani, (1994)).

Tanım 2.3.8: $(X, F, *)$ bir bulanık metrik uzay ve $\{x_n\} \subset X$ olsun.

i) $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına yakınsaktır ancak ve ancak her $t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = 1$ sağlanır.

ii) $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy (M-Cauchy) dizisi denir ancak ve ancak her $\epsilon \in (0,1)$ ve $t > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m, n \geq n_0$ için $F(x_n, x_m, t) > 1 - \epsilon$ sağlanır veya denk olarak her $t > 0$ için $\lim_{n,m \rightarrow \infty} F(x_n, x_m, t) = 1$ sağlanır (Gregori ve diğ., (2024)).

2.4. Sezgisel Bulanık Metrik Uzaylar

Bu bölümde sezgisel bulanık metrik ve sezgisel bulanık metrik uzaylar kavramları incelenecektir.

Tanım 2.4.1: $X \neq \emptyset$ bir küme ve F, G kümeleri $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde tanımlı bulanık kümeler olmak üzere, sürekli t-norm ve t-conorm tanımları ile birlikte her $x, y, z \in X$ ve her $s, t > 0$ için,

$$(SBM1) F(x, y, t) + G(x, y, t) \leq 1;$$

$$(SBM2) F(x, y, t) > 0;$$

$$(SBM3) F(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y;$$

$$(SBM4) F(x, y, t) = F(y, x, t);$$

$$(SBM5) F(x, y, t) * F(y, z, s) \leq F(x, z, t + s);$$

$$(SBM6) F(x, y, .) : (0, \infty) \rightarrow (0, 1] \text{ sürekli};$$

$$(SBM7) G(x, y, t) > 0;$$

$$(SBM8) G(x, y, t) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$(SBM9) G(x, y, t) = G(y, x, t);$$

$$(SBM10) G(x, y, t) \Delta G(y, z, s) \geq G(x, z, t + s);$$

$$(SBM11) G(x, y, .) : (0, \infty) \rightarrow (0, 1] \text{ sürekli};$$

koşullarını sağlayan (F, G) ikilisine X üzerinde bir sezgisel bulanık metrik ve $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisine sezgisel bulanık metrik uzay (SBMU) denir. Burada $F(x, y, t)$ fonksiyonu x ve y 'nin t 'ye göre yakınlık derecesini ve $G(x, y, t)$ fonksiyonu ise x ve y 'nin t 'ye göre yakın olmama derecesini gösterir (Park J. H., 2004).

Uyarı 2.4.2:

- 1) Tanım 2.4.1'de (SBM7) özelliği (SBM1) ve (SBM2)'den elde edilmektedir.
- 2) $(X, F, G, *, \Delta)$ bir sezgisel bulanık metrik uzay ise $(X, F, *)$ bir bulanık metrik uzaydır. Tersine, her $(X, F, *)$ bulanık metrik uzayı t-norm ve t-conorm ilişkili iken, açıkça her $x, y \in X$ için $y \Delta x = 1 - ((1 - y) * (1 - x))$ eşitliği sağlandığında, $(X, F, 1 - F, *, \Delta)$ formunda bir sezgisel bulanık metrik uzaydır (Park J. H., 2004).

Uyarı 2.4.3: Bir $(X, F, G, *, \Delta)$ sezgisel bulanık metrik uzayında $F(x, y, \cdot)$ fonksiyonu azalmayan ve $G(x, y, \cdot)$ fonksiyonu artmayandır (Park J. H., 2004).

Örnek 2.4.4: (X, d) bir klasik metrik uzay ve her $u, v \in [0, 1]$ için sürekli t-norm $u * v = uv$ ve sürekli t-conorm $u \Delta v = \min\{1, u + v\}$ olsun. $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde F_d ve G_d bulanık kümeleri her k, m, n pozitif reel sayısı için,

$$F_d(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x, y)} \text{ ve } G_d(x, y, t) = \frac{d(x, y)}{kt^n + md(x, y)}$$

şeklinde tanımlandığında $(X, F_d, G_d, *, \Delta)$ bir sezgisel bulanık metrik uzaydır. (Park J. H., 2004).

Uyarı 2.4.5: Örnek 2.4.4'te sürekli t-norm $u * v = \min\{u, v\}$ ve sürekli t-conorm $u \Delta v = \max\{u, v\}$ alındığında da bir sezgisel bulanık metrik uzay elde edilir. Böylece (F, G) ikilisi herhangi bir sürekli t-norm ve sürekli t-conorma göre de X üzerinde bir sezgisel bulanık metrik olur. Benzer şekilde Örnek 2.4.4'te $k = m = n = 1$ alındığında $F_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$ ve $G_d(x, y, t) = \frac{d(x, y)}{t + d(x, y)}$ elde edilir ve bu sezgisel bulanık metriğe klasik d metriği tarafından üretilen standart sezgisel bulanık metrik denir (Park J. H., 2004).

Örnek 2.4.6: $X = \mathbb{N}$, sürekli t-norm $u * v = \max\{0, u + v - 1\}$ ve sürekli t-conorm $u \Delta v = u + v - uv$ olsun. $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde F ve G bulanık kümeleri her $t > 0$ ve $x, y \in X$ için,

$$F(x, y, t) = \begin{cases} \frac{x}{y} & , x \leq y; \\ \frac{y}{x} & , y \leq x. \end{cases}$$

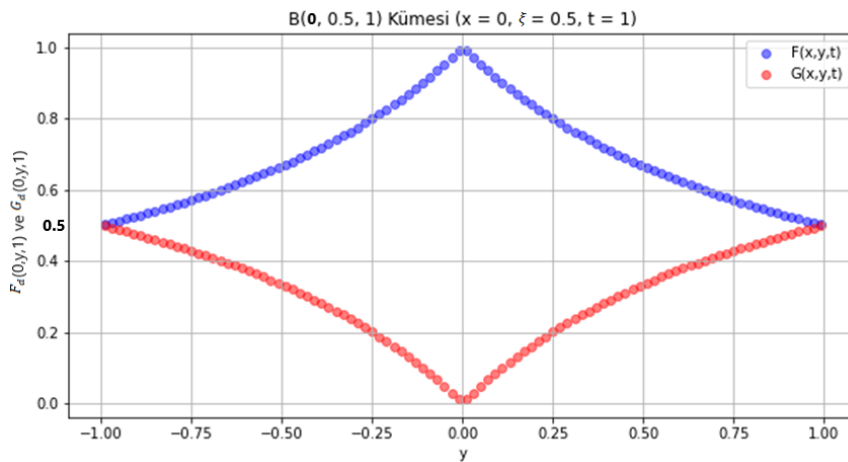
$$G(x, y, t) = \begin{cases} \frac{y-x}{y} & , x \leq y; \\ \frac{x-y}{x} & , y \leq x. \end{cases}$$

şeklinde tanımlandığında $(X, F, G, *, \Delta)$ bir sezgisel bulanık metrik uzaydır (Park J. H., 2004).

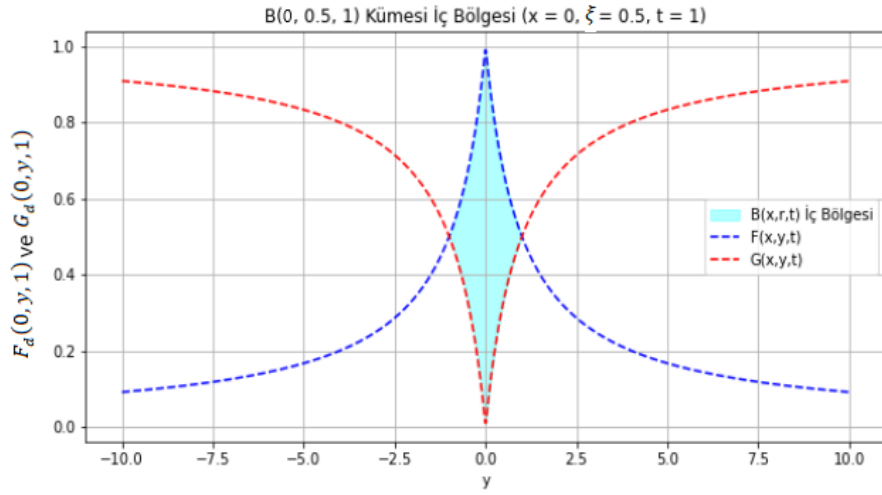
Uyarı 2.4.7: Örnek 2.4.6’da tanımlı sürekli t-norm ve t-conorm ilişkili değildir. Bu durumda X üzerinde, $F(x, y, t)$ ve $G(x, y, t)$ Örnek 2.4.6’daki gibi tanımlı iken $F(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ ve $G(x, y, t) = \frac{d(x,y)}{t+d(x,y)}$ olacak şekilde hiçbir d klasik metriği bulunamaz. Aynı zamanda Örnek 2.4.6’da sürekli t-norm $u * v = \min\{u, v\}$ ve sürekli t-conorm $u \Delta v = \max\{u, v\}$ şeklinde alınırsa (F, G) bulanık kümeleri sezgisel bulanık metrik değildir (Park J. H., 2004).

Tanım 2.4.8: $(X, F, G, *, \Delta)$ bir sezgisel bulanık metrik uzay, $t > 0$, $\xi \in (0, 1)$ ve $x \in X$ olsun. $B(x, \xi, t) = \{y \in X : F(x, y, t) > 1 - \xi, G(x, y, t) < \xi\}$ kümesine $(X, F, G, *, \Delta)$ ’da t ’ye göre x -merkezli ξ -yarıçaplı açık top denir. $\mathcal{T}_{(F,G)} = \{B \subset X : \forall x \in X \text{ için } \exists t > 0 \text{ ve } \xi \in (0, 1) \text{ vardır öyle ki } B(x, \xi, t) \subset B\}$ şeklinde tanımlı küme ailesi X üzerinde bir topolojidir (Park J. H., 2004).

Örnek 2.4.9: $(X, F, G, *, \Delta)$ sezgisel bulanık metrik uzayı Uyarı 2.4.5’te ifade edildiği gibi klasik d metriği tarafından üretilen standart sezgisel bulanık metrik uzay olsun. Burada $X = \mathbb{R}$ üzerinde klasik d metriği $d(x, y) = |x - y|$ ve x, ξ, t değerleri özel olarak $x = 0$; $\xi = 0,5$; $t = 1$ olarak seçildiğinde, t ’ye göre x -merkezli ξ -yarıçaplı açık top $B(0, 0,5, 1)$ olur. $F_d(0, y, 1) > 1 - 0,5$ ve $G_d(0, y, 1) < 0,5$ eşitsizliklerini sağlayan $y \in [-1,1]$ değerleri için F_d ve G_d bulanık kümelerinin davranışları Şekil 2.3’te gösterilmiştir. Eğer burada $y \in [-10,10]$ alınırsa, bu durumda F_d ve G_d bulanık kümelerinin davranışları ile $x = 0$ ’ın $\xi = 0,5$ civarı Şekil 2.4’te gösterilmiştir.



Şekil 2.3. $y \in [-1,1]$ değerleri için F_d ve G_d bulanık kümeleri



Şekil 2.4. $y \in [-10, 10]$ değerleri için F_d ve G_d bulanık kümeleri

2.5. Sezgisel Bulanık Metrik Uzaylarda Yakınsaklık

Bu bölümde sezgisel bulanık metrik uzaylardaki yakınsaklık kavramı tanımlanmıştır.

Tanım 2.5.1: $(X, F, G, *, \Delta)$ bir sezgisel bulanık metrik uzay, $\{x_n\} \subset X$ bir dizi ve $x \in X$ olsun. Her $t > 0$ ve $\xi \in (0, 1)$ için en az bir $n_1 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n \geq n_1$ için $F(x_n, x, t) > 1 - \xi$ ve $G(x_n, x, t) < \xi$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi x 'e yakınsaktır denir ve $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow x$ şeklinde yazılır (Park J. H., 2004).

Teorem 2.5.2: $(X, F, G, *, \Delta)$ bir sezgisel bulanık metrik uzay ve $\mathcal{T}_{(F, G)}$ X üzerinde bulanık metrik tarafından üretilen topoloji olsun. X 'de bir $\{x_n\}$ dizisi $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow x$ ancak ve ancak $F(x_n, x, t) \rightarrow 1$ ve $G(x_n, x, t) \rightarrow 0$ (Park J. H., 2004).

İspat: $t > 0$ sabit ve varsayalım ki $x_n \rightarrow x$ olsun. Bu durumda bir $\xi \in (0, 1)$ için en az bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq n_1$ için $x_0 \in B(x, \xi, t)$ 'dir.

SBMU'da açık top tanımından $1 - F(x_n, x, t) < \xi$ ve $G(x_n, x, t) < \xi$ elde edilir ve buradan $n \rightarrow \infty$ $F(x_n, x, t) \rightarrow 1$ ve $G(x_n, x, t) \rightarrow 0$ bulunur. Tersine, her $t > 0$ için $n \rightarrow \infty$ $F(x_n, x, t) \rightarrow 1$ ve $G(x_n, x, t) \rightarrow 0$ olsun. Buradan en az bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq n_1$ için $1 - F(x_n, x, t) < \xi$ ve $G(x_n, x, t) < \xi$ sağlanır. Buradan her $n \geq n_1$ için $F(x_n, x, t) > 1 - \xi$ ve $G(x_n, x, t) < \xi$ elde edilir. Böylece her $n \geq n_1$ için $x_0 \in B(x, \xi, t)$ olup $x_n \rightarrow x$ 'dir. $\square$

Tanım 2.5.3: $(X, F, G, *, \Delta)$ bir sezgisel bulanık metrik uzay olmak üzere,

i) $\{x_n\}$ dizisi X 'de bir Cauchy dizisidir ancak ve ancak $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall t > 0$ için $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n, m \geq n_1$ için $F(x_n, x_m, t) \rightarrow 1 - \varepsilon$ ve $G(x_n, x_m, t) \rightarrow \varepsilon$ sağlanır.

ii) Eğer her Cauchy dizisi $\mathcal{T}_{(F,G)}$ 'ye göre yakınsak ise $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir tam SBMU'dır (Park J. H., 2004).

Teorem 2.5.4: $(X, F, G, *, \Delta)$ bir sezgisel bulanık metrik uzay ve X 'deki her Cauchy dizisi yakınsak bir alt diziye sahipse bu durumda $(X, F, G, *, \Delta)$ tamdır (Park J. H., 2004).

İspat: $\{x_n\}$, X 'de bir Cauchy dizisi ve $\{x_{n_i}\}$, $\{x_n\}$ dizisinin x 'e yakınsak bir alt dizisi olsun. $x_n \rightarrow x$ olduğu gösterilmelidir. $t > 0$ ve $\varepsilon \in (0,1)$ alınsın. $u \in (0,1)$ seçelim öyle ki $(1 - u) * (1 - u) \geq 1 - \varepsilon$ ve $u \Delta u \leq \varepsilon$ olsun. $\{x_n\}$ dizisi X 'de bir Cauchy dizisi olduğundan bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m, n \geq n_0$ için $F(x_m, x_n, \frac{t}{2}) > 1 - u$ ve $G(x_m, x_n, \frac{t}{2}) < u$ sağlanır. $x_{n_i} \rightarrow x$ olduğundan en az bir $i_p \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $i_p > n_0$ ve $F(x_{i_p}, x, \frac{t}{2}) > 1 - u$ ve $G(x_{i_p}, x, \frac{t}{2}) < u$ dir. Buradan eğer $n \geq n_0$ ise

$$F(x_n, x, t) \geq F(x_n, x_{i_p}, \frac{t}{2}) * F(x_{i_p}, x, \frac{t}{2}) > (1 - u) * (1 - u) \geq 1 - \varepsilon$$

$$G(x_n, x, t) \leq G(x_n, x_{i_p}, \frac{t}{2}) \Delta G(x_{i_p}, x, \frac{t}{2}) < u \Delta u \leq \varepsilon$$

olup, böylece $x_n \rightarrow x$ olduğu görülür. O halde $(X, F, G, *, \Delta)$ bir tam sezgisel bulanık metrik uzaydır. $\square$

Lemma 2.5.5: $\{x_n\}$ dizisi $(X, F, G, *, \Delta)$ sezgisel bulanık metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer $0 < \alpha < 1$ olacak şekilde bir α pozitif sayısı var ve $n = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere $s, u \in [0,1]$ için $s * s \geq s$, $u \Delta u \leq u$ eşitsizliklerini sağlayan sürekli üçgensel t-norm ve t-conorm için,

$$F(x_n, x_{n+1}, t) \geq F(x_0, x_1, \frac{t}{\alpha^n}) \text{ ve } G(x_n, x_{n+1}, t) \leq G(x_0, x_1, \frac{t}{\alpha^n})$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa $\{x_n\}$ dizisi X 'de bir Cauchy dizisidir (Park J. H., 2004).

İspat: Her p için Tanım 2.4.1 (SBM5) ve (SBM10)'dan,

$$F(x_{n+p}, x_n, t) \geq F\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{p}\right) * F\left(x_{n+1}, x_{n+2}, \frac{t}{p}\right) * \dots * F\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, \frac{t}{p}\right)$$

$$\geq F\left(x_0, x_1, \frac{t}{p\alpha^n}\right) * F\left(x_0, x_1, \frac{t}{p\alpha^{n+1}}\right) * \dots * F\left(x_0, x_1, \frac{t}{p\alpha^{n+p-1}}\right)$$

$$G(x_{n+p}, x_n, t) \leq G\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{p}\right) \Delta G\left(x_{n+1}, x_{n+2}, \frac{t}{p}\right) \Delta \dots \Delta G\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, \frac{t}{p}\right)$$

$$\leq G\left(x_0, x_1, \frac{t}{p\alpha^n}\right) \Delta G\left(x_0, x_1, \frac{t}{p\alpha^{n+1}}\right) \Delta \dots \Delta G\left(x_0, x_1, \frac{t}{p\alpha^{n+p-1}}\right)$$

olup, buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} F\left(x_0, x_1, \frac{t}{p\alpha^n}\right) = 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} G\left(x_0, x_1, \frac{t}{p\alpha^n}\right) = 0$

elde edilir. Sürekli t-norm ve sürekli t-conormun özelliğinden,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n+p}, x_n, t) \geq 1 * 1 * \dots * 1 \geq 1 \text{ ve}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_{n+p}, x_n, t) \leq 0 \Delta 0 \Delta \dots \Delta 0 \leq 0 \text{ olduğundan,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n+p}, x_n, t) = 1 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} G(x_{n+p}, x_n, t) = 0 \text{ elde edilir.}$$

Sonuç olarak Tanım 2.4.1 (SBM1)'den, $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir (Park J. H., 2004). $\square$

3.METRİK BENZERİ UZAYLAR

Bu bölümde Matthews (1994) tarafından literatüre kazandırılan kısmi metrik uzayların bir genellemesi olarak Harandi (2012) tarafından tanımlanmış olan metrik benzeri uzaylar tanıtılmış, çeşitli örnekler sunulmuş ve elde edilen bazı yeni sonuçlar gösterilmiştir. Kısmi metrik uzaylar ile metrik benzeri uzaylar arasındaki ilişki nedeniyle ilk olarak kısmi metrik tanımı verilmiştir.

Tanım 3.1: $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\varphi: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

$$(KM1) \ x = y \Leftrightarrow \varphi(x, x) = \varphi(x, y) = \varphi(y, y);$$

$$(KM2) \ \varphi(x, x) \leq \varphi(x, y);$$

$$(KM3) \ \varphi(x, y) = \varphi(y, x);$$

$$(KM4) \ \varphi(x, z) \leq \varphi(x, y) + \varphi(y, z) - \varphi(y, y),$$

özelliklerini sağlıyorsa φ 'ye X üzerinde bir kısmi metrik ve (X, φ) 'ye de kısmi metrik uzay denir (Matthews, 1994).

Tanım 3.2: $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $\sigma: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu eğer aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa σ 'ya X üzerinde bir metrik benzeri dönüşüm denir.

$$(MB1) \ \sigma(x, y) = 0 \Rightarrow x = y;$$

$$(MB2) \ \sigma(x, y) = \sigma(y, x);$$

$$(MB3) \ \sigma(x, z) \leq \sigma(x, y) + \sigma(y, z).$$

(X, σ) ikilisine ise metrik benzeri (MB) (dislocated veya d-metrik) uzay denir (A.Amini-Harandi, 2012).

Uyarı 3.3: Klasik metrik dönüşümü tanımı ile karşılaştırıldığında metrik benzeri dönüşümde (MB1) aksiyomunun tek yönlü olarak sağlandığı görülmektedir. Açıkça burada $x = y$ olduğu durumda $\sigma(x, x) \geq 0$ olabileceği ve dolayısıyla sıfır olmayan öz mesafenin neden önemli olduğunun açıklanması ihtiyacı doğmaktadır. Matthews (1994) kısmi metrik uzaylarda $\varphi(x, x)$ ifadesinin x 'in içerdiği bilgi miktarını ifade eden ağırlık

veya boyutu ifade ettiğini ve $\varphi(x, x)$ ifadesi küçüldükçe x 'in tanımlı olma durumunun arttığını, $\varphi(x, x) = 0$ olduğunda ise x 'in tam olarak tanımlandığını belirtmiştir. Daha sonraları Bukatin ve diğ., (2009) yayınladıkları kısmi metrik uzaylar adlı çalışmada klasik metrik aksiyomu olan $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ifadesinin içerdiği noktanın kesin olarak bilindiğini varsayan yaklaşımın bilgisayar bilimleri içerisinde gerçekçi olmadığını ileri sürmüştür. Matematikte $x = x$ ifadesinin kesinliği tartışmasız iken, bilgisayar bilimleri içerisinde bir ifadenin doğruluğu ile o ifadenin hesaplanabilirliğinin doğru orantılı olduğunu ve dolayısıyla bilgisayar bilimleri alanında öz mesafenin sıfıra eşit olma gerekliliğinin uzaklığı ima etmek zorunda olmadığını öne sürmüşlerdir. Ardından Harandi (2012) her kısmi metrik uzayın bir metrik benzeri uzay olduğunu fakat tersinin her zaman sağlanmak zorunda olmadığı göstermiştir.

Örnek 3.4'te klasik metrik uzayların bilgisayar dilinde ifade edilişi biçimi ve kısmi metrik uzayların ve dolayısıyla metrik benzeri uzayların neden gerekli olduğu açıklanmıştır.

Örnek 3.4: $\mathcal{S}^w$ kümesi $\mathcal{S}$ üzerindeki $x = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ şeklindeki sonsuz dizilerin bir kümesi olsun. Tüm bu şekildeki x ve y dizileri için, en büyük k (muhtemelen ∞) öyle ki her $i < k$ için $x_i = y_i$ olmak üzere, $d_s(x, y) = 2^{-k}$ şeklinde tanımlansın. Dolayısıyla $d_s(x, y)$, 1 bölü 2 üssü hem x hem de y için ortak olan en uzun başlangıç dizisinin uzunluğu olarak tanımlanır. $(\mathcal{S}^w, d_s)$ bir metrik uzaydır. Bilgisayar dilinde bu metrik uzayın nasıl gösterileceği ve sonsuz bir x dizisiyle ilgilenmek için bunun nasıl hesaplanacağı, yani $x_0, x_1, x_2, \dots$ değerlerini (ekrana veya kağıda) yazdıracak bir bilgisayar programının nasıl kodlanacağı bilinmelidir. x sonsuz bir dizi olduğundan değerleri sonlu bir zaman diliminde yazdırılamaz ve bu nedenle bilgisayar bilimciler x dizisinin kendi parçalarından, $\{x_0\}, \{x_0, x_1\}, \{x_0, x_1, x_2\}, \dots$ şeklindeki sonlu dizilerden dizinin nasıl oluştuğu ile ilgilenmektedirler. Her bir x_k değeri basıldıktan veya yazıldıktan sonra sonlu $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ dizisi sonsuz dizinin şu ana kadar üretilen kısmını temsil etmektedir. Dolayısıyla bilgisayar bilimlerinde her sonlu dizi, tamamen hesaplanan sonsuz bir x dizisinin kısmen hesaplanmış bir versiyonu olarak düşünülmektedir. Şimdi d_s 'nin yukarıdaki tanımının $\mathcal{S}$ üzerindeki tüm sonlu dizilerin kümesi olan $\mathcal{S}^m$ 'ye genişletildiği varsayalım. Bu durumda Tanım 3.2'de verilen (MB1), (MB2) ve (MB3) aksiyomları sağlanır. Ancak eğer x sonlu bir dizi ise bu

durumda bir $k < \infty$ için $d_s(x, x) = 2^{-k} \neq 0$ olmaktadır. Çünkü eşitlik durumu yani $x_j = x_j$ ancak x_j tanımlandığında olabilmektedir. Dolayısıyla klasik metrik aksiyomundaki $x = y$ ise $d(x, y) = 0$ ifadesi sonlu diziler için sağlanmadığı görülmektedir. Bu durum klasik metrik uzaylar teorisi ile bilgisayar biliminin çağdaş deneyimi arasında ilgi çekici bir karşılıklık ortaya çıkarmaktadır. Dolayısıyla uygulamalarda faydalı sonuçlar elde edilmesi adına kısmi metrikler üzerine çalışılması gerekli görülmektedir (Bukatin ve diğ., (2009)).

Örnek 3.5: $X = \mathbb{R}$ ve $\sigma: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere her $x, y \in X$ için $\sigma(x, y) = |x| + |y|$ kuralıyla tanımlanan (X, σ) bir metrik benzeri uzaydır (Hussain ve diğ., (2014)).

Örnek 3.6: $X = \mathbb{R}^+$ ve $\sigma: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\sigma(x, y) = \max\{x, y\}$ olmak üzere her $x, y \in X$ için (X, σ) bir metrik benzeri uzaydır (Shukla ve Abbas (2014)).

Örnek 3.7: $X \neq \emptyset$ bir küme ve (X, d) bir klasik metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için $\sigma: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$; $\sigma(x, y) = 1 + d(x, y)$ şeklinde tanımlı σ, X üzerinde bir metrik benzeri dönüşüm olup (X, σ) bir metrik benzeri uzaydır (Hosseini & Fosner, 2019).

Tanım 3.8: $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere x -merkezli ξ -yarıçaplı σ -açık top her $x \in X$, $\xi > 0$ için $B_\sigma(x, \xi) = \{y \in X : |\sigma(x, y) - \sigma(x, x)| < \xi\}$ 'dir (Hosseini & Fosner, 2019).

Not 3.9: Matthews (1994) tarafından literatüre kazandırılan kısmi metrik uzaydaki açık top tanımı $B_\xi(x) = \{y \in X \mid \varphi(x, y) < \xi\}$ şeklinde olup, $\xi = \varphi(x, x) > 0$ alındığında bazı kısmi metrikler için $B_{\varphi(x, x)}(x) = \emptyset$ olmaktadır. Tanım 3.8 ile karşılaştırıldığında metrik benzeri uzaylardaki açık top tanımının farklı olduğu görülmektedir. Bunun nedeni Tanım 3.1 (KM2)'de ifade edilen bir noktanın kendisine olan uzaklığının $0 \leq \varphi(x, x) \leq \varphi(x, y)$ şeklinde ifade edilmiş olmasıdır. Benzer şekilde klasik metrik uzaylar ile metrik benzeri uzaylar karşılaştırıldığında, klasik metrik uzaylardan elde edilen bazı topolojik özelliklerin ve dizilerin yakınsaklığı hakkındaki bilgilerin de metrik benzeri uzaylara taşınmadığı gözlemlenir.

Tanım 3.10: $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere X üzerindeki her σ metrik benzeri dönüşüm, B_σ açık toplar ailesini taban kabul eden $\mathcal{T}_\sigma$ topolojisini üretir (Hosseini & Fosner, 2019).

Uyarı 3.11: (X, σ) ikilisine bir metrik benzeri uzay olmak üzere, bu uzayın noktaları üç farklı şekilde kategorize edilebilir: eşit-benzeri noktalar kümesi, tamamen ayrık noktalar kümesi, eşit benzeri ve tamamen ayrık olmayan noktalar kümesi.

Tanım 3.12: (X, σ) ikilisi bir metrik benzeri uzay ve $x \in X$ olmak üzere eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(x_n, x) = \sigma(x, x)$ ise $\{x_n\} \subset X$ dizisi $x \in X$ 'e yakınsaktır denir (A.Amini-Harandi, 2012).

Tanım 3.13: (X, σ) ikilisi bir metrik benzeri uzay ve $x, y \in X$ olmak üzere eğer $x_n \rightarrow x$ ve $x_n \rightarrow y$ olacak şekilde bir $\{x_n\} \subset X$ ise x ve y noktalarına eşit benzeri noktalar denir (Hosseini & Fosner, 2019).

Teorem 3.14: x ve y noktaları eşit benzeri noktalardır ancak ve ancak her $\xi \in \mathbb{R}^+$ için $B_\sigma(x, \xi) \cap B_\sigma(y, \xi) \neq \emptyset$ dır (Hosseini & Fosner, 2019).

İspat: Varsayalım $x, y \in X$ eşit benzeri noktalar olsun. Bu durumda Tanım 3.13 gereği $x_n \rightarrow x$ ve $x_n \rightarrow y$ olacak şekilde bir $\{x_n\} \subset X$ vardır. Çelişki elde etmek için varsayalım ki en az bir $\xi > 0$ vardır öyle ki $B_\sigma(x, \xi) \cap B_\sigma(y, \xi) = \emptyset$ sağlansın. $x_n \rightarrow x$ ve $x_n \rightarrow y$ olduğundan $\epsilon = \xi$ için $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $n \geq N_1$ için $x_n \in B_\sigma(x, \xi)$ ve $n \geq N_2$ için $x_n \in B_\sigma(y, \xi)$ sağlanır. Eğer $n = \max\{N_1, N_2\}$ seçilirse, $x_n \in B_\sigma(x, \xi) \cap B_\sigma(y, \xi) = \emptyset$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

Tersine, varsayalım ki her $\xi > 0$ için $B_\sigma(x, \xi) \cap B_\sigma(y, \xi) \neq \emptyset$ olsun. $\{x_n\} \subset X$ dizisinin $x_n \rightarrow x$ ve $x_n \rightarrow y$ olacak şekilde farklı iki noktaya yakınsadığı gösterilmelidir. $\xi_n = \frac{1}{n}$ olarak tanımlansın. O halde varsayımdan, herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X$ vardır öyle ki $x_n \in B_\sigma\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap B_\sigma\left(y, \frac{1}{n}\right)$. Gerçel sayıların Arşimet özelliğini sağladığı bilindiğinden, verilen pozitif bir ϵ için bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\frac{1}{N} < \epsilon$. Böylece herhangi bir $n \geq N$ için $x_n \in B_\sigma\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap B_\sigma\left(y, \frac{1}{n}\right) \subseteq B_\sigma\left(x, \frac{1}{N}\right) \cap B_\sigma\left(y, \frac{1}{N}\right) \subseteq B_\sigma(x, \epsilon) \cap B_\sigma(y, \epsilon)$ elde edilir. Bunun anlamı tüm $\epsilon > 0$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $n \geq N$ için $x_n \in B_\sigma(x, \epsilon)$ ve $x_n \in B_\sigma(y, \epsilon)$ olduğudur. O halde $x_n \rightarrow x$ ve $x_n \rightarrow y$ elde edilir. Bu durumda x ve y eşit benzeri noktalardır. $\square$

Tanım 3.15: (X, σ) ikilisi bir metrik benzeri uzay ve $x, y \in X$ olmak üzere eğer x, y noktaları için $\sigma(x, y) > \sigma(x, x) + \sigma(y, y)$ eşitsizliği sağlanıyorsa x ve y noktalarına tamamen ayırık noktalar denir (Hosseini & Fosner, 2019).

Sonuç 3.16: Eğer x ve y noktaları tamamen ayırık noktalar ise bu noktalar eşit benzeri olmayan noktalardır. Teorem 3.14'ün değilinden x ve y noktaları tamamen ayırık noktalardır ancak ve ancak en az bir $\xi \in \mathbb{R}^+$ öyle ki $B_\sigma(x, \xi) \cap B_\sigma(y, \xi) = \emptyset$ olduğu görülür. O halde uzayın tamamen ayırık noktaları için (X, σ) Hausdorff bir uzaydır.

Sonuç 3.17: (X, σ) ikilisi bir metrik benzeri uzay olmak üzere x ve y noktaları tamamen ayırık noktalar ise bu noktaların her ikisine de yakınsayan hiçbir dizi yoktur (Hosseini & Fosner, 2019).

İspat: Varsayalım ki x ve y noktaları tamamen ayırık noktalar olsun. Çelişki elde etmek için $\{x_n\} \subset X$ dizisinin x ve y noktalarının her ikisine de yakınsadığını varsayalım. $d = \sigma(x, y) - \sigma(y, y) - \sigma(x, x)$ olmak üzere $d_1 = \frac{1}{3}d$ olsun. $x_n \rightarrow x$ ve $x_n \rightarrow y$ olduğundan $\epsilon = d_1$ için en az bir $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $n \geq N_1, N_2$ için,

$$|\sigma(x_n, x) - \sigma(x, x)| < d_1 \text{ ve } |\sigma(x_n, y) - \sigma(y, y)| < d_1 \text{ sağlanır.}$$

$N = \max\{N_1, N_2\}$ seçilirse,

$\max\{|\sigma(x_N, x) - \sigma(x, x)|, |\sigma(x_N, y) - \sigma(y, y)|\} < d_1$ elde edilir. Böylece,

$$\sigma(x, y) = |\sigma(x, y)| \leq |\sigma(x, x_N) + \sigma(x_N, y)|$$

$$\leq |\sigma(x, x_N) + \sigma(x_N, y) - \sigma(x, x) + \sigma(x, x) - \sigma(y, y) + \sigma(y, y)|$$

$$\leq |\sigma(x, x_N) - \sigma(x, x)| + |\sigma(x_N, y) - \sigma(y, y)| + \sigma(x, x) + \sigma(y, y)$$

$$< d_1 + d_1 + \sigma(x, x) + \sigma(y, y) = 2d_1 + \sigma(x, x) + \sigma(y, y)$$

$$= \frac{2}{3}(\sigma(x, y) - \sigma(x, x) - \sigma(y, y)) + \sigma(x, x) + \sigma(y, y)$$

$$= \frac{2}{3}\sigma(x, y) + \frac{1}{3}\sigma(x, x) + \frac{1}{3}\sigma(y, y) \text{ olup, bunun anlamı } \sigma(x, x) + \sigma(y, y) > \sigma(x, y)$$

olduğundan çelişki elde edilir. O halde varsayım yanlıştır. $\square$

Not 3.18: $x \in X$ herhangi bir nokta olmak üzere, aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.
 $\sigma(x, y) \geq \frac{1}{2}\sigma(x, x)$ ve $\sigma(x, y) \geq \max \{ \frac{1}{2}\sigma(x, x), \frac{1}{2}\sigma(y, y) \}$ (Hosseini & Fosner, 2019).

Uyarı 3.19: Eşit benzeri noktalar ve tamamen ayrık noktalar arasındaki mantıksal ilişki aşağıdaki şekilde yorumlanmaktadır.

Eşit benzeri noktalardır. $\Rightarrow$ Tamamen ayrık nokta değildir.

Tamamen ayrık noktalardır. $\Rightarrow$ Eşit benzeri nokta değildir.

Lemma 3.20: Eğer x ve y noktaları eşit benzeri noktalar ve y ve z noktaları eşit benzeri noktalar ise o halde x ve z noktaları da eşit benzeri noktalardır.

İspat: Hipotezin sağlandığını varsayalım. Bu durumda Teorem 3.14'ten, her $\epsilon > 0$ için $B_\sigma(x, \epsilon) \cap B_\sigma(y, \epsilon) \neq \emptyset$ ve benzer şekilde, her $\epsilon > 0$ için $B_\sigma(y, \epsilon) \cap B_\sigma(z, \epsilon) \neq \emptyset$ olduğu açıktır.

$\epsilon \in \mathbb{R}^+$ olduğundan, bu durumda $B_\sigma(y, \epsilon) \cap B_\sigma(z, \epsilon) \neq \emptyset$ olup buradan,

$$\Rightarrow (B_\sigma(y, \epsilon) \cap B_\sigma(z, \epsilon)) \cap B_\sigma(x, \epsilon) \neq \emptyset \cap B_\sigma(x, \epsilon) = \emptyset$$

$$\Rightarrow B_\sigma(y, \epsilon) \cap (B_\sigma(z, \epsilon) \cap B_\sigma(x, \epsilon)) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow B_\sigma(y, \epsilon) \neq \emptyset \text{ ve } (B_\sigma(z, \epsilon) \cap B_\sigma(x, \epsilon)) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \text{ için } B_\sigma(z, \epsilon) \cap B_\sigma(x, \epsilon) \neq \emptyset$$

$\Rightarrow x$ ve z noktaları eşit benzeri noktalardır. □

Tanım 3.21: (X, σ) ikilisi bir metrik benzeri uzay ve $D \subset X$ olsun. Bir $x_0 \in X$ elemanı, her $\epsilon > 0$ için en az bir $a \in D$ vardır öyle ki $|\sigma(x_0, a) - \sigma(x_0, x_0)| < \epsilon$ eşitsizliğini sağlıyorsa $x_0 \in X$ 'e D 'nin bir kapanış noktası denir. D 'nin tüm kapanış noktalarının kümesine D 'nin kapanışı denir ve $\bar{D}$ şeklinde yazılır.

$\bar{D} = \{x_0 \in X \mid \forall \epsilon > 0 \exists a \in D : |\sigma(x_0, a) - \sigma(x_0, x_0)| < \epsilon\}$ kümesidir ve açıkça $x_0 \in \bar{D} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ için $B_\sigma(x_0, \epsilon) \cap D \neq \emptyset$ 'dir (Hosseini & Fosner, 2019).

Teorem 3.22: (X, σ) bir metrik benzeri uzay ve D kümesi X 'in boştan farklı bir alt kümesi olsun. $x_0 \in \bar{D}$ ancak ve ancak en az bir $\{x_n\} \subseteq D$ öyle ki $x_n \rightarrow x_0$ sağlanır (Hosseini & Fosner, 2019).

İspat: $x_0 \in \bar{D}$ olsun. O halde $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ için bir $x_n \in D$ vardır öyle ki $|\sigma(x_n, x_0) - \sigma(x_0, x_0)| < \frac{1}{n}$ sağlanır ki bunun anlamı $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(x_n, x_0) = \sigma(x_0, x_0)$ olmasıdır. Sonuç olarak $\{x_n\} \subseteq D$ dizisi x_0 'a yakınsaktır.

Tersine varsayalım ki $\{x_n\} \subseteq D$ dizisi x_0 'a yakınsak olsun. Şimdi gösterilmesi gereken $x_0 \in \bar{D}$ olduğudur. ϵ herhangi bir pozitif sayı olsun. Bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq N$ için $x_n \in B_\sigma(x_0, \epsilon)$ 'dur ki bunun anlamı $D \cap B_\sigma(x_0, \epsilon) \neq \emptyset$ olmasıdır. Böylece $\epsilon > 0$ keyfi olduğundan, $x_0 \in \bar{D}$ elde edilir. $\square$

Tanım 3.23: (X, σ) bir metrik benzeri uzay ve D kümesi X 'in boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere $x_0 \in X$ ile D kümesi arasındaki uzaklık,

$d(x_0, D) = \inf\{|\sigma(x_0, a) - \sigma(x_0, x_0)| : a \in D\}$ şeklinde belirlidir (Hosseini & Fosner, 2019).

Teorem 3.24: (X, σ) ikilisi bir metrik benzeri uzay ve $\emptyset \neq D \subset X$ olsun. Bu durumda $\bar{D} = \{x \in X \mid d(x, D) = 0\}$ 'dir (Hosseini & Fosner, 2019).

İspat: $\bar{D} \subseteq \{x \in X \mid d(x, D) = 0\}$ olduğu gösterilmelidir.

$$x_0 \in \bar{D} \Rightarrow \forall \epsilon > 0, D \cap B_\sigma(x_0, \epsilon) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists a_0 \in D : |\sigma(a_0, x_0) - \sigma(x_0, x_0)| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, d(x_0, D) < \epsilon$$

$$\Rightarrow d(x_0, D) = 0 \text{ 'dır. Böylece, } \bar{D} \subseteq \{x \in X \mid d(x, D) = 0\} \text{ olduğu görülür.}$$

Tersine eğer $d(x_0, D) = 0$ ise, $x_0 \in \bar{D}$ olduğu gösterilmelidir. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ için bir $x_n \in D$ vardır öyle ki $|\sigma(x_0, x_0) - \sigma(x_n, x_0)| < \frac{1}{n}$ sağlanır. Teorem 3.22'den $x_0 \in \bar{D}$ elde edilir. Böylece x_0 'a yakınsak olacak şekilde bir $\{x_n\} \subseteq D$ dizisi

vardır ve $\{x \in X \mid d(x, D) = 0\} \subseteq \bar{D}$ olduğu görülür. Sonuç olarak $\bar{D} = \{x \in X \mid d(x, D) = 0\}$ elde edilir. $\square$

Teorem 3.25: (X, σ) ikilisi bir metrik benzeri uzay ve $D, E \subseteq X$ olsun.

i) $D \subset \bar{D}$

ii) $\overline{(\bar{D})} = \bar{D}$

iii) $\overline{D \cup E} = \bar{D} \cup \bar{E}$

iv) $\bar{\emptyset} = \emptyset$

İspat: i) $\bar{D}$ 'nin kapanışının tanımında $x_0 = a$ seçilirse her $\epsilon > 0$ için istenilen eşitsizlik sağlanır. $\bar{D}$ 'nin kapanışının D 'yi kapsayan en küçük kapalı küme olduğu görülür.

ii) i'den, $\bar{D} \subseteq \overline{(\bar{D})}$ olduğu açıktır. Tersine,

$$x_0 \in \overline{(\bar{D})} \Rightarrow \forall \epsilon > 0, B_\sigma(x_0, \epsilon) \cap D \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists a \in \bar{D} : |\sigma(x_0, a) - \sigma(x_0, x_0)| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, d(x_0, \bar{D}) < \epsilon \text{ olup, Teorem 3.24'ten,}$$

$$\Rightarrow d(x_0, \bar{D}) = 0 \Rightarrow \inf\{|\sigma(x_0, a) - \sigma(x_0, x_0)| : a \in \bar{D}\} = 0$$

$$\Rightarrow x_0 \in \bar{D} \Rightarrow \overline{(\bar{D})} \subseteq \bar{D} \text{ elde edilir. O halde } \overline{(\bar{D})} = \bar{D} \text{ 'dır.}$$

$$\text{iii) } x_0 \in \overline{D \cup E} \Rightarrow \forall \epsilon > 0, B_\sigma(x_0, \epsilon) \cap (D \cup E) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, (B_\sigma(x_0, \epsilon) \cap D) \cup (B_\sigma(x_0, \epsilon) \cap E) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, B_\sigma(x_0, \epsilon) \cap D \neq \emptyset \text{ veya } B_\sigma(x_0, \epsilon) \cap E \neq \emptyset$$

Varsayalım ki en az bir $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ için $B_\sigma(x_0, \epsilon_1) \cap D = \emptyset$ ve $B_\sigma(x_0, \epsilon_2) \cap E = \emptyset$ sağlansın. $\epsilon_0 = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ seçilirse $B_\sigma(x_0, \epsilon_0) \cap D = \emptyset$ ve $B_\sigma(x_0, \epsilon_0) \cap E = \emptyset$ elde edilir. Bu durumda, $B_\sigma(x_0, \epsilon_0) \cap (D \cup E) = \emptyset$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde $\forall \epsilon > 0, B_\sigma(x_0, \epsilon) \cap D \neq \emptyset$ veya $B_\sigma(x_0, \epsilon) \cap E \neq \emptyset$ olup,

$\Rightarrow x_0 \in \bar{D}$ veya $x_0 \in \bar{E} \Rightarrow x_0 \in \bar{D} \cup \bar{E}$ elde edilir.

$\Rightarrow \overline{D \cup E} \subseteq \bar{D} \cup \bar{E}$. Tersine, eğer $D \subseteq E$ ise, monotonluk özelliğinden $\bar{D} \subseteq \bar{E}$ sağlanır.

Böylece $\bar{D} = \{x_0 \in X \mid \forall \epsilon > 0 \exists a \in D : |\sigma(x_0, a) - \sigma(x_0, x_0)| < \epsilon\}$ kümesi,

$\bar{E} = \{x_0 \in X \mid \forall \epsilon > 0 \exists a \in D \subseteq E : |\sigma(x_0, a) - \sigma(x_0, x_0)| < \epsilon\}$ kümesinde kapsanır.

$$D \subseteq D \cup E \Rightarrow \bar{D} \subseteq \overline{D \cup E}$$

$$E \subseteq D \cup E \Rightarrow \bar{E} \subseteq \overline{D \cup E}$$

olduğundan, $\bar{D} \cup \bar{E} \subseteq \overline{D \cup E}$ elde edilir. Böylece $\overline{D \cup E} = \bar{D} \cup \bar{E}$ elde edilir.

(iv) İspatı açıktır. □

Örnek 3.26'da bir metrik benzeri uzayda eşit benzeri noktaları merkez kabul eden açık topların arakesitinin de bir açık küme olduğu gösterilmiştir.

Örnek 3.26: (X, d) bir klasik metrik uzay ve $c \in X$ sabit bir eleman olsun. $\sigma(c, c) = 0$ ve $\sigma(x, y) = d(x, c) + d(c, y)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda (X, σ) bir metrik benzeri uzaydır. Gerçekten,

$$(MB1) \sigma(x, y) = d(x, c) + d(c, y) = 0 \Rightarrow d(x, c) = d(c, y) = 0 \Rightarrow x = c = y ;$$

$$(MB2) \sigma(x, y) = d(x, c) + d(c, y) = d(c, x) + d(y, c) = d(y, c) + d(c, x) = \sigma(y, x);$$

$$(MB3) d(x, c) \leq d(x, y) + d(y, c) \leq d(x, c) + d(c, y) + d(y, c)$$

$$\Rightarrow d(x, c) + d(c, z) \leq d(x, c) + d(c, y) + d(y, c) + d(c, z)$$

$$\Rightarrow \sigma(x, z) \leq \sigma(x, y) + \sigma(y, z) \text{ olduğu görülür.}$$

$x_1, x_2 \in X$ bu uzayın eşit benzeri noktaları olsun. Bu durumda Teorem 3.14'ten her $\xi \in \mathbb{R}^+$ için $B_\sigma(x_1, \xi) \cap B_\sigma(x_2, \xi) \neq \emptyset$ dir. $B_\sigma(x_1, \xi) \cap B_\sigma(x_2, \xi)$ 'nin bir açık küme olduğu gösterilmelidir.

$B_\sigma(x_1, \xi) \cap B_\sigma(x_2, \xi) \neq \emptyset$ olduğundan en az bir $y \in B_\sigma(x_1, \xi) \cap B_\sigma(x_2, \xi)$ vardır öyle ki $|d(c, y) - d(c, x_1)| < \xi$ ve $|d(c, y) - d(c, x_2)| < \xi$ sağlanır.

$$\Rightarrow d(c, y) \in (d(c, x_1) - \xi, d(c, x_1) + \xi) \text{ ve } d(c, y) \in (d(c, x_2) - \xi, d(c, x_2) + \xi)$$

$$\Rightarrow \max\{d(c, x_1) - \xi, d(c, x_2) - \xi\} < d(c, y) < \min\{d(c, x_1) + \xi, d(c, x_2) + \xi\}$$

$\Rightarrow y \in B_\sigma(x_1, \xi) \cap B_\sigma(x_2, \xi)$ elde edilir. Varsayalım ki en az bir $\epsilon > 0$ için

$B_\sigma(y, \epsilon) \not\subset B_\sigma(x_1, \xi) \cap B_\sigma(x_2, \xi)$ olsun. Açık top tanımından,

$$z \in B_\sigma(y, \epsilon) \Rightarrow |\sigma(y, z) - \sigma(y, y)| < \epsilon$$

$$\Rightarrow |d(y, c) + d(c, z) - d(y, c) - d(c, y)| < \epsilon$$

$$\Rightarrow |d(c, z) - d(c, y)| < \epsilon$$

$$\Rightarrow d(c, y) - \epsilon < d(c, z) < d(c, y) + \epsilon$$

$d(c, x_1), d(c, x_2) \in \mathbb{R}^+$ olduğundan, varsayalım ki $d(c, x_1) > d(c, x_2)$ olsun.

$$\Rightarrow d(c, x_1) - \xi < d(c, y) < d(c, x_2) + \xi \text{ elde edilir.}$$

$$\Rightarrow d(c, z) < d(c, y) + \epsilon < d(c, x_2) + \xi + \epsilon$$

$$\Rightarrow d(c, z) - \epsilon < d(c, z) < d(c, x_2) + \xi + \epsilon \text{ sağlandığından, varsayım yanlıştır.}$$

$$z \in B_\sigma(x_1, \xi) \cap B_\sigma(x_2, \xi) \text{ olup } \forall \epsilon > 0 \text{ için } B_\sigma(y, \epsilon) \subset B_\sigma(x_1, \xi) \cap B_\sigma(x_2, \xi) \text{ dir. } \square$$

Örnek 3.27: $X = \mathbb{R}^+$ ve $\sigma: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$; $\sigma(x, y) = \max\{x, y\}$ metrik benzeri dönüşüm olmak üzere,

i) Eğer her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $x < y$ ise, $\forall \epsilon > 0$ için $B_\sigma(x, \epsilon) \subset B_\sigma(y, \epsilon)$ ve en az bir $\epsilon_0 > 0$ vardır öyle ki $y \notin B_\sigma(x, \epsilon_0)$.

ii) Eğer $x = y$ ise her $\epsilon > 0$ için $B_\sigma(x, \epsilon) = B_\sigma(y, \epsilon)$ olur.

Gerçekten $x, y \in \mathbb{R}^+$ alalım ve varsayalım ki $x < y$ olsun. $\mathbb{R}^+$ üzerinde metrik benzeri dönüşüm $\sigma(x, y) = \max\{x, y\}$ olduğundan $\sigma(y, y) > \sigma(x, x)$ elde edilir. $z \in B_\sigma(y, \epsilon)$ alalım.

Metrik benzeri uzaylarda açık top tanımından $\sigma(x, x) - \epsilon < \sigma(x, z) < \epsilon + \sigma(y, y)$ olduğu görülür. Varsayımdan iki durum elde edilir: $x < z < y$ ve $z < x < y$.

$x < z < y$ ise $\sigma(x, z) = z$ ve $\sigma(y, z) = z$ olup buradan,

$x < z < y < \epsilon + y \Rightarrow \sigma(x, x) < \sigma(x, z) < \sigma(y, z) < \epsilon + \sigma(y, y)$ elde edilir ki bunun anlamı her $\epsilon > 0$ için $z \in B_\sigma(y, \epsilon)$ olmasıdır.

$z < x < y$ ise $\sigma(x, z) = x$ ve $\sigma(y, z) = y$ olup buradan,

$z < x < y < \epsilon + y \Rightarrow \sigma(z, z) < \sigma(x, z) < \sigma(y, z) < \epsilon + \sigma(y, y)$ elde edilir.

Bunun anlamı her $\epsilon > 0$ için $z \in B_\sigma(y, \epsilon)$ olmasıdır. Böylece her ikisinden de her $\epsilon > 0$ için $z \in B_\sigma(y, \epsilon)$ olduğu görülür. Şimdi $\exists \epsilon_0 > 0$ için $y \notin B_\sigma(x, \epsilon_0)$ olduğu görülmelidir. Bunun için varsayalım ki $y \in B_\sigma(x, \epsilon_0)$ olsun. Buradan,

$$y \in B_\sigma(x, \epsilon_0) \Rightarrow \sigma(x, x) - \epsilon_0 < \sigma(x, y) < \sigma(x, x) + \epsilon_0$$

$$\Rightarrow x + \epsilon_0 > y > x - \epsilon_0 \text{ elde edilir.}$$

$0 \leq x < y$ olduğundan $0 < y - x$ olup, $\epsilon_0 := y - x$ olarak alınırsa

$$x - (y - x) < y < x + (y - x) \Rightarrow 2x - y < y < y \text{ çelişki elde edilir.}$$

Böylece varsayım yanlıştır. En az bir $\epsilon_0 > 0$ vardır öyle ki $y \notin B_\sigma(x, \epsilon_0)$ olur.

i) den varsayım $x \leq y$ ise her $\epsilon > 0$ için $B_\sigma(x, \epsilon) \subseteq B_\sigma(y, \epsilon)$ elde edilir. Diğer yandan eğer $y \leq x$ ise yine i)den $B_\sigma(y, \epsilon) \subseteq B_\sigma(x, \epsilon)$ olup, eğer $x = y$ ise her $\epsilon > 0$ için $B_\sigma(x, \epsilon) = B_\sigma(y, \epsilon)$ elde edilir.

Önerme 3.28: (X, σ_1) ve (Y, σ_2) iki metrik benzeri uzay olsun.

$a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2) \in X \times Y$ ve $\sigma: (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\sigma(a, b) = \sqrt{\sigma_1(x_1, x_2)^2 + \sigma_2(y_1, y_2)^2}$ şeklinde tanımlandığında σ dönüşümü $X \times Y$ üzerinde bir metrik benzeri dönüşümdür.

$(X \times Y, \sigma)$ ikilisine de iki metrik benzeri uzayın kartezyen çarpım uzayı denir.

Örnek 3.29: $\sigma_m(a, b) = \max \{\sigma_1(x_1, x_2), \sigma_2(y_1, y_2)\}$ dönüşümü ile elde edilen $(X \times Y, \sigma_m)$ ikilisi ve $\sigma^*(a, b) = \sigma_1(x_1, x_2) + \sigma_2(y_1, y_2)$ dönüşümü ile elde edilen $(X \times Y, \sigma^*)$ ikilisi, iki metrik benzeri uzayın kartezyen çarpım uzaylarıdır.

Tanım 3.30: Metrik benzeri uzayların kartezyen çarpım uzayında (u_1, v_1) -merkezli $\xi > 0$ yarıçaplı açık top

$$B_\sigma((u_1, v_1), \xi) = \{(x_1, y_1) \in X \times Y : |\sigma((u_1, v_1), (x_1, y_1)) - \sigma((u_1, v_1), (u_1, v_1))| < \xi\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek 3.31: Önerme 3.28 ve Tanım 3.30 gereğince, σ dönüşümü

$$\sigma((u_1, v_1), (x_1, y_1)) = \sqrt{\sigma_1(u_1, x_1)^2 + \sigma_2(v_1, y_1)^2} \text{ şeklinde alındığında,}$$

(u_1, v_1) -merkezli $\xi > 0$ yarıçaplı açık top

$$B_\sigma((u_1, v_1), \xi) = \{(x_1, y_1) \in X \times Y : |\sqrt{\sigma_1(u_1, x_1)^2 + \sigma_2(v_1, y_1)^2} - \sqrt{\sigma_1(u_1, u_1)^2 + \sigma_2(v_1, v_1)^2}| < \xi\}$$

olarak elde edilir.

Özel olarak $X = Y = \mathbb{R}$ ve σ_1, σ_2 klasik Öklid metriği seçilirse açık topun ifadesi,

$$B_\sigma((u_1, v_1), \xi) = \{(x_1, y_1) \in X \times Y : |\sqrt{|u_1 - x_1|^2 + |v_1 - y_1|^2}| < \xi\} \text{ olur.}$$

Burada $\sqrt{|u_1 - x_1|^2 + |v_1 - y_1|^2}$ ifadesi her zaman büyük eşit sıfır olduğundan,

$$\sqrt{|u_1 - x_1|^2 + |v_1 - y_1|^2} < \xi \Rightarrow |u_1 - x_1|^2 + |v_1 - y_1|^2 < \xi^2$$

olup düzlemde (u_1, v_1) -merkezli $\xi > 0$ yarıçaplı açık top elde edilir.

4.BULANIK METRİK BENZERİ UZAYLAR VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde Shukla ve Abbas (2014) tarafından metrik benzeri yapının Geroge ve Veeramani anlamındaki bulanık metrik uzaylarda incelenmesi sonucu elde edilen bulanık metrik benzeri uzaylar ve bazı sabit nokta teoremleri tanıtılmıştır. Elde edilen sonuçlar George ve Veeramani anlamında bulanık metrik uzayların bir genelleştirmesidir.

Tanım 4.1: $X \neq \emptyset$ bir küme, $*$ sürekli t-norm ve $F, X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde bir bulanık küme olsun. F bulanık kümesi her $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ için,

$$(BMB1) F(x, y, t) > 0;$$

$$(BMB2) F(x, y, t) = 1 \Rightarrow x = y;$$

$$(BMB3) F(x, y, t) = F(y, x, t);$$

$$(BMB4) F(x, y, t) * F(y, z, s) \leq F(x, z, t + s);$$

$$(BMB5) F(x, y, .): (0, \infty) \rightarrow [0, 1] \text{ sürekli,}$$

koşullarını sağlıyorsa F 'ye sürekli t-norm ile birlikte X üzerinde bir bulanık metrik benzeri ve $(X, F, *)$ üçlüsüne de bir bulanık metrik benzeri uzay (BMBU) denir (Shukla ve Abbas (2014)).

Uyarı 4.2: Bir bulanık metrik benzeri uzayda her $t > 0$ ve bazı $x \in X$ (veya her $x \in X$) için $F(x, y, t) \leq 1$ olabileceğinden (BMB2) özelliği hariç bulanık metrik uzayın tüm özelliklerini sağlar. Ayrıca birim dönüşümle birlikte, açıkça her $t > 0$ ve her $x \in X$ için $F(x, y, t) = 1$ iken, her bulanık metrik uzay aynı zamanda bir bulanık metrik benzeri uzaydır (Shukla ve Abbas (2014)).

Not 4.3: Tanım 2.3.4 (BM2) özelliği ile Tanım 4.1 (BMB2) özelliği karşılaştırıldığında, Tanım 2.3.4 (BM2)'de $x = y$ iken x ve y 'nin yakınlık derecesinin mükemmel veya basitçe '1' olduğu yani her $t > 0$ ve her $x \in X$ için $F(x, y, t) = 1$ olduğu görülür. Ancak bulanık metrik benzeri uzaylarda Tanım 4.1 (BMB2)'de $x = y$ olduğunda

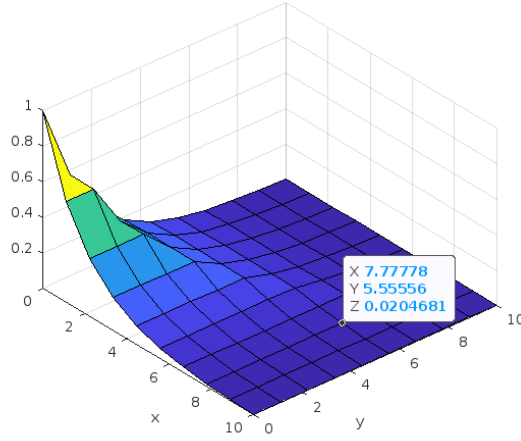
$F(x, y, t) \leq 1$ olabileceğinden, bulanık metrik benzeri uzayların x ve y 'nin yakınlık derecesinin mükemmel olmadığı durumlarda uygulanabileceği görülür (Shukla ve Abbas (2014)).

Önerme 4.4: (X, σ) bir metrik benzeri uzay, sürekli t-norm $u * v = uv$ ve F bulanık kümesi $k \in \mathbb{R}^+$, $m > 0$ ve $n \geq 1$ olmak üzere her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $F(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt^n + m\sigma(x, y)}$ kuralıyla belirli olsun. Böylece $(X, F, *)$ üçlüsü bir bulanık metrik benzeri uzaydır. Burada (X, σ) herhangi bir metrik benzeri uzay olduğundan her metrik benzeri uzayın bir bulanık metrik benzeri uzay ürettiği görülür. Ayrıca özel olarak $k = n = m = 1$ alındığında, her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $F(x, y, t) = \frac{t}{t + \sigma(x, y)}$ olup $(X, F, *)$ üçlüsü standart bulanık metrik benzeri uzay olarak adlandırılır (Shukla ve Abbas (2014)).

Örnek 4.5: $X = \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{R}^+$ ve $m > 0$ olsun. Her $u, v \in [0, 1]$ için sürekli t-norm $u * v = uv$ ve $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde F bulanık kümesi her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $F(x, y, t) = \frac{kt}{kt + m(\max\{x, y\})}$ şeklinde belirli olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için $\sigma(x, y) = \max\{x, y\}$ dönüşümü X üzerinde bir metrik benzeri dönüşüm olduğundan $(X, F, *)$ bir bulanık metrik benzeri uzaydır. Ancak burada her $x > 0$ ve $t > 0$ için $F(x, x, t) = \frac{kt}{kt + mx} \neq 1$ olduğundan $(X, F, *)$ bir bulanık metrik uzay değildir (Shukla ve Abbas (2014)).

Örnek 4.6: $X = \mathbb{R}^+$ ve sürekli t-norm $u * v = uv$ olmak üzere, $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde F bulanık kümesi her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $F(x, y, t) = \frac{1}{e^{\frac{\max\{x, y\}}{t}}}$ kuralıyla belirli olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için $\sigma(x, y) = \max\{x, y\}$ dönüşümü X üzerinde bir metrik benzeri dönüşüm olduğundan $(X, F, *)$ bir bulanık metrik benzeri uzaydır. Fakat her $x > 0$ ve $t > 0$ için $F(x, x, t) = \frac{1}{e^{\frac{x}{t}}} \neq 1$ olduğundan $(X, F, *)$ bir bulanık metrik uzay değildir (Shukla ve Abbas (2014)).

Not 4.7: Şekil 4.1'de $x, y \in [0, 10]$ ve $t = 2$ için $F(x, y, t) = \frac{1}{e^{\frac{\max\{x, y\}}{2}}}$ 'nin grafiği verilmiştir. $x = y = 0$ olduğu durum hariç her $x > 0$, $t > 0$ için $F(x, x, t) \neq 1$ 'dir.



Şekil 4.1. $t = 2$ için F bulanık kümesi

Tanım 4.8: $(X, F, *)$ bir bulanık metrik benzeri uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. i) Her $t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = F(x, x, t)$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ 'e yakınsaktır denir.

ii) Her $t > 0$ ve $p \geq 1$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n+p}, x_n, t)$ limiti var ve sonlu ise $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

iii) $(X, F, *)$ 'da her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi bir $x \in X$ 'e yakınsak öyle ki her $t > 0$ ve $p \geq 1$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = F(x, x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n+p}, x_n, t)$ oluyorsa, $(X, F, *)$ 'a tam bulanık metrik benzeri uzay denir (Shukla ve Abbas (2014)).

Uyarı 4.9: Bir bulanık metrik benzeri uzayda yakınsak bir dizinin limitinin tek olması gerekmez. Örneğin $(X, F, *)$ bulanık metrik benzeri uzayı $k = m = 1$ alınarak Örnek 4.5'teki şekilde tanımlansın. X 'de $\{x_n\}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \frac{1}{n}$ kuralıyla belirli olsun. Eğer $x \geq 1$ ise her $t > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = \frac{t}{t + \max\{x_n, x\}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{t + x} = F(x, x, t) \quad \text{olup, böylece } \{x_n\}$$
 dizisinin $x \geq 1$ olan her $x \in X$ 'e yakınsadığı görülür (Shukla ve Abbas (2014)).

Uyarı 4.10: Bir bulanık metrik benzeri uzayda yakınsak bir dizinin Cauchy dizisi olması gerekmez. Uyarı 4.9'da verilen $(X, F, *)$ bulanık metrik benzeri uzayını ele alalım. X 'de $\{x_n\}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = 1 + (-1)^n$ kuralıyla belirli olsun.

Burada $x \geq 2$ ise her $t > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = \frac{t}{t + \max\{x_n, x\}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{t + x} = F(x, x, t)$$

olup, böylece $\{x_n\}$ dizisinin $x \geq 2$ olan her $x \in X$ 'e yakınsadığı görülür. Fakat $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n+p}, x_n, t)$ limiti var olmadığından $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisi değildir (Shukla ve Abbas (2014)).

Tanım 4.11: $(X, F, *)$ bulanık metrik benzeri uzay olsun. Eğer en az bir $\lambda \in (0, 1)$ vardır öyle ki her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $\frac{1}{F(T(x), T(y), t)} - 1 \leq \lambda \left[\frac{1}{F(x, y, t)} - 1 \right]$ eşsizliği sağlanıyorsa $T: X \rightarrow X$ dönüşümüne bir bulanık daralma dönüşümü denir. Burada λ sabiti T 'nin bulanık daralma sabiti olarak adlandırılır (Shukla ve Abbas (2014)).

Teorem 4.12: $(X, F, *)$ bir tam bulanık metrik benzeri uzay ve $\lambda \in (0, 1)$ bulanık daralma sabiti ile birlikte $T: X \rightarrow X$ bir bulanık daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümü her $t > 0$ için $F(a, a, t) = 1$ olacak şekilde tek bir $a \in X$ sabit noktaya sahiptir (Shukla ve Abbas (2014)).

Örnek 4.13: $X = [0, 1]$ ve sürekli t-norm $u * v = uv$ olsun.

$X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde F bulanık kümesi ise her $x, y \in X, t > 0$ için $F(x, y, t) = \frac{t}{t + \max\{x, y\}}$ kuralıyla belirli olsun. Bu durumda, $(X, F, *)$ bir tam bulanık metrik benzeri uzaydır.

$$T: X \rightarrow X; T(x) = \begin{cases} 0, & x = 1; \\ \frac{x}{2}, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

kuralıyla belirli olduğunda T dönüşümü $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ daralma sabiti ile birlikte X üzerinde bir bulanık daralma dönüşümüdür (Shukla ve Abbas (2014)).

Teorem 4.14: $(X, F, *)$ bir tam bulanık metrik benzeri uzay ve $\lambda \in (0, 1)$ bulanık daralma sabiti ile birlikte $T: X \rightarrow X$ bir bulanık daralma dönüşümü olsun. Her $x \in X$ ve $t > 0$ için $F(a, T(a), t) \geq F(x, T(x), t)$ olacak şekilde en az bir $a \in X$ olduğunu varsayalım.

Bu durumda $a \in X$, T 'nin tek sabit noktasıdır ve her $t > 0$ için $F(a, a, t) = 1$ 'dir (Shukla ve Abbas (2014)).

Not 4.15: Teorem 4.14'te bir bulanık metrik benzeri uzayda bulanık daralma dönüşümünün sabit noktasının öz bulanık mesafesinin her zaman '1' olduğu görülmektedir. Yani bulanık daralma dönüşümünün sabit noktasının kendine yakınlığı mükemmeldir (Shukla ve Abbas (2014)).

Teorem 4.16: $(X, F, *)$ bir tam bulanık metrik benzeri uzay olsun. Her $x, y \in X$ için $\lim_{t \rightarrow \infty} F(x, y, t) = 1$ ve $k \in (0, 1)$ olmak üzere $T : X \rightarrow X$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $F(T(x), T(y), kt) \geq F(x, y, t)$ koşullunu sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T tek bir $a \in X$ sabit noktaya sahiptir ve her $t > 0$ için $F(a, a, t) = 1$ 'dir (Shukla ve Abbas (2014)).

5. SEZGİSEL BULANIK METRİK BENZERİ UZAYLAR

Bu bölüm içerisinde sezgisel bulanık metrik benzeri uzaylar ve sabit nokta teoremleri, sezgisel bulanık metrik benzeri uzaylarda (α, β) -daralma dönüşümü ve tam sezgisel bulanık metrik benzeri uzaylar ve sabit nokta teoremleri tanıtılmıştır.

5.1. Sezgisel Bulanık Metrik Benzeri Uzaylar

Bu kısımda sezgisel bulanık metrik benzeri uzaylar kavramı tanıtılacaktır.

Tanım 5.1.1: X herhangi boştan farklı bir küme, $*$ sürekli t-norm ve Δ sürekli t-conorm ve F, G dönüşümleri $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde bulanık kümeler olmak üzere, eğer her $x, y, z \in X$ ve $s, t > 0$ için,

$$(SBMB1) \quad F(x, y, t) + G(x, y, t) \leq 1;$$

$$(SBMB2) \quad F(x, y, t) > 0;$$

$$(SBMB3) \quad F(x, y, t) = 1 \Rightarrow x = y;$$

$$(SBMB4) \quad F(x, y, t) = F(y, x, t);$$

$$(SBMB5) \quad F(x, y, t) * F(y, z, s) \leq F(x, z, t + s);$$

$$(SBMB6) \quad F(x, y, .): (0, \infty) \rightarrow (0, 1] \text{ sürekli};$$

$$(SBMB7) \quad G(x, y, t) < 1;$$

$$(SBMB8) \quad G(x, y, t) = 0 \Rightarrow x = y;$$

$$(SBMB9) \quad G(x, y, t) = G(y, x, t);$$

$$(SBMB10) \quad G(x, y, t) \Delta G(y, z, s) \geq G(x, z, t + s);$$

$$(SBMB11) \quad G(x, y, .): (0, \infty) \rightarrow [0, 1) \text{ sürekli},$$

özelliklerini sağlıyorsa $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisine bir sezgisel bulanık metrik benzeri uzay (SBMBU) denir. Burada F ve G dönüşümleri sırasıyla $*$ ve Δ ikili işlemleri ile birlikte X üzerinde sezgisel bulanık benzeri olarak adlandırılırlar.

Uyarı 5.1.2: Tanım 2.4.1 ve Tanım 5.1.1'deki (SBM3) ile (SBMB3) ve (SBM8) ile (SBMB8) özellikleri karşılaştırılarak incelendiğinde, bir SBMBU'da $x = y$ olması durumunda $F(x, x, t)$ değerinin 1'den küçük ve $G(x, x, t)$ değerinin 0'dan büyük olabileceği görülmektedir. Ancak bir SBMU'da $x = y$ olması durumunda $F(x, x, t) = 1$ ve $G(x, x, t) = 0$ olduğu yani x ve y değerlerinin üye olma ve üye olmama değerlerinin kesin olarak sırasıyla 1 ve 0 olduğu gözlemlenmektedir. Bu durum SBMU'da $F(x, x, t) = 1$ iken x ve y 'nin üye olma derecelerinin mükemmel olması olarak yorumlandığında, sezgisel bulanık metrik benzeri uzaylarda $x = y$ iken, $F(x, x, t) \leq 1$ olabileceğinden x ve y 'nin yakınlık derecelerinin mükemmel olmadığı durumda da uygulanabileceğini söyler. Benzer şekilde SBMU'da $G(x, x, t) = 0$ iken x ve y 'nin üye olmama dereceleri mükemmel değil olarak yorumlanırsa, sezgisel bulanık metrik benzeri uzaylarda $G(x, x, t) \geq 0$ olabileceğinden x ve y 'nin yakınlık derecelerinin mükemmel olmadığı durumda da uygulanabileceğini söyler. Sonuç olarak her $x \in X$ (veya bazı $x \in X$ 'ler) ve her $t > 0$ için $F(x, x, t) < 1$ ve $G(x, x, t) > 0$ olduğu durum hariç her SBMBU, SBMU'nın bütün özelliklerini sağladığı ve ayrıca her $t > 0$ ve her $x \in X$ için $F(x, x, t) = 1$ ve $G(x, x, t) = 0$ olduğundan, her SBMU birim dönüşümle birlikte aynı zamanda bir SBMBU olduğunu görülmektedir.

Tanım 5.1.3: $(X, F, G, *, \Delta)$ bir sezgisel bulanık metrik benzeri uzay olsun. Her $x \in X, \xi \in (0, 1)$ ve $t > 0$ için x -merkezli, t değişkenine bağlı ξ -yarıaçaplı açık top $B(x, \xi, t) = \{y \in X : F(x, y, t) > 1 - \xi, G(x, y, t) < \xi\}$ olarak tanımlanır. Böylece, $T_{(F, G)} = \{W \subset X : \forall x \in W, \exists \xi \in (0, 1), t > 0 \text{ öyle ki } B(x, \xi, t) \subset W\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir.

Uyarı 5.1.4:

(1) Eğer $(X, F, G, *, \Delta)$ bir SBMBU ise, $(X, F, *)$ Shukla ve Abbas (2014) anlamında bir BMBU'dır.

(2) Her BMBU $(X, F, *)$, $(X, F, 1 - F, *, \Delta)$ formunda bir SBMBU'dır. Burada her $u, v \in [0, 1]$ için $u \Delta v = 1 - [(1 - u) * (1 - v)]$ 'dir.

Lemma 5.1.5: (X, σ) bir metrik benzeri uzay ve $s, t > 0$ olsun. Her $n \geq 1$ için,

$$\frac{\sigma(x,z)}{(t+s)^n} \leq \max\left\{\frac{\sigma(x,y)}{t^n}, \frac{\sigma(y,z)}{s^n}\right\} \text{ eşitsizliği sağlanmaktadır.}$$

İspat: Lemma 5.1.5'teki eşitsizlikten üç durum elde edilir.

$$(1)\sigma(x, y) \geq \sigma(x, z) ;$$

$$(2)\sigma(y, z) \geq \sigma(x, z) ;$$

$$(3)\sigma(x, y) < \sigma(x, z) \text{ ve } \sigma(y, z) < \sigma(x, z).$$

(1) ve (2) durumlarında eşitsizliğin sağlandığı açıktır. Varsayalım ki (3) için de sağlansın. Tanım 3.2 (MB3)'ten $\sigma(x, z) \leq \sigma(x, y) + \sigma(y, z)$ eşitsizliği elde edilir. Genelliği bozmadan $\sigma(x, z) = \sigma(x, y) + \sigma(y, z)$ eşitliğinin sağlandığını varsayalım. $\sigma(x, z) > \sigma(x, y)$ olduğundan, $\exists \beta \in (0,1)$ öyle ki $\sigma(x, y) = \beta \sigma(x, z)$. Buradan, $\sigma(y, z) = (1 - \beta) \sigma(x, z)$ elde edilir ve böylece Lemma 5.1.5'teki ifade,

$$\frac{\sigma(x,z)}{(t+s)^n} \leq \max\left\{\frac{\beta \sigma(x,z)}{t^n}, \frac{(1-\beta) \sigma(x,z)}{s^n}\right\} \text{ şeklinde yazılır. Gösterilmesi gereken,}$$

$\frac{1}{(t+s)^n} \leq \max\left\{\frac{\beta}{t^n}, \frac{(1-\beta)}{s^n}\right\}$ eşitsizliğinin sağlandığıdır. Bunu göstermek için sırasıyla azalan ve artan $f(\beta) = \frac{t^n}{\beta}$ ve $g(\beta) = \frac{s^n}{(1-\beta)}$ fonksiyonlarını alalım. Burada,

$\beta = \frac{t^n}{t^n + s^n}$ seçildiğinde, $f(\beta) = g(\beta)$ iken, $\min\left\{\frac{t^n}{\beta}, \frac{s^n}{(1-\beta)}\right\}$ ifadesinin en büyük değeri $t^n + s^n$ 'dir. Böylece $(t + s)^n \geq t^n + s^n = f\left(\frac{t^n}{t^n + s^n}\right) \geq \min\left\{\frac{t^n}{\beta}, \frac{s^n}{(1-\beta)}\right\}$

$$\Rightarrow \frac{1}{(t+s)^n} \leq \frac{1}{t^n + s^n} \leq \max\left\{\frac{\beta}{t^n}, \frac{(1-\beta)}{s^n}\right\} \text{ elde edilir.}$$

Eğer $\sigma(x, y) + \sigma(y, z) > \sigma(x, z)$ ise,

$\exists \lambda \in (0,1)$ öyle ki $\frac{1}{\lambda} \sigma(x, z) = \sigma(x, y) + \sigma(y, z)$ 'dir. Dahası,

$\sigma(x, y) < \sigma(x, z)$ ve $\sigma(y, z) < \sigma(x, z)$ olduğundan,

$\frac{1}{\lambda} \sigma(x, z) > \sigma(x, y)$ ve $\frac{1}{\lambda} \sigma(x, z) > \sigma(y, z)$ sağlanır.

Böylece, yukarıdaki eşitsizliklerden,

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\sigma(x,z)}{(t+s)^n} \leq \max \left\{ \frac{\sigma(x,y)}{t^n}, \frac{\sigma(y,z)}{s^n} \right\} \text{ elde edilir ki bu,}$$

$$\frac{\sigma(x,z)}{(t+s)^n} \leq \max \left\{ \frac{\sigma(x,y)}{t^n}, \frac{\sigma(y,z)}{s^n} \right\} \text{ eşitsizliğinin sağlandığını göstermektedir.} \quad \square$$

Önerme 5.1.6: (X, σ) bir metrik benzeri uzay olsun. Her $u, v \in [0, 1]$ için $u * v = \min\{u, v\}$, $u \Delta v = \max\{u, v\}$ ve F, G dönüşümleri ise her $x, y \in X$, $t > 0$, $h \in \mathbb{R}^+$, $m > 0$, $n \geq 1$ için $F(x, y, t) = \frac{ht^n}{ht^n + m\sigma(x, y)}$ ve $G(x, y, t) = \frac{\sigma(x, y)}{ht^n + m\sigma(x, y)}$ şeklinde tanımlandığında $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir sezgisel bulanık metrik benzeri uzaydır.

İspat:

$$(SBMB1) \quad F(x, y, t) + G(x, y, t) = \frac{ht^n}{ht^n + m\sigma(x, y)} + \frac{\sigma(x, y)}{ht^n + m\sigma(x, y)}$$

$$\Rightarrow \frac{ht^n + \sigma(x, y)}{ht^n + m\sigma(x, y)} \leq 1$$

$$(SBMB2) \quad F(x, y, t) = \frac{ht^n}{ht^n + m\sigma(x, y)} > 0$$

$$(SBMB3) \quad F(x, y, t) = \frac{ht^n}{ht^n + m\sigma(x, y)} = 1$$

$$\Rightarrow ht^n = ht^n + m\sigma(x, y) \Rightarrow 0 = m\sigma(x, y)$$

$$\Rightarrow m > 0 \text{ olduğundan } \sigma(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

$$(SBMB4) \quad F(x, y, t) = \frac{ht^n}{ht^n + m\sigma(x, y)} = \frac{ht^n}{ht^n + m\sigma(y, x)} = F(y, x, t)$$

(SBMB5) $F(x, z, t + s) \geq F(x, y, t) * F(y, z, s)$ eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmelidir. Bunun için $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0, h \in \mathbb{R}^+$ ve $n \geq 1$ olmak üzere, Lemma 4.5'ten,

$$1 + \frac{m\sigma(x, z)}{h(t + s)^n} \leq \max \left\{ 1 + \frac{m\sigma(x, y)}{ht^n}, 1 + \frac{m\sigma(y, z)}{hs^n} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{h(t+s)^n + m\sigma(x, z)}{h(t+s)^n} \leq maks \left\{ \frac{ht^n + m\sigma(x, y)}{ht^n}, \frac{hs^n + m\sigma(y, z)}{hs^n} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{h(t+s)^n}{h(t+s)^n + m\sigma(x, z)} \geq min \left\{ \frac{ht^n}{ht^n + m\sigma(x, y)}, \frac{hs^n}{hs^n + m\sigma(y, z)} \right\}$$

$\Rightarrow F(x, z, t+s) \geq F(x, y, t) * F(y, z, s)$ elde edilir.

(SBMB6) $F(x, y, .): (0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ sürekli olduğunu gösterelim.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(x, y, t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{ht^n}{ht^n + m\sigma(x, y)} = \frac{ht_0^n}{ht_0^n + m\sigma(x, y)} = F(x, y, t_0)$$

olup, $F(x, y, .)$ dönüşümü süreklidir.

$$(SBMB7) \quad G(x, y, t) = \frac{\sigma(x, y)}{ht^n + m\sigma(x, y)} < 1$$

$$(SBMB8) \quad G(x, y, t) = \frac{\sigma(x, y)}{ht^n + m\sigma(x, y)} = 0 \Rightarrow \sigma(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

$$(SBMB9) \quad G(x, y, t) = \frac{\sigma(x, y)}{ht^n + m\sigma(x, y)} = \frac{\sigma(y, x)}{ht^n + m\sigma(y, x)} = G(y, x, t)$$

(SBMB10) $G(x, y, t) \Delta G(y, z, s) \geq G(x, z, t+s)$ eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmelidir. Açıkça,

$$\frac{m\sigma(x, z)}{h(t+s)^n + m\sigma(x, z)} \leq maks \left\{ \frac{m\sigma(x, y)}{ht^n + m\sigma(x, y)}, \frac{m\sigma(y, z)}{hs^n + m\sigma(y, z)} \right\}$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmelidir. Lemma 5.1.5'ten,

$$1 + \frac{m\sigma(x, z)}{h(t+s)^n} \leq maks \left\{ 1 + \frac{m\sigma(x, y)}{ht^n}, 1 + \frac{m\sigma(y, z)}{hs^n} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{h(t+s)^n + m\sigma(x, z)}{h(t+s)^n} \leq maks \left\{ \frac{ht^n + m\sigma(x, y)}{ht^n}, \frac{hs^n + m\sigma(y, z)}{hs^n} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{h(t+s)^n}{h(t+s)^n + m\sigma(x, z)} \geq min \left\{ \frac{ht^n}{ht^n + m\sigma(x, y)}, \frac{hs^n}{hs^n + m\sigma(y, z)} \right\}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{h(t+s)^n}{h(t+s)^n + m\sigma(x,z)} \leq 1 - \min \left\{ \frac{ht^n}{ht^n + m\sigma(x,y)}, \frac{hs^n}{hs^n + m\sigma(y,z)} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{m\sigma(x,z)}{h(t+s)^n + m\sigma(x,z)} \leq \max \left\{ \frac{m\sigma(x,y)}{ht^n + m\sigma(x,y)}, \frac{m\sigma(y,z)}{hs^n + m\sigma(y,z)} \right\}$$

$$\Rightarrow G(x,z,t+s) \leq \max\{G(x,y,t), G(y,z,s)\}$$

$$\Rightarrow G(x,z,t+s) \leq G(x,y,t) \Delta G(y,z,s).$$

(SBMB11) $G(x,y,\cdot): (0,\infty) \rightarrow [0,1)$ sürekli olduğunu gösterelim.

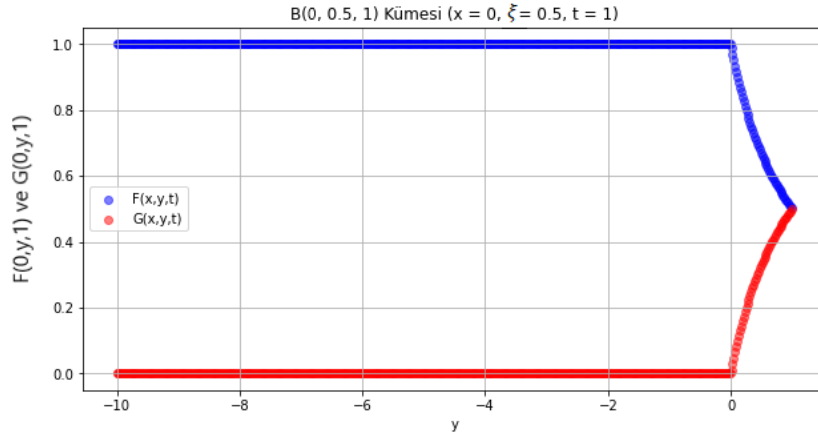
$$\lim_{t \rightarrow t_0} G(x,y,t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\sigma(x,y)}{ht^n + m\sigma(x,y)} = \frac{\sigma(x,y)}{ht_0^n + m\sigma(x,y)} = G(x,y,t_0)$$

olup, $G(x,y,\cdot)$ dönüşümü süreklidir. □

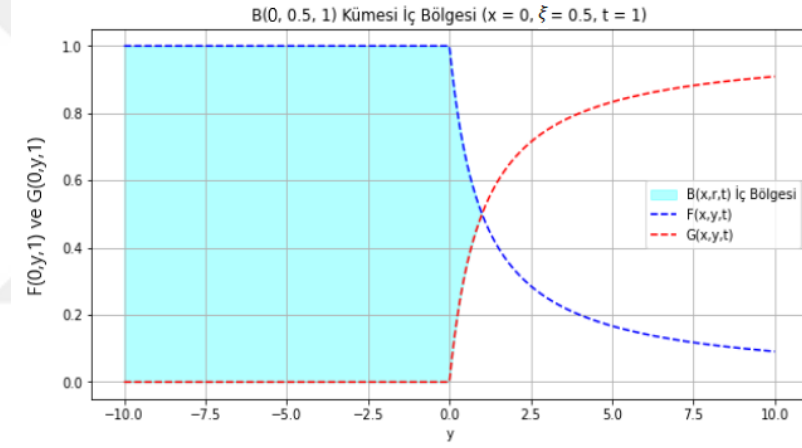
Uyarı 5.1.7: Önerme 5.1.6’da t-norm ve t-conorm sırasıyla çarpım t-norm $u * v = uv$ ve Lukasiewicz t-conorm $u \Delta v = \min\{1, u + v\}$ alındığında da sağlanmaktadır.

Uyarı 5.1.8: Önerme 5.1.6’dan görülmektedir ki her metrik benzeri uzay bir sezgisel bulanık metrik benzeri uzay üretir. $h = n = m = 1$ alındığında her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $F(x,y,t) = \frac{t}{t + \sigma(x,y)}$ ve $G(x,y,t) = \frac{\sigma(x,y)}{t + \sigma(x,y)}$ şeklinde tanımlı F ve G bulanık kümeleri ile belirli $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisine standart sezgisel bulanık metrik benzeri uzay denir.

Örnek 5.1.9: $(X, F, G, *, \Delta)$ bir standart sezgisel bulanık metrik benzeri uzay olsun. Tanım 5.1.3’ten x -merkezli, t değişkenine bağlı ξ -yarıçaplı açık top $B(x, \xi, t)$ kümesi için özel olarak $x = 0, \xi = 0,5$ ve $t = 1$ değerleri alınır ve $\sigma(x,y) = \max\{x,y\}$ olarak belirlenirse, bu durumda $F(0,y,1) > 0,5$ ve $G(0,y,1) < 0,5$ eşitsizliklerini sağlayan $y \in [-10,1]$ noktaları için $B(0,0,5,1)$ kümesi Şekil 5.1’de gösterilmiştir. Benzer şekilde $y \in [-10,10]$ için $F(0,y,1)$ ve $G(0,y,1)$ fonksiyonlarının davranışları ve (F,G) ile sınırlı bölge Şekil 5.2’de gösterilmiştir.



Şekil 5.1. $y \in [-10,1]$ noktaları için F ve G fonksiyonlarının davranışları



Şekil 5.2. $y \in [-10,10]$ için F ve G fonksiyonlarının davranışları

Örnek 5.1.10: $X = \mathbb{R}^+$, $h \geq 0$ ve $m > 0$ olsun. Her $u, v \in [0,1]$ için sürekli t-norm $u * v = uv$ ve t-conorm $u \Delta v = \min\{1, u + v\}$ şeklinde belirli olmak üzere $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için F ve G bulanık kümeleri,

$$F(x, y, t) = \frac{ht}{ht + m(\text{maks}\{x, y\})} \text{ ve } G(x, y, t) = \frac{m(\text{maks}\{x, y\})}{ht + m(\text{maks}\{x, y\})} \text{ şeklinde alınsın.}$$

Her $x, y \in X$ için $\sigma(x, y) = \text{maks}\{x, y\}$ ikili işlemi X üzerinde bir metrik benzeridir. Böylece Önerme 5.1.6'dan $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir sezgisel bulanık metrik benzeri uzaydır. Fakat her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için,

$F(x, x, t) = \frac{ht}{ht+mx} \neq 1$ ve $G(x, x, t) = \frac{mx}{ht+mx} \neq 0$ olduğundan bir sezgisel bulanık metrik uzay değildir.

Önerme 5.1.11: $X \neq \emptyset$ ve $\sigma(x, y)$ dönüşümü X üzerinde herhangi bir metrik benzeri dönüşüm olsun. Her $u, v \in [0, 1]$ için t-norm $u * v = uv$ ve t-conorm $u \Delta v = \min\{1, u + v\}$ şeklinde belirli olmak üzere, $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde her $x, y \in X$, $t > 0$ ve $n \geq 1$ için F ve G bulanık kümeleri $F(x, y, t) = e^{\frac{-\sigma(x, y)}{t^n}}$ ve $G(x, y, t) = 1 - e^{\frac{-\sigma(x, y)}{t^n}}$ şeklinde tanımlandığında $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir sezgisel bulanık metrik benzeri uzaydır.

Uyarı 5.1.12: Önerme 5.1.11’de sürekli t-norm $u * v = \min\{u, v\}$ ve t-conorm $u \Delta v = \max\{u, v\}$ alındığında da sağlanmaktadır.

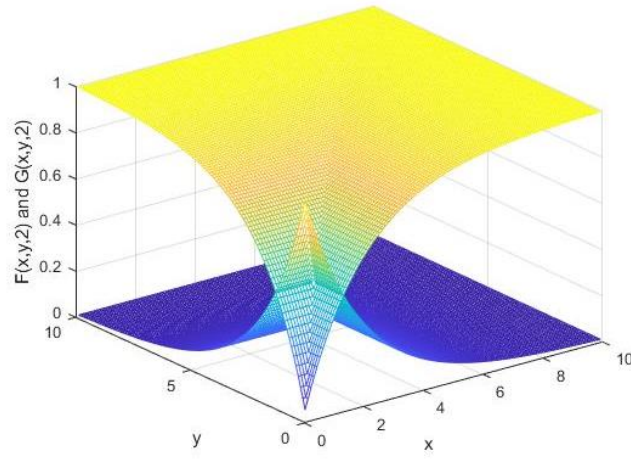
Örnek 5.1.13: $X = \mathbb{R}^+$, $u * v = uv$ ve $u \Delta v = \min\{1, u + v\}$ olsun. $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde F ve G bulanık kümeleri her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için,

$$F(x, y, t) = \frac{1}{e^{\frac{\max\{x, y\}}{t}}} \text{ ve } G(x, y, t) = \frac{e^{\frac{\max\{x, y\}}{t}} - 1}{e^{\frac{\max\{x, y\}}{t}}} \text{ şeklinde belirli olsun.}$$

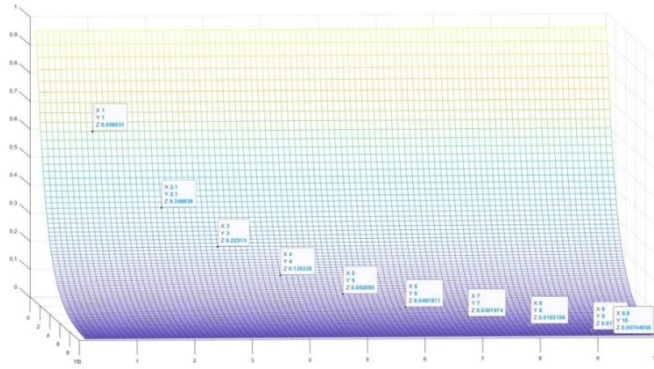
$\sigma(x, y) = \max\{x, y\}$ fonksiyonu X üzerinde bir metrik benzeri dönüşümdür ve böylece Önerme 5.1.6 gereğince $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir sezgisel bulanık metrik benzeri uzaydır. Fakat her $x > 0$ ve $t > 0$ için $F(x, x, t) = \frac{1}{e^{\frac{x}{t}}} \neq 1$ ve

$$G(x, x, t) = \frac{e^{\frac{x}{t}} - 1}{e^{\frac{x}{t}}} \neq 0 \text{ olduğundan } (X, F, G, *, \Delta) \text{ beşlisi bir sezgisel bulanık metrik uzay}$$

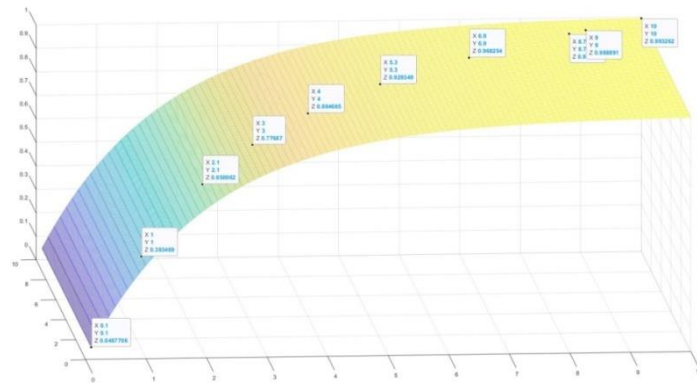
değildir. Gerçekten $x, y \in (0, 10]$ olmak üzere F ve G dönüşümlerinin farklı x ve y değerleri ve sabit bir $t = 2$ parametresi için 3-boyutlu grafik üzerinde gösterdikleri davranışlar Şekil 5.3’te F dönüşümü için mavi renk ve G dönüşümü için sarı renk ile gösterilmiştir. Benzer şekilde $x = y$ ve aynı sabit $t = 2$ parametresi altında 3-boyutlu grafik üzerinde gösterdikleri davranışlar ise sırasıyla F dönüşümü için Şekil 5.4 ve G dönüşümü için Şekil 5.5’te görülmektedir.



Şekil 5.3. $t = 2$ için $F(x, y, 2)$ ve $G(x, y, 2)$ 'nin grafiği



Şekil 5.4. $t = 2$ için $F(x, x, 2)$ 'nin grafiği



Şekil 5.5. $t = 2$ için $G(x, x, 2)$ 'nin grafiği

Örnek 5.1.14: $X = \mathbb{N}$ ve her $u, v \in [0,1]$ için sürekli t-norm ve sürekli t-conorm sırasıyla $u * v = uv$ ve $u \Delta v = \min\{1, u + v\}$ olsun. $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde F ve G bulanık kümeleri her $x, y \in X$ için,

$$F(x, y, t) = \begin{cases} \frac{x}{y^2} & x \leq y; \\ \frac{y}{x^2} & y \leq x. \end{cases}$$

$$G(x, y, t) = \begin{cases} \frac{y^2 - x}{y^2} & x \leq y; \\ \frac{x^2 - y}{x^2} & y \leq x. \end{cases}$$

şeklinde tanımlandığında $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir sezgisel bulanık metrik benzeri uzaydır. Fakat her $x > 1, t > 0$ için $F(x, x, t) = \frac{1}{x} \neq 1$ ve $G(x, x, t) = \frac{1}{x} \neq 0$ olduğundan sezgisel bulanık metrik uzay değildir.

İspat: $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisinin Tanım 5.1.1'deki özellikleri sağladığı gösterilmelidir.

$$(SBMB1) \ x \leq y \Rightarrow \frac{x}{y^2} + \frac{y^2 - x}{y^2} = \frac{y^2}{y^2} = 1 \leq 1 \text{ ve } y \leq x \Rightarrow \frac{y}{x^2} + \frac{x^2 - y}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1 \leq 1$$

olduğundan $F(x, y, t) + G(x, y, t) \leq 1$ sağlanır.

(SBMB2) $\forall x, y \in X$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ durumlarının her ikisinde de $F(x, y, t) > 0$ olmaktadır.

$$(SBMB3) \ x \leq y \text{ ve } F(x, y, t) = 1 \Rightarrow \frac{x}{y^2} = 1 \Rightarrow x = y^2 \Leftrightarrow x = y = 1$$

$$y \leq x \text{ ve } F(x, x, t) = 1 \Rightarrow \frac{y}{x^2} = 1 \Rightarrow y = x^2 \Leftrightarrow x = y = 1$$

olduğundan $F(x, y, t) = 1 \Rightarrow x = y$ elde edilir.

(SBMB4) $F(x, y, t) = F(y, x, t)$ olduğu açıktır.

(SBMB5) $F(x, y, t) * F(y, z, s) \leq F(x, z, t + s)$ olduğu gösterilmelidir.

$x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ olmak üzere, varsayalım ki $z \geq y \geq x$ olsun.

$u * v = uv$ olduğundan,

$$F(x, y, t) * F(y, z, s) = \frac{x}{y^2} \frac{y}{z^2} = \frac{x}{yz^2} \leq \frac{x}{z^2} = F(x, z, t + s)$$

olup, diğer durumlar benzer şekilde incelendiğinde de eşitsizliğin sağlandığı görülmektedir.

(SBMB6) $F(x, y, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ dönüşümünün sürekli olduğu gösterilmelidir.

$x, y \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ olmak üzere,

$$x \leq y \text{ iken } \lim_{t \rightarrow t_0} F(x, y, t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x}{y^2} = \frac{x}{y^2} = F(x, y, t_0)$$

$$y \leq x \text{ iken } \lim_{t \rightarrow t_0} F(x, y, t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y}{x^2} = \frac{y}{x^2} = F(x, y, t_0)$$

olup, F dönüşümü süreklidir.

(SBMB7) $F(x, y, t) + G(x, y, t) \leq 1$ olduğu (SBMB1)'den bilinmektedir. Buradan

$1 - F(x, y, t) \geq G(x, y, t)$ olup $F(x, y, t) > 0$ olduğundan $1 > G(x, y, t)$ elde edilir.

(SBMB8) $G(x, y, t) = 0$ olsun.

$$x \leq y \Rightarrow \frac{y^2 - x}{y^2} = 0 \Rightarrow y^2 - x = 0 \Rightarrow y^2 = x \Leftrightarrow y = x = 1$$

$$y \leq x \Rightarrow \frac{x^2 - y}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - y = 0 \Rightarrow x^2 = y \Leftrightarrow x = y = 1$$

Böylece $G(x, y, t) = 0 \Rightarrow x = y$ sağlanır.

(SBMB9) $G(x, y, t) = G(y, x, t)$ olduğu açıktır.

(SBMB10) $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ olmak üzere, varsayalım ki $x \leq y \leq z$ olsun.

$u \Delta v = \min\{1, u + v\} = 1$ ise eşitsizliğin sağlandığı açıktır.

$u \Delta v = \min\{1, u + v\} = u + v$ ise bu durumda,

$y \leq y^2 \Rightarrow y - x \leq y^2 - x$ elde edilir.

$$\Rightarrow y^2(y - x) \leq z^2(y - x) \leq z^2(y^2 - x)$$

$$\Rightarrow y^3 - xy^2 \leq z^2y^2 - xz^2$$

$$\Rightarrow \frac{y^3 - xy^2}{z^2y^2} \leq \frac{z^2y^2 - xz^2}{z^2y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{y - x}{z^2} \leq 1 - \frac{x}{y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{z^2} \leq 1 - \frac{x}{y^2} + \frac{x}{z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{z^2 - x}{z^2} \leq \frac{y^2 - x}{y^2} + \frac{z^2 - y}{z^2}$$

elde edilir. Böylece $G(x, z, t + s) \leq G(x, y, t) \Delta G(y, z, s)$ eşitsizliği sağlanır.

Diğer durumlar benzer şekilde incelendiğinde de eşitsizliğin sağlandığı görülmektedir.

(SBMB11) $G(x, y, \cdot): (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ dönüşümünün sürekli olduğu gösterilmelidir.

$x, y \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ olmak üzere,

$$x \leq y \text{ iken } \lim_{t \rightarrow t_0} G(x, y, t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y^2 - x}{y^2} = \frac{y^2 - x}{y^2} = G(x, y, t_0)$$

$$y \leq x \text{ iken } \lim_{t \rightarrow t_0} G(x, y, t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x^2 - y}{x^2} = \frac{x^2 - y}{x^2} = G(x, y, t_0)$$

olup, G dönüşümü süreklidir. □

Uyarı 5.1.15: Örnek 5.1.14'te t-norm $u * v = \max\{0, u + v - 1\}$ ve t-conormu $u \Delta v = u + v - uv$ şeklinde alındığında da sezgisel bulanık metrik benzeri uzay elde edilir. Fakat t-norm $u * v = \min\{u, v\}$ ve t-conorm $u \Delta v = \max\{u, v\}$ alındığında, $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir sezgisel bulanık metrik benzeri uzay değildir.

Tanım 5.1.16: $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir sezgisel bulanık metrik benzeri uzay ve (x_n) X 'de bir dizi olsun.

i) $\forall t > 0$ için eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = F(x, x, t)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n, x, t) = G(x, x, t)$ olacak şekilde bir $x \in X$ mevcut ise (x_n) dizisi $x \in X$ 'e yakınsaktır denir.

ii) $\forall t > 0, p \geq 1$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n+p}, x_n, t)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_{n+p}, x_n, t)$ limitleri var ve sonlu ise (x_n) dizisi X 'de bir G-Cauchy dizisidir denir.

iii) $\forall t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F(x_n, x_m, t) = 1$ ve $\lim_{n, m \rightarrow \infty} G(x_n, x_m, t) = 0$ eşitlikleri sağlanıyorsa (x_n) dizisi X 'de bir M-Cauchy dizisidir denir.

iv) Eğer X 'de her (x_n) G-Cauchy dizisi bir $x \in X$ 'e yakınsak öyle ki her $t > 0, p \geq 1$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = F(x, x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n+p}, x_n, t)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n, x, t) = G(x, x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} G(x_{n+p}, x_n, t)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir G-tam sezgisel bulanık metrik benzeri uzaydır.

v) Eğer X 'de her (x_n) M-Cauchy dizisi bir $x \in X$ 'e yakınsak öyle ki her $t > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = F(x, x, t) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} F(x_n, x_m, t)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n, x, t) = G(x, x, t) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} G(x_n, x_m, t)$$

sağlanıyorsa $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir M-tam sezgisel bulanık metrik benzeri uzaydır.

Not 5.1.17: Tezin devamında M(G)-Cauchy ve M(G)-tamlik kavramları hakkında detaylı bilgilere yer verilmiştir. M-Cauchy ve M-tamlik, G-Cauchy ve G-tamlıktan daha genel kavramlar olduğundan, bu kısımda elde edilen sonuçlar G-Cauchy ve G-tamlık tanımları referans alınarak yapılmıştır. G-Cauchy ve G-tamlık terimleri yerine kısaca Cauchy ve tam ifadeleri kullanılmıştır.

Uyarı 5.1.18: Bir sezgisel bulanık metrik benzeri uzayda yakınsak bir dizinin limiti tek olmayabilir. Örneğin Örnek 5.1.10'da $m = h = 1$ ve X 'de (x_n) dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n) = (1 + \frac{n}{n-1})$ şeklinde tanımlanırsa her $t > 0$ için $x \geq 2$ iken,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = \frac{t}{t + \max\{x_n, x\}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{t + x} = F(x, x, t)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n, x, t) = \frac{\max\{x_n, x\}}{t + \max\{x_n, x\}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{t + x} = G(x, x, t)$$

olup, böylece bu şekilde belirlenen (x_n) dizisi $x \geq 2$ olan her $x \in X$ elemanına yakınsar ve bu noktalar eşit benzeri noktalar olur.

Uyarı 5.1.19: Bir sezgisel bulanık metrik benzeri uzayda, yakınsak bir dizi Cauchy dizisi olmayabilir. Benzer şekilde Örnek 5.1.10'da, $m = h = 1$ ve X 'de (x_n) dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n) = (-1)^n$ şeklinde tanımlanırsa, her $t > 0$ için $x \geq 1$ iken

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = \frac{t}{t + \max\{x_n, x\}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{t + x} = F(x, x, t)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n, x, t) = \frac{\max\{x_n, x\}}{t + \max\{x_n, x\}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{t + x} = G(x, x, t)$$

olup, böylece bu şekilde belirlenen (x_n) dizisi $x \geq 1$ olan her $x \in X$ elemanına yakınsar fakat $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n+p}, x_n, t)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_{n+p}, x_n, t)$ limitleri var olmadığından bu dizi bir Cauchy dizisi değildir.

5.2. Sezgisel Bulanık Metrik Benzeri Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde ilk olarak sezgisel bulanık metrik benzeri uzayda daralma dönüşümü tanımlanmış, ardından teoremler ve çeşitli örnekler ile elde edilen sonuçlar desteklenmiştir.

Tanım 5.2.1: $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir sezgisel bulanık metrik benzeri uzay olsun. Eğer en az bir $\lambda \in (0, 1)$ vardır öyle ki her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için,

$$\frac{1}{F(T(x), T(y), t)} - 1 \leq \lambda \left[\frac{1}{F(x, y, t)} - 1 \right] \text{ ve } G(T(x), T(y), t) \leq \lambda G(x, y, t)$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa $T: X \rightarrow X$ dönüşümüne bir sezgisel bulanık daralma dönüşümü denir. Burada λ sabiti T 'nin sezgisel bulanık daralma sabiti olarak adlandırılır.

Teorem 5.2.2: $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir tam sezgisel bulanık metrik benzeri uzay olsun. λ , T 'nin sezgisel bulanık daralma sabiti olmak üzere $T: X \rightarrow X$ bir sezgisel bulanık daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümü her $t > 0$ için, $F(a, a, t) = 1$ ve $G(a, a, t) = 0$ olacak şekilde tek bir $a \in X$ sabit noktaya sahiptir.

İspat: Bir $x_0 \in X$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$x_1 = T(x_0), x_2 = T(x_1), \dots, x_n = T(x_{n-1})$ kuralıyla belirli $(x_n) \subset X$ dizisi tanımlansın. Eğer bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x_{n-1}$ ise bu durumda x_n T 'nin bir sabit noktasıdır. Şimdi varsayalım ki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n-1}$ olsun. $t > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için Tanım 5.2.1'den,

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(x_n, x_{n+1}, t)} - 1 &= \frac{1}{F(T(x_{n-1}), T(x_n), t)} - 1 \\ &\leq \lambda \left[\frac{1}{F(x_{n-1}, x_n, t)} - 1 \right] \leq \frac{\lambda}{F(x_{n-1}, x_n, t)} - \lambda \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

$F(x_n, x_{n+1}, t) = F_n(t)$ ve $1 - \lambda = k$ alınırsa,

$\forall t > 0$ için $\frac{1}{F_n(t)} \leq \frac{\lambda}{F_{n-1}(t)} + k$ elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğe devam edilmesi halinde,

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_n(t)} &\leq \frac{\lambda^n}{f_0(t)} + \lambda^{n-1}k + \lambda^{n-2}k + \dots + k \leq \frac{\lambda^n}{f_0(t)} + (\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \dots + 1)k \\ &\leq \frac{\lambda^n}{f_0(t)} + 1 - \lambda^n \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan her $t > 0, n \in \mathbb{N}$ için,

$$\frac{1}{\frac{\lambda^n}{f_0(t)} + 1 - \lambda^n} \leq F_n(t) \tag{5.1}$$

elde edilir. $p \geq 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} F(x_{n+p}, x_n, t) &\geq F\left(x_{n+1}, x_n, \frac{t}{2}\right) * F\left(x_{n+1}, x_{n+p}, \frac{t}{2}\right) \\ &\geq F\left(x_{n+1}, x_n, \frac{t}{2}\right) * F\left(x_{n+1}, x_{n+2}, \frac{t}{2^2}\right) * F\left(x_{n+2}, x_{n+p}, \frac{t}{2^2}\right) \\ &\geq F\left(x_{n+1}, x_n, \frac{t}{2}\right) * F\left(x_{n+1}, x_{n+2}, \frac{t}{2^2}\right) * \\ &\dots \\ &* F\left(x_{n+p-2}, x_{n+p-1}, \frac{t}{2^{p-1}}\right) * F\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, \frac{t}{2^{p-1}}\right) \\ &= F_n\left(\frac{t}{2}\right) * F_{n+1}\left(\frac{t}{2^2}\right) * \dots * F_{n+p-2}\left(\frac{t}{2^{p-1}}\right) * F_{n+p-1}\left(\frac{t}{2^{p-1}}\right) \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned} &* F\left(x_{n+p-2}, x_{n+p-1}, \frac{t}{2^{p-1}}\right) * F\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, \frac{t}{2^{p-1}}\right) \\ &= F_n\left(\frac{t}{2}\right) * F_{n+1}\left(\frac{t}{2^2}\right) * \dots * F_{n+p-2}\left(\frac{t}{2^{p-1}}\right) * F_{n+p-1}\left(\frac{t}{2^{p-1}}\right) \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizlikte Eşitsizlik (5.1) kullanılarak,

$$\begin{aligned} F(x_{n+p}, x_n, t) &\geq \frac{1}{\frac{\lambda^n}{f_0\left(\frac{t}{2}\right)} + 1 - \lambda^n} * \frac{1}{\frac{\lambda^{n+1}}{f_0\left(\frac{t}{2^2}\right)} + 1 - \lambda^{n+1}} * \dots * \frac{1}{\frac{\lambda^{n+p-1}}{f_0\left(\frac{t}{2^{p-1}}\right)} + 1 - \lambda^{n+p-1}} \\ &\geq \frac{1}{\frac{\lambda^n}{f_0\left(\frac{t}{2}\right)} + 1} * \frac{1}{\frac{\lambda^{n+1}}{f_0\left(\frac{t}{2^2}\right)} + 1} * \dots * \frac{1}{\frac{\lambda^{n+p-1}}{f_0\left(\frac{t}{2^{p-1}}\right)} + 1} \end{aligned}$$

Burada $\lambda \in (0,1)$ olup, sürekli t-normun özelliği kullanılarak, yukarıdaki ifadeden her $t > 0, p \geq 1$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n+p}, x_n, t) = 1$ elde edilir.

Bir $n \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için benzer şekilde Tanım 5.2.1'den,

$G(T(x_n), T(x_{n+1}), t) \leq \lambda G(x_n, x_{n+1}, t)$ elde edilir. $T(x_n) = x_{n+1}$ olduğundan

$G(x_{n+1}, x_{n+2}, t) = G(T(x_n), T(x_{n+1}), t) \leq \lambda G(x_n, x_{n+1}, t)$ bulunur.

$G(x_{n+1}, x_{n+2}, t) = G_n(t)$ ve $1 - \lambda = k$ alınırsa yukarıdaki eşitsizlikten

$G_n(t) \leq \lambda G_{n-1}(t) = (1 - k)G_{n-1}(t) = G_{n-1}(t) - kG_{n-1}(t)$ elde edilir.

Bu eşitsizliğin tekrarlı uygulanmasıyla,

$$\begin{aligned}
G_n(t) &\leq G_{n-1}(t) - kG_{n-1}(t) \\
&\leq (1-k)G_{n-2}(t) - (1-k)kG_{n-2}(t) \\
&\leq (1-k)^2G_{n-3}(t) - (1-k)^2kG_{n-3}(t) \\
&\dots \\
&\leq (1-k)^{n-1}G_0(t) - (1-k)^{n-1}kG_0(t) \\
&= (1-k)^{n-1}[G_0(t) - kG_0(t)] \\
&= \lambda^{n-1}[G_0(t) - kG_0(t)]
\end{aligned}$$

olup, böylece her $t > 0, n \in \mathbb{N}$ için

$$G_n(t) \leq \lambda^{n-1}[G_0(t) - kG_0(t)] \quad (5.2)$$

elde edilir. Şimdi $p \geq 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned}
G(x_{n+p}, x_n, t) &\leq G\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) \Delta G\left(x_{n+1}, x_{n+p}, \frac{t}{2}\right) \\
&\leq G\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) \Delta G\left(x_{n+1}, x_{n+2}, \frac{t}{2^2}\right) \Delta G\left(x_{n+2}, x_{n+p}, \frac{t}{2^2}\right) \\
&\leq G\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) \Delta G\left(x_{n+1}, x_{n+2}, \frac{t}{2^2}\right) \Delta \dots \\
&\Delta G\left(x_{n+p-2}, x_{n+p-1}, \frac{t}{2^{p-1}}\right) \Delta G\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, \frac{t}{2^{p-1}}\right)
\end{aligned}$$

Eşitsizlik (5.2) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
G(x_{n+p}, x_n, t) &\leq G_{n-1}\left(\frac{t}{2}\right) \Delta G_n\left(\frac{t}{2^2}\right) \Delta \dots \Delta G_{n+p-3}\left(\frac{t}{2^{p-1}}\right) \Delta G_{n+p-2}\left(\frac{t}{2^{p-1}}\right) \\
&\leq \lambda^{n-2} \left[G_0\left(\frac{t}{2}\right) - kG_0\left(\frac{t}{2}\right) \right] \Delta \lambda^{n-1} \left[G_0\left(\frac{t}{2^2}\right) - kG_0\left(\frac{t}{2^2}\right) \right] \Delta \dots
\end{aligned}$$

$$\Delta \lambda^{n+p-4} \left[G_0 \left(\frac{t}{2^{p-1}} \right) - kG_0 \left(\frac{t}{2^{p-1}} \right) \right] \Delta \lambda^{n+p-3} \left[G_0 \left(\frac{t}{2^{p-1}} \right) - kG_0 \left(\frac{t}{2^{p-1}} \right) \right]$$

Burada $\lambda \in (0, 1)$ olmak üzere, sürekli t-conormun özelliğinden $\forall t > 0$ ve $p \geq 1$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_{n+p}, x_n, t) = 0$ elde edilir. Böylece her $t > 0$ ve $p \geq 1$ için,

$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n+p}, x_n, t) = 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_{n+p}, x_n, t) = 0$ olduğundan (x_n) dizisinin $(X, F, G, *, \Delta)$ 'da bir Cauchy dizisi olduğu görülür.

$(X, F, G, *, \Delta)$ bir tam sezgisel bulanık metrik benzeri uzay olduğundan, en az bir $a \in X$ vardır öyle ki $\forall t > 0$ ve $p \geq 1$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, a, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n+p}, x_n, t) = F(a, a, t) = 1 \quad (5.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n, a, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} G(x_{n+p}, x_n, t) = G(a, a, t) = 0 \quad (5.4)$$

elde edilir.

Şimdi $a \in X$ 'nin T 'nin bir sabit noktası olduğu gösterilmelidir. Bunun için Tanım 5.2.1'den,

$$\frac{1}{F(T(x_n), T(a), t)} - 1 \leq \lambda \left[\frac{1}{F(x_n, a, t)} - 1 \right] = \frac{\lambda}{F(x_n, a, t)} - \lambda$$

$$\frac{1}{\frac{\lambda}{F(x_n, a, t)} + 1 - \lambda} \leq F(T(x_n), T(a), t)$$

ve

$$G(T(x_n), T(a), t) \leq \lambda G(x_n, a, t) \text{ elde edilir.}$$

Yukarıdaki elde edilen son eşitsizlikler kullanılarak,

$$F(a, T(a), t) \geq F\left(a, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) * F\left(x_{n+1}, T(a), \frac{t}{2}\right)$$

$$= F\left(a, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) * F\left(T(x_n), T(a), \frac{t}{2}\right)$$

$$\geq F\left(a, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) * \frac{1}{\frac{\lambda}{F\left(x_n, a, \frac{t}{2}\right)} + 1 - \lambda}$$

ve

$$\begin{aligned} G(a, T(a), t) &\leq G\left(a, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) \Delta G\left(x_{n+1}, T(a), \frac{t}{2}\right) \\ &= G\left(a, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) \Delta G\left(T(x_n), T(a), \frac{t}{2}\right) \\ &\leq G\left(a, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) \Delta \lambda G(x_n, a, t) \text{ olduğu görülür.} \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ için limit alınır ve yukarıdaki Eşitlik (5.3) ve (5.4) uygulanırsa,

$F(a, T(a), t) = 1$ ve $G(a, T(a), t) = 0$ elde edilir ki bu $T(a) = a$ olmasıdır.

Böylece $a \in X$ T 'nin bir sabit noktası olup her $t > 0$ için $F(a, a, t) = 1$ ve $G(a, a, t) = 0$ elde edilir. Şimdi a 'nın T 'nin tek bir sabit noktası olduğu gösterilmelidir. Varsayalım ki $b \in X$ T 'nin diğer bir sabit noktası olsun öyle ki bir $t > 0$ için $F(a, b, t) < 1$ ve $G(a, b, t) > 0$ sağlansın. Tanım 5.2.1'den,

$$\frac{1}{F(a, b, t)} - 1 = \frac{1}{F(T(a), T(b), t)} - 1 \leq \lambda \left[\frac{1}{F(a, b, t)} - 1 \right] < \frac{1}{F(a, b, t)} - 1$$

$G(a, b, t) = G(T(a), T(b), t) \leq \lambda G(a, b, t) < G(a, b, t)$ olur.

Bu ise bir çelişkidir. Her $t > 0$ için $F(a, b, t) = 1$ ve $G(a, b, t) = 0$ olduğundan $a = b$ elde edilir. Böylece, $a \in X$ T 'nin bir tek sabit noktasıdır. $\square$

Örnek 5.2.3: $X = [0, 2]$, $*$ ve Δ ise sırasıyla $u * v = uv$ ve $u \Delta v = \max\{u, v\}$ şeklinde tanımlansın. $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde F ve G bulanık kümeleri her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için, $F(x, y, t) = e^{\frac{-\max\{x, y\}}{t}}$ ve $G(x, y, t) = 1 - e^{\frac{-\max\{x, y\}}{t}}$ şeklinde belirli olsun. Bu takdirde $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir tam sezgisel bulanık metrik benzeri uzaydır.

$$\text{Eğer } T : X \rightarrow X ; T(x) = \begin{cases} 0, & x = 1; \\ \frac{x}{2}, & x \in (0,1]; \\ \frac{x}{4}, & x \in (1,2]. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, aşağıdaki dokuz durum elde edilir. Bunlar;

Durum 1: Eğer $x = y = 1 \Rightarrow T(x) = T(y) = 0$.

Durum 2: Eğer $x = 1$ ve $y \in [0,1) \Rightarrow T(x) = 0, T(y) = \frac{y}{2}$.

Durum 3: Eğer $x = 1$ ve $y \in (1,2] \Rightarrow T(x) = 0, T(y) = \frac{y}{4}$.

Durum 4: Eğer $x \in [0,1)$ ve $y \in (1,2] \Rightarrow T(x) = \frac{x}{2}, T(y) = \frac{y}{4}$.

Durum 5: Eğer $x \in [0,1)$ ve $y \in [0,1) \Rightarrow T(x) = \frac{x}{2}, T(y) = \frac{y}{2}$.

Durum 6: Eğer $x \in [0,1)$ ve $y = 1 \Rightarrow T(x) = \frac{x}{2}, T(y) = 0$.

Durum 7: Eğer $x \in (1,2]$ ve $y = 1 \Rightarrow T(x) = \frac{x}{4}, T(y) = 0$.

Durum 8: Eğer $x \in (1,2]$ ve $y \in (1,2] \Rightarrow T(x) = \frac{x}{4}, T(y) = \frac{y}{4}$.

Durum 9: Eğer $x \in (1,2]$ ve $y \in [0,1) \Rightarrow T(x) = \frac{x}{4}, T(y) = \frac{y}{2}$.

Yukarıdaki durumların tümünde Tanım 5.2.1’de verilen sezgisel bulanık daralma dönüşümünün sağlandığı görülür. Böylece $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ daralma sabitiyle birlikte T bir sezgisel bulanık daralma dönüşümüdür ve Teorem 5.2.2’nin tüm koşulları sağlanır. $0 \in X$, T ’nin tek sabit noktasıdır ve her $t > 0$ için $F(0,0,t) = 1$, $G(0,0,t) = 0$ olur.

Eğer her $x, y \in X, t > 0$ için X üzerinde bulanık kümeler $F(x,y,t) = e^{\frac{-(1+d(x,y))}{t}}$ ve $G(x,y,t) = 1 - e^{\frac{-(1+d(x,y))}{t}}$ şeklinde tanımlanırsa T dönüşümü bir sezgisel bulanık daralma dönüşümü değildir. Burada her $x, y \in X$ için (X,d) klasik metrik uzay ve $\sigma(x,y) = 1 + d(x,y)$ şeklinde tanımlanan σ dönüşümü X üzerinde metrik benzeri dönüşümdür.

$d(x, y) = |x - y|$ ve $x = y = 0$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(T(x), T(y), t)} - 1 &\leq \lambda \left[\frac{1}{F(x, y, t)} - 1 \right] \\ \Rightarrow \frac{1}{e^{\frac{-(1+|T(x)-T(y)|)}{t}}} - 1 &\leq \lambda \left[\frac{1}{e^{\frac{-(1+|x-y|)}{t}}} - 1 \right] \\ \Rightarrow e^{\frac{1+|T(x)-T(y)|}{t}} - 1 &\leq \lambda \left[e^{\frac{1+|x-y|}{t}} - 1 \right] \Rightarrow e^{\frac{1}{t}} - 1 \leq \lambda \left[e^{\frac{1}{t}} - 1 \right] \Rightarrow 1 \leq \lambda \end{aligned}$$

olup, yukarıdaki eşitsizliği sağlayan hiçbir $\lambda \in (0, 1)$ yoktur.

Sonuç 5.2.4: $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir tam sezgisel bulanık metrik benzeri uzay ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü $\lambda \in (0, 1)$ olmak üzere her $x, y \in X, t > 0$ ve bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan bir dönüşüm olsun.

$$\frac{1}{F(T^n(x), T^n(y), t)} - 1 \leq \lambda \left[\frac{1}{F(x, y, t)} - 1 \right]$$

$$G(T^n(x), T^n(y), t) \leq \lambda G(x, y, t)$$

Bu durumda T tek bir $a \in X$ sabit noktaya sahiptir ve her $t > 0$ için

$$F(a, a, t) = 1, G(a, a, t) = 0 \text{ dır.}$$

İspat: Teorem 5.2.2'den her $t > 0$ için $F(a, a, t) = 1, G(a, a, t) = 0$ olduğundan, $a \in X, T$ 'nin tek sabit noktasıdır. $T^n(T(a)) = T(T^n(a)) = T(a)$ olduğundan $T(a)$ 'da T^n 'nin bir sabit noktasıdır ve böylece T 'nin sabit noktası tektir. $\square$

Teorem 5.2.5: $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir tam sezgisel bulanık metrik benzeri uzay ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü λ daralma sabiti ile birlikte bir sezgisel bulanık daralma dönüşümü olsun. Varsayalım ki en az bir $a \in X$ vardır öyle ki her $x \in X$ ve $t > 0$ için $F(a, T(a), t) \geq F(x, T(x), t)$ ve $G(a, T(a), t) \leq G(x, T(x), t)$ olsun. Bu durumda, $a \in X, T$ 'nin tek sabit noktasıdır ve her $t > 0$ için $F(a, a, t) = 1, G(a, a, t) = 0$ dır.

İspat: Her $x \in X$ ve $t > 0$ için $F_x(t) = F(x, T(x), t)$ ve $G_x(t) = G(x, T(x), t)$ olsun. Hipotezden her $x \in X$ ve $t > 0$ için $F_a(t) \geq F_x(t)$ ve $G_a(t) \leq G_x(t)$ elde edilir.

Aslında, bir $t > 0$ için $F_a(t) = F(a, T(a), t) < 1$ ve $G_a(t) = G(a, T(a), t) > 0$ olup Tanım 5.2.1'den,

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_{T(a)}(t)} - 1 &= \frac{1}{F(T(a), T(T(a)), t)} - 1 \\ &\leq \lambda \left[\frac{1}{F(a, T(a), t)} - 1 \right] = \lambda \left[\frac{1}{F_a(t)} - 1 \right] < \frac{1}{F_a(t)} - 1 \end{aligned}$$

elde edilir ve benzer şekilde

$$G_{T(a)}(t) = G(T(a), T(T(a)), t) \leq \lambda$$

$$G(a, T(a), t) = \lambda G_a(t) < G_a(t) \text{ elde edilir.}$$

Böylece $F_a(t) < F_{T(a)}(t)$ ve $G_{T(a)}(t) < G_a(t)$ olup $T(a) \in X$ bulunur ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak her $t > 0$ için

$$F_x(t) = F(a, T(a), t) = 1 \text{ ve } G_x(t) = G(a, T(a), t) = 0 \text{ elde edilir.}$$

Böylece $T(a) = a$ olup Teorem 5.2.2'nin ispatına benzer şekilde T 'nin sabit noktasının tek olduğu görülebilir. Eğer bir $t > 0$ için $F(a, a, t) < 1$ ve $G(a, a, t) > 0$ ise Tanım 5.2.1'den,

$$\frac{1}{F(a, a, t)} - 1 = \frac{1}{F(T(a), T(a), t)} - 1 \leq \lambda \left[\frac{1}{F(a, a, t)} - 1 \right] < \frac{1}{F(a, a, t)} - 1$$

$$G(a, a, t) = G(T(a), T(a), t) \leq \lambda G(a, a, t) < G(a, a, t)$$

olup, çelişki elde edilir. Böylece $F(a, a, t) = 1, G(a, a, t) = 0$ olduğu görülür. $\square$

Örnek 5.2.6: $X = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ve sürekli t-norm ile sürekli t-conormu

$u * v = \max\{u + v - 1, 0\}$ ve $u \Delta v = \min\{u + v, 1\}$ şeklinde alalım. Her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için F ve G bulanık kümeleri $F(x, y, t) = 1 - \frac{\max\{x, y\}}{1+t}$ ve $G(x, y, t) = \frac{\max\{x, y\}}{1+t}$ olsun. Bu durumda $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir sezgisel bulanık metrik benzeri uzaydır fakat tam değildir.

Gerçekten $T : X \rightarrow X$ dönüşümünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$T(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cap Q; \\ \frac{x}{2}, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \cap Q. \end{cases}$$

$\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ sezgisel bulanık daralma sabiti ile birlikte T bir sezgisel bulanık daralma dönüşümüdür. Burada her $x \in X$ ve $t > 0$ için

$$F(0, T(0), t) = F(0, 0, t) = 1 \geq F(x, T(x), t)$$

$$G(0, T(0), t) = G(0, 0, t) = 0 \leq G(x, T(x), t) \text{ 'dır.}$$

Böylece Teorem 5.2.5'in tüm koşulları sağlanır ve $0 \in X$, T 'nin tek sabit noktasıdır.

Burada aşağıdaki sekiz durum elde edilir.

Durum 1: Eğer $x = y = 0 \Rightarrow T(x) = T(y) = 0$.

Durum 2: Eğer $x = 0, y = 1 \Rightarrow T(x) = 0, T(y) = \frac{1}{2}$.

Durum 3: Eğer $x = 1, y = 0 \Rightarrow T(x) = \frac{1}{2}, T(y) = 0$.

Durum 4: Eğer $x = y = 1 \Rightarrow T(x) = \frac{1}{2}, T(y) = \frac{1}{2}$.

Durum 5: Eğer $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cap Q, y \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cap Q \Rightarrow T(x) = \frac{x}{4}, T(y) = \frac{y}{4}$.

Durum 6: Eğer $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cap Q, y \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cap Q \Rightarrow T(x) = \frac{x}{4}, T(y) = \frac{y}{2}$.

Durum 7: Eğer $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cap Q, y \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cap Q \Rightarrow T(x) = \frac{x}{2}, T(y) = \frac{y}{2}$.

Durum 8: Eğer $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cap Q, y \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cap Q \Rightarrow T(x) = \frac{x}{2}, T(y) = \frac{y}{4}$.

Yukarıdaki tüm durumlar Tanım 5.2.1'de yer alan sezgisel bulanık metrik benzeri uzaylardaki daralma dönüşümü koşullarını sağlar. Böylece T dönüşümü $\lambda \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$

daralma sabiti ile birlikte bir sezgisel bulanık daralma dönüşümüdür. Dahası her $x \in X$ ve $t > 0$ için,

$$F(0, T(0), t) = 1 - \frac{\max\{0, 0\}}{1+t} = 1 \geq F(x, T(x), t)$$

$$G(0, T(0), t) = \frac{\max\{0, 0\}}{1+t} = 0 \leq G(x, T(x), t)$$

eşitsizlikleri sağlanır ve $0 \in X$ T 'nin tek sabit noktasıdır ve her $t > 0$ için

$$F(0, 0, t) = 1, G(0, 0, t) = 0 \text{ 'dır.} \quad \square$$

Teorem 5.2.7: $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir tam sezgisel bulanık metrik benzeri uzay ve her $x, y \in X$ için $\lim_{t \rightarrow \infty} F(x, y, t) = 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, y, t) = 0$ ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü $k \in (0, 1)$ olmak üzere her $x, y \in X, t > 0$ için

$$F(T(x), T(y), kt) \geq F(x, y, t) \text{ ve } G(T(x), T(y), kt) \leq G(x, y, t)$$

koşullarını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T tek bir $a \in X$ sabit noktaya sahiptir ve her $t > 0$ için $F(a, a, t) = 1, G(a, a, t) = 0$ 'dır.

İspat: $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir tam sezgisel bulanık metrik benzeri uzay olsun. Bir $x_0 \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$x_1 = T(x_0), x_2 = T^2(x_0) = T(x_1), \dots, x_n = T^n(x_0) = T(x_{n-1})$ kuralıyla belirli $(x_n) \subset X$ dizisi tanımlansın. Eğer bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x_{n-1}$ ise bu durumda x_n T 'nin bir sabit noktasıdır. Varsayalım ki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n-1}$ olsun. $t > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için hipotezde belirtilen koşullardan her $n \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için,

$$F(x_n, x_{n+1}, t) = F(T(x_{n-1}), T(x_n), t) \geq F\left(x_{n-1}, x_n, \frac{t}{k}\right)$$

$$G(x_n, x_{n+1}, t) = G(T(x_{n-1}), T(x_n), t) \leq G\left(x_{n-1}, x_n, \frac{t}{k}\right)$$

elde edilir.

$$F(x_n, x_{n+1}, t) = F_n(t) \text{ ve } G(x_n, x_{n+1}, t) = G_n(t)$$

olarak belirlenir ve yukarıdaki ifade tekrarlı olarak uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
F_n(t) &= F(x_n, x_{n+1}, t) \geq F(x_n, x_{n+1}, kt) = F(T(x_{n-1}), T(x_n), kt) \geq F(x_{n-1}, x_n, t) \\
&= F(T(x_{n-2}), T(x_{n-1}), t) \geq F\left(x_{n-2}, x_{n-1}, \frac{t}{k}\right) \geq \dots \geq F\left(x_0, x_1, \frac{t}{k^n}\right) \\
&\Rightarrow F_n(t) \geq F_0\left(\frac{t}{k^n}\right)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için

$$G_n(t) \leq G_0\left(\frac{t}{k^n}\right) \tag{5.6}$$

eşitsizliği elde edilir. $n \in \mathbb{N}$ ve $p \geq 1$ ise bu durumda,

$$\begin{aligned}
F(x_{n+p}, x_n, t) &\geq F\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) * F\left(x_{n+1}, x_{n+p}, \frac{t}{2}\right) \\
&\geq F\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) * F\left(x_{n+1}, x_{n+2}, \frac{t}{2^2}\right) * F\left(x_{n+2}, x_{n+p}, \frac{t}{2^2}\right) \\
&\geq F\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) * F\left(x_{n+1}, x_{n+2}, \frac{t}{2^2}\right) * \dots * F\left(x_{n+p-2}, x_{n+p-1}, \frac{t}{2^{p-1}}\right) \\
&\quad * F\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, \frac{t}{2^{p-1}}\right) \\
&= F_n\left(\frac{t}{2}\right) * F_{n+1}\left(\frac{t}{2^2}\right) * \dots * F_{n+p-2}\left(\frac{t}{2^{p-1}}\right) * F_{n+p-1}\left(\frac{t}{2^{p-1}}\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
G(x_{n+p}, x_n, t) &\leq G\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) \Delta G\left(x_{n+1}, x_{n+p}, \frac{t}{2}\right) \\
&\leq G\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) \Delta G\left(x_{n+1}, x_{n+2}, \frac{t}{2^2}\right) \Delta G\left(x_{n+2}, x_{n+p}, \frac{t}{2^2}\right) \\
&\leq G\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) \Delta G\left(x_{n+1}, x_{n+2}, \frac{t}{2^2}\right) \Delta \dots \Delta G\left(x_{n+p-2}, x_{n+p-1}, \frac{t}{2^{p-1}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Delta G \left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, \frac{t}{2^{p-1}} \right) \\ &= G_n \left(\frac{t}{2} \right) \Delta G_{n+1} \left(\frac{t}{2^2} \right) \Delta \dots \Delta G_{n+p-2} \left(\frac{t}{2^{p-1}} \right) \Delta G_{n+p-1} \left(\frac{t}{2^{p-1}} \right) \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizliklerde sırasıyla elde edilen Eşitsizlik (5.5) ve (5.6) uygulanırsa,

$$\begin{aligned} F(x_{n+p}, x_n, t) &\geq F_0 \left(\frac{t}{2k^n} \right) * F_0 \left(\frac{t}{2^2 k^{n+1}} \right) * \dots * F_0 \left(\frac{t}{2^{p-1} k^{n+p-1}} \right) \\ G(x_{n+p}, x_n, t) &\geq G_0 \left(\frac{t}{2k^n} \right) \Delta G_0 \left(\frac{t}{2^2 k^{n+1}} \right) \Delta \dots \Delta G_0 \left(\frac{t}{2^{p-1} k^{n+p-1}} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $0 < k < 1$ olduğundan $\lim_{t \rightarrow \infty} F(x, y, t) = 1$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, y, t) = 0$ ve sürekli t-norm ve sürekli t-conormun özelliğinden yukarıdaki son ifadeden her $t > 0$, $p \geq 1$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n+p}, x_n, t) = 1 * 1 * \dots * 1 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_{n+p}, x_n, t) = 0 \Delta 0 \Delta \dots \Delta 0 = 0$$

elde edilir. Böylece (x_n) dizisi $(X, F, G, *, \Delta)$ SBMBU'da bir Cauchy dizisidir ve $(X, F, G, *, \Delta)$ bir tam sezgisel bulanık metrik benzeri uzay olduğundan en az bir $a \in X$ vardır öyle ki her $t > 0, p \geq 1$ için aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, a, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n+p}, x_n, t) = F(a, a, t) = 1 \quad (5.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n, a, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} G(x_{n+p}, x_n, t) = G(a, a, t) = 0 \quad (5.8)$$

Şimdi $a \in X$ 'in T 'nin sabit noktası olduğu gösterilmelidir.

Bunu göstermek için, her $n \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için aşağıdaki şekilde devam edilirse, hipotezden

$$\begin{aligned} F(a, T(a), t) &\geq F \left(a, x_{n+1}, \frac{t}{2} \right) * F \left(x_{n+1}, T(a), \frac{t}{2} \right) \\ &= F \left(a, x_{n+1}, \frac{t}{2} \right) * F \left(T(x_n), T(a), \frac{t}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\geq F\left(a, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) * F\left(x_n, a, \frac{t}{2k}\right)$$

ve

$$\begin{aligned} G(a, T(a), t) &\leq G\left(a, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) \Delta G\left(x_{n+1}, T(a), \frac{t}{2}\right) \\ &= G\left(a, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) \Delta G\left(T(x_n), T(a), \frac{t}{2}\right) \\ &\leq G\left(a, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) \Delta G\left(x_n, a, \frac{t}{2k}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için Eşitlik (5.7) ve (5.8) kullanılarak limit hesaplanırsa, $F(a, T(a), t) = 1$ ve $G(a, T(a), t) = 0$ bulunur. Böylece $a \in X$ T 'nin sabit noktasıdır ve her $t > 0$ için $F(a, a, t) = 1$ ve $G(a, a, t) = 0$ 'dır. Sabit noktanın tekliğini göstermek için, varsayalım ki b T 'nin bir başka sabit noktası olsun.

Hipotezdeki koşullar kullanılarak,

$$F(a, b, t) = F(T(a), T(b), t) \geq F(a, b, \frac{t}{k})$$

$$G(a, b, t) = G(T(a), T(b), t) \leq G(a, b, \frac{t}{k})$$

elde edilir. Bu durumda her $t > 0$ için,

$$F(a, b, t) \geq F(a, b, \frac{t}{k}) \text{ ve } G(a, b, t) \leq G(a, b, \frac{t}{k}) \text{ elde edilir.}$$

Yukarıdaki eşitsizlikler her $t > 0$ için sağlandığından, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$F(a, b, t) \geq F\left(a, b, \frac{t}{k^n}\right) \text{ ve } G(a, b, t) \leq G\left(a, b, \frac{t}{k^n}\right)' \text{ dir.}$$

Şimdi $n \rightarrow \infty$ için limit hesabı yapılırsa, her $x, y \in X$ için $\lim_{t \rightarrow \infty} F(x, y, t) = 1$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, y, t) = 0$ olduğundan $F(a, b, t) = 1, G(a, b, t) = 0$ elde edilir. Böylece $a = b$ olduğu görülür. O halde sabit nokta tektir. $\square$

Bir sonraki örnekte her $x, y \in X$ için Teorem 5.2.7'de verilen $\lim_{t \rightarrow \infty} F(x, y, t) = 1$ ve

$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, y, t) = 0$ koşullarının gerekli olduğu açıklanmaya çalışılmıştır. Bu koşullar olmadan T 'nin sabit noktasının olmayacağı gösterilmiştir.

Örnek 5.2.8: $X = \{0, 1\}$ ve $m > 2$ sabit bir doğal sayı olsun.

Sürekli t-norm $u * v = \max\{u + v - 1, 0\}$ ve t-conorm $u \Delta v = u + v - uv$ şeklinde ve $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde F ve G bulanık kümeleri ise

$$F(1, 0, t) = F(0, 1, t) = 1 - \frac{1}{m}, F(0, 0, t) = F(1, 1, t) = 1 - \frac{2}{m}$$

$$G(1, 0, t) = G(0, 1, t) = \frac{1}{m}, G(0, 0, t) = G(1, 1, t) = \frac{2}{m}$$

şeklinde belirli olsun. Bu durumda $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir tam sezgisel bulanık metrik benzeri uzaydır. Gerçekten, $T : X \rightarrow X$ dönüşümü $T(0) = 1, T(1) = 0$ kuralıyla belirlenirse her $x, y \in X$ için $\lim_{t \rightarrow \infty} F(x, y, t) = 1$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, y, t) = 0$ koşulları hariç, keyfi bir $0 < k < 1$ için Teorem 5.2.7'nin bütün koşulları sağlanır. Böylece, T X 'de hiçbir sabit noktaya sahip değildir.

5.3. Sezgisel Bulanık Metrik Benzeri Uzaylarda (α, β) -Daralma Dönüşümü

Bu bölümde sezgisel bulanık metrik uzaylarda Priskillal ve Thangavelu (2017) tarafından tanımlanan (ψ, η) -daralma dönüşümü kavramı kullanılarak, sezgisel bulanık metrik benzeri uzaylarda (α, β) -daralma dönüşü tanımlanmış ve sabit nokta teorisinin sonuçları genişletilmiştir. $1 - M$ Cauchy dizisi ve $1 - M$ tam sezgisel bulanık metrik benzeri uzaylar tanımlanarak, sezgisel bulanık metrik benzeri uzaylarda elde edilen Cauchy dizisi ve tamlık tanımları sunulmuştur. Sonuçların önemini vurgulayan çeşitli örneklere yer verilmiştir.

Tanım 5.3.1: $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyonlar olmak üzere $\mathfrak{B}$ ailesi α, β fonksiyonlarının bir ailesidir.

(α_1) α azalmayandır;

(α_2) $\forall s \in (0, 1)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n(s) = 1$;

Eğer $\alpha \in \mathfrak{B} \Rightarrow \forall s \in (0, 1)$ için $\alpha(s) > s$ ve $\alpha(1) = 1$.

(β_1) β azalmayandır;

(β_2) $\forall r \in (0,1)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta^n(r) = 0$;

Eğer $\beta \in \mathfrak{B} \Rightarrow \forall r \in (0,1)$ için $\beta(r) < r$ ve $\beta(0) = 0$ (Priskillal ve Thangavelu, (2017)).

Örnek 5.3.2: Aşağıdaki şekilde tanımlanan $\alpha, \beta : [0,1] \rightarrow [0,1]$ fonksiyonları $\mathfrak{B}$ ailesine aittir (Priskillal ve Thangavelu, (2017)).

$$(1) \alpha(s) = 1, \quad \alpha(s) = \frac{2s}{s+1}$$

$$(2) \beta(r) = 0, \quad \beta(r) = \frac{r}{2-r}$$

Tanım 5.3.3: $(X, F, G, *, \Delta)$ bir sezgisel bulanık metrik benzeri uzay ve $\alpha, \beta \in \mathfrak{B}$ olsun. Eğer her $t > 0$ ve $x, y \in X$ için

$$F(T(x), T(y), t) \geq \alpha(F(x, y, t)) \text{ ve } G(T(x), T(y), t) \leq \beta(G(x, y, t))$$

koşulları sağlanıyorsa $T : X \rightarrow X$ dönüşümüne sezgisel bulanık (α, β) -daralma dönüşümü denir ve T 'ye (α, β) 'ya göre $\mathfrak{B}$ -daralma dönüşümü denir.

Uyarı 5.3.4: Her $s, r \in [0,1]$ için $\alpha(s) = \frac{s}{\lambda + (1-\lambda)s}$ ve $\beta(r) = \frac{\lambda r}{1 - (1-\lambda)r}$ olarak tanımlandığında, λ daralma sabiti ile birlikte her sezgisel bulanık daralma dönüşümünün bir (α, β) -daralma dönüşümü olduğu görülür.

Önerme 5.3.5: Bir sezgisel bulanık (α, β) -daralma dönüşümü süreklidir.

İspat: $T : X \rightarrow X$ bir sezgisel bulanık (α, β) -daralma dönüşümü ve $\{x_n\}$ dizisi X 'de, $x \in X$ 'e yakınsak bir dizi olsun. Bu durumda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = F(x, x, t) \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n, x, t) = G(x, x, t) \text{ 'dir.}$$

T bir sezgisel bulanık (α, β) – daralma dönüşümü olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(T(x_n), T(x), t) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(F(x_n, x, t)) > \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = F(x, x, t)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} G(T(x_n), T(x), t) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \beta(G(x_n, x, t)) < \lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n, x, t) = G(x, x, t)$ elde edilir. Böylece,

$\lim_{n \rightarrow \infty} F(T(x_n), T(x), t) = F(x, x, t)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} G(T(x_n), T(x), t) = G(x, x, t)$ olup T sezgisel bulanık (α, β) - daralma dönüşümü süreklidir. $\square$

Teorem 5.3.6: $(X, F, G, *, \Delta)$ bir tam sezgisel bulanık metrik benzeri uzay ve $T : X \rightarrow X$ (α, β) -daralma dönüşümü olsun. Bu durumda $x \in X$, T 'nin tek bir sabit noktasıdır.

İspat: T bir (α, β) -daralma dönüşümü olsun. Bir $x_0 \in X$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için (x_n) dizisi $x_{n+1} = T(x_n)$ kuralıyla belirli olsun. Eğer $x_{n_0+1} = x_{n_0}$ eşitliğini sağlayan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa bu durumda x_{n_0} T 'nin bir sabit noktasıdır.

Tersine, her $n \in \mathbb{N}$ için, $x_{n+1} \neq x_n$ olsun. Bu durumda sabit bir $t > 0$ için,

$$F(x_n, x_{n+1}, t) = F(T(x_{n-1}), T(x_n), t)$$

$$\geq \alpha F(x_{n-1}, x_n, t)$$

$$= \alpha F(T(x_{n-2}), T(x_{n-1}), t)$$

$$\geq \alpha^2 F(x_{n-2}, x_{n-1}, t) \geq \dots$$

$$\geq \alpha^n F(x_0, x_1, t)$$

$n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x_{n+1}, t) = 1$ elde edilir.

$$F(x_{n+1}, x_{n+2}, t) = F(T(x_n), T(x_{n+1}), t)$$

$$\geq \alpha F(x_n, x_{n+1}, t)$$

$$= \alpha F(T(x_{n-1}), T(x_n), t)$$

$$\geq \alpha^2 F(x_{n-1}, x_n, t) \geq \dots$$

$$\geq \alpha^n F(x_1, x_2, t)$$

$n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n+1}, x_{n+2}, t) = 1$ elde edilir.

$$F(x_n, x_{n+p}, t) \geq F\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{p}\right) * \dots * F\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, \frac{t}{p}\right)$$

$n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x_{n+p}, t) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{p}\right) * \dots * \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, \frac{t}{p}\right)$$

$$\geq 1 * \dots * 1 = 1.$$

Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x_{n+p}, t) = 1$ elde edilir. Yine $\forall t > 0$ için,

$$G(x_n, x_{n+1}, t) = G(T(x_{n-1}), T(x_n), t)$$

$$\leq \beta G(x_{n-1}, x_n, t)$$

$$= \beta G(T(x_{n-2}), T(x_{n-1}), t)$$

$$\leq \beta^2 G(x_{n-2}, x_{n-1}, t) \leq \dots$$

$$\leq \beta^n G(x_0, x_1, t)$$

$n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n, x_{n+1}, t) = 0$ elde edilir.

Benzer şekilde, $\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_{n+1}, x_{n+2}, t) = 0$

$$G(x_n, x_{n+p}, t) \leq G\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{p}\right) \Delta \dots \Delta G\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, \frac{t}{p}\right)$$

$n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n, x_{n+p}, t) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} G\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{p}\right) \Delta \dots \Delta \lim_{n \rightarrow \infty} G\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}, \frac{t}{p}\right)$$

$$\leq 0 \Delta \dots \Delta 0 = 0.$$

Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n, x_{n+p}, t) = 0$ elde edilir.

O halde (x_n) , X 'de bir Cauchy dizisidir. $(X, F, G, *, \Delta)$ bir tam SBMBU olduğundan, en az bir $x \in X$ vardır öyle ki her $t > 0, p \geq 1$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x_{n+p}, t) = F(x, x, t) = 1 \text{ ve}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n, x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n, x_{n+p}, t) = G(x, x, t) = 0 \text{ olur.}$$

Şimdi $x \in X$ 'in T 'nin bir sabit noktası olduğu gösterilmelidir.

Tanım 5.3.3 kullanılarak,

$$\begin{aligned} F(x, T(x), t) &\geq F\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) * F\left(x_{n+1}, T(x), \frac{t}{2}\right) \\ &= F\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) * F\left(T(x_n), T(x), \frac{t}{2}\right) \geq F\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) * \alpha \cdot F\left(x_n, x, \frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G(x, T(x), t) &\leq G\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) \Delta G\left(x_{n+1}, T(x), \frac{t}{2}\right) \\ &= G\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) \Delta G\left(T(x_n), T(x), \frac{t}{2}\right) \leq G\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) \Delta \beta G\left(x_n, x, \frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ limit alınır ve yukarıdaki eşitsizlikler uygulanırsa,

$$F(x, T(x), t) = 1 \text{ ve } G(x, T(x), t) = 0 \text{ elde edilir.}$$

Böylece $T(x) = x$ olup, sabit noktanın varlığı gösterilmiş olur. Şimdi T 'nin sabit noktası x 'in tekliği gösterilmelidir. Varsayalım ki z , T 'nin bir diğer sabit noktası olsun. Buradan,

$$F(x, z, t) = F(T(x), T(z), t) \geq \alpha(F(x, z, t)) \dots \geq \alpha^n(F(x, z, t))$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $F(x, z, t) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n(F(x, z, t)) = 1$ olup $F(x, z, t) = 1$ bulunur. Yine $t > 0$ için,

$$G(x, z, t) = G(T(x), T(z), t) \leq \beta(G(x, z, t)) \dots \leq \beta^n(G(x, z, t))$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $G(x, z, t) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \beta^n(G(x, z, t)) = 0$ olup $G(x, z, t) = 0$ bulunur.

Böylece $x = z$ elde edilir. O halde T 'nin sabit noktası vardır ve biriciktir. $\square$

Örnek 5.3.7: $X = [0, \infty)$ ve X üzerinde metrik benzeri dönüşüm $\sigma(x, y) = |x - y|$ şeklinde tanımlı olsun. t-norm $u * v = uv$ ve t-conorm $u \Delta v = \min\{1, u + v\}$ şeklinde belirli ve F, G bulanık kümeleri ise her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için,

$$F(x, y, t) = \frac{t}{t + \sigma(x, y)} \text{ ve } G(x, y, t) = \frac{\sigma(x, y)}{t + \sigma(x, y)} \text{ şeklinde belirli olsunlar.}$$

Bu durumda, $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir tam SBMBU'dır. Eğer $T : X \rightarrow X$ dönüşümü $T(x) = \frac{9-x}{4}$ şeklinde tanımlanır, $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dönüşümleri ise her $s, r \in [0, 1]$ ve $\alpha, \beta \in \mathfrak{B}$ için $\alpha(s) = \frac{3s}{2s+1}$ ve $\beta(r) = \frac{r}{3-2r}$ olarak alınırsa,

$$F(T(x), T(y), t) \geq \alpha(F(x, y, t))$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{9-x}{4}, \frac{9-y}{4}, t\right) \geq \frac{3F(x, y, t)}{2F(x, y, t) + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{t + \sigma\left(\frac{9-x}{4}, \frac{9-y}{4}\right)} \geq \frac{\frac{3t}{t + \sigma(x, y)}}{\frac{2t}{t + \sigma(x, y)} + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{t + \left|\frac{9-x}{4} - \frac{9-y}{4}\right|} \geq \frac{\frac{3t}{t + |x-y|}}{\frac{2t}{t + |x-y|} + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{t + \frac{|x-y|}{4}} \geq \frac{3t}{3t + |x-y|} = \frac{t}{t + \frac{|x-y|}{3}}$$

$$\Rightarrow t + \frac{|x-y|}{3} \geq t + \frac{|x-y|}{4} \Rightarrow 4 \geq 3.$$

$$G(T(x), T(y), t) \leq \beta(G(x, y, t))$$

$$\Rightarrow G\left(\frac{9-x}{4}, \frac{9-y}{4}, t\right) \leq \frac{G(x, y, t)}{3 - 2G(x, y, t)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma\left(\frac{9-x}{4}, \frac{9-y}{4}\right)}{t + \sigma\left(\frac{9-x}{4}, \frac{9-y}{4}\right)} \leq \frac{\frac{\sigma(x,y)}{t + \sigma(x,y)}}{3 - 2\left(\frac{\sigma(x,y)}{t + \sigma(x,y)}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\left|\frac{9-x}{4} - \frac{9-y}{4}\right|}{t + \left|\frac{9-x}{4} - \frac{9-y}{4}\right|} \leq \frac{\frac{|x-y|}{t + |x-y|}}{3 - 2\left(\frac{|x-y|}{t + |x-y|}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{|x-y|}{4}}{t + \frac{|x-y|}{4}} \leq \frac{|x-y|}{3t + |x-y|}$$

$$\Rightarrow \frac{|x-y|}{4t + |x-y|} \leq \frac{|x-y|}{3t + |x-y|}$$

$$\Rightarrow 3t + |x-y| \leq 4t + |x-y| \Rightarrow 3 \leq 4$$

olup, $4 \geq 3$ ve $3 \leq 4$ elde edildiğinden T dönüşümü bir (α, β) -daralma dönüşümüdür ve '3' bu dönüşümün sabit noktasıdır.

5.4. Tam Sezgisel Bulanık Metrik Benzeri Uzaylar ve Sabit Nokta Teoremleri

Bulanık metrik uzaylar içerisinde Cauchy dizileri ve uzayın tamlığı kavramları için iki farklı tanım yer almaktadır. Bunlar sırasıyla Grabiec (1988) anlamında G -Cauchy dizisi ve G -tamlık; George ve Veeramani (1994) anlamında M -Cauchy dizisi ve M -tamlık tanımlarıdır. Grabiec'in tamlık tanımı Kramosil ve Michalek anlamındaki bulanık metrik uzaylarda Banach daralma dönüşümünün bulanık versiyonunu elde etmek için yararlıdır. Ancak kompakt bir bulanık metrik uzayın Grabiec anlamında tam olmadığı Tirado (2012) tarafından gösterilmiştir. Öte yandan George ve Veeramani'nin tamlık tanımı, Grabiec'in tanımına kıyasla daha kapsayıcıdır. Çünkü Grabiec'in tamlık tanımının $\mathbb{R}$ üzerinde klasik Öklid metriği ile üretilen standart bulanık metrik uzay için sağlanmadığı, açıkça $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{x_n\} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ dizisinin bir G -Cauchy dizisi olduğu fakat $\{x_n\}$ yakınsak olmadığından $(\mathbb{R}, F_d, *)$ bulanık metrik uzayının $(u * v = uv)$ Grabiec anlamında G -tam olmadığı George ve Veeramani (1994) tarafından gösterilmiştir. Ardından, Grabiec anlamındaki tanımların bir genelleştirmesi

olarak George ve Veeramani (1994) anlamında M -Cauchy dizisi ve M -tamlık tanımları literatüre kazandırılmıştır. Bulanık metrik benzeri uzaylarda ise Shukla ve Abbas (2014) tarafından verilen Cauchy dizisi ve tamlık tanımları, Grabiec anlamındaki tanımın bulanık metrik benzeri uzaylardaki genelleştirmesidir. Ardından, Shukla ve diğ., (2016) hem Grabiec hem de George ve Veeramani anlamındaki Cauchy dizisi ve tamlık kavramlarını birleştiren 1-Cauchy dizisi ve 1-tam bulanık metrik benzeri uzay tanımlarını vererek, Shukla ve Abbas (2014) tarafından verilen Cauchy dizisi ve tam bulanık metrik benzeri uzay tanımını modifiye edip genelleştirmişlerdir.

Bu bölümde sezgisel bulanık metrik benzeri uzaylardaki Cauchy dizileri ve tamlık etrafındaki fikirlere ek olarak hem Grabiec'i hem de George ve Veeramani'nin tanımlarını genelleştiren 1- Cauchy dizisi ve 1-tam sezgisel bulanık metrik benzeri uzay kavramları tanıtılmıştır. Bu yeni yapı içerisinde, önceki bulguları genişleten ve pekiştiren birkaç sabit nokta teoremi sunulmuştur.

Tanım 5.4.1: $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir SBMBU ve (x_n) , X 'de bir dizi olsun.

(i) Eğer $\forall t > 0, p \geq 1$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x_{n+p}, t) = 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n, x_{n+p}, t) = 0$ ise (x_n) dizisine $1 - G$ - Cauchy dizisi denir.

(ii) Eğer X 'de her (x_n) $1 - G$ -Cauchy dizisi bir $x \in X$ 'e yakınsak ise, yani $F(x, x, t) = 1$ ve $G(x, x, t) = 0$ her $t > 0$ için sağlanıyorsa $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisine $1 - G$ -tam SBMBU denir.

Her $1 - G$ -Cauchy dizisi $(X, F, G, *, \Delta)$ SBMBU'da bir Cauchy dizisidir.

Her tam SBMBU bir $1 - G$ -tam SBMBU'dır.

Örnek 5.4.2'de bir SBMBU'da bir Cauchy dizisinin her zaman $1 - G$ -Cauchy dizisi olmak zorunda olmadığı ve bir $1 - G$ - tam SBMBU'ın ise her zaman tam SBMBU olmadığını görülmektedir.

Örnek 5.4.2: $X = \mathbb{N}$, t-norm $u * v = uv$ ve t-conorm $u \Delta v = \min\{1, u + v\}$ olsun. $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde F ve G bulanık kümeleri;

$$F(x, y, t) = \frac{\min(x, y)}{(\max(x, y))^2} = \begin{cases} \frac{x}{y^2} & x \leq y; \\ \frac{y}{x^2} & y \leq x. \end{cases}$$

$$G(x, y, t) = \frac{(\max(x, y))^2 - \min(x, y)}{(\max(x, y))^2} = \begin{cases} \frac{y^2 - x}{y^2} & x \leq y; \\ \frac{x^2 - y}{x^2} & y \leq x. \end{cases}$$

şeklinde belirli olsun. Bu durumda $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir SBMBU'dır.

Gerçekten $(n) \subset X$ dizisi ele alınırsa her $p \geq 1$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x_{n+p}, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+p)^2} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n, x_{n+p}, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n}{(n+p)^2}\right) = 1$$

elde edilir. O halde bu limit var olduğundan (n) dizisi $(X, F, G, *, \Delta)$ 'de bir Cauchy dizisidir. Ancak bu dizi $1 - G$ - Cauchy dizisi değildir.

Örnek 5.4.3: $X = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ve $\sigma: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$; $\sigma(x, y) = \max\{x, y\}$ olsun. (X, σ) bir MBU olmak üzere, standart SBMBU $(X, F, G, *, \Delta)$ bir $1 - G$ - tam SBMBU'dır.

Eğer (x_n) X 'de bir $1 - G$ - Cauchy dizisi ise $n \rightarrow \infty$ iken $(x_n) \rightarrow 0$ olduğundan, $n \rightarrow \infty$ iken her $t > 0$ için $F(x_n, 0, t) \rightarrow 1$ ve $G(x_n, 0, t) \rightarrow 0$ olur. Böylece X 'de her $1 - G$ - Cauchy dizisi $0 \in X$ 'e yakınsaktır ve $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir tam SBMBU'dur.

Tanım 5.4.4: $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir SBMBU ve (x_n) X 'de bir dizi olsun.

(i) Eğer $\forall t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F(x_n, x_m, t) = 1$ ve $\lim_{n, m \rightarrow \infty} G(x_n, x_m, t) = 0$ ise (x_n) dizisine $1 - M$ - Cauchy dizisi denir.

(ii) Eğer X 'de her (x_n) $1 - M$ - Cauchy dizisi bir $x \in X$ 'e yakınsak ise, yani $F(x, x, t) = 1$ ve $G(x, x, t) = 0$ her $t > 0$ için sağlanıyor ise $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisine $1 - M$ - tam SBMBU denir.

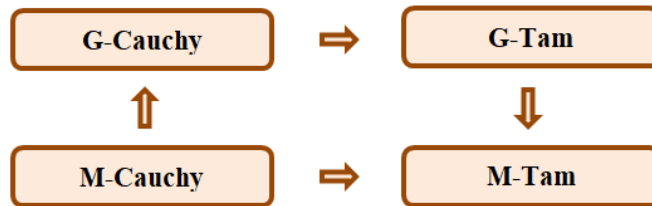
Uyarı 5.4.5: Grabiec anlamında her tam SBMU bir $1 - G$ tam SBMBU'dır. George ve Veeramani anlamında her tam SBMU bir $1 - M$ tam SBMBU'dır. $1 - G$ tamlık $1 - M$ tamlığı gerektirir.

Grabiec anlamında her tam SBMU aynı zamanda George ve Veeramani anlamında tamdır. Böylece Uyarı 5.1.2 ve Uyarı 5.4.5'ten $1 - M$ tamlık $1 - G$ tamlıktan daha genel bir kavram olur.

Tablo 5.1'de bulanık metrik uzaylar için bu tanımlar verilmiş ve Şekil 5.6'da da bu kavramlar arasındaki ilişki gösterilmiştir. Benzer şekilde Tablo 5.2'de bulanık metrik benzeri uzaylarda bu tanımlar verilmiş ve aralarındaki ilişki Şekil 5.7'de açıklanmıştır. Şekil 5.8'de ise bu kavramlar ile bulanık metrik uzaylar ve bulanık metrik benzeri uzaylar arasındaki ilişki gösterilmiştir. Şekil 5.9'da ise bu kavramlar ile sezgisel bulanık metrik uzaylar ve sezgisel bulanık metrik benzeri uzaylar arasındaki ilişki gösterilmiştir.

Tablo 5.1. BMU'da Cauchy dizisi ve tamlık tanımları

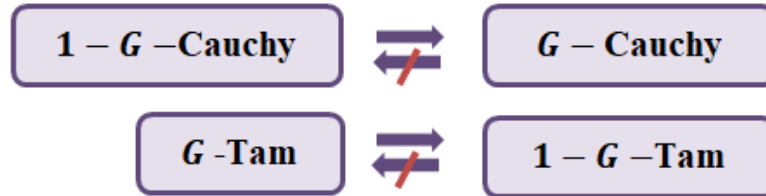
$(X, F, *)$ bir bulanık metrik uzay (BMU) ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olmak üzere,	
Grabiec anlamında	George ve Veeramani anlamında
G-Cauchy: Her $t > 0$ ve $p \in \mathbb{N}$ için, $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n+p}, x_n, t) = 1$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine G-Cauchy dizisi denir.	M-Cauchy: Her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F(x_n, x_m, t) = 1$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine M-Cauchy dizisi denir.
G-Tamlık: Her G-Cauchy dizisinin yakımsak olduğu bir bulanık metrik uzaya G-Tam denir.	M-Tamlık: Her M-Cauchy dizisinin yakımsak olduğu bir bulanık metrik uzaya M-Tam denir.



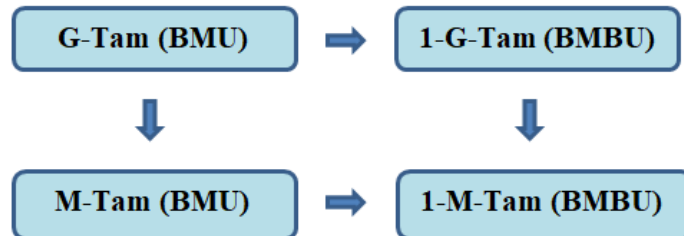
Şekil 5.6. BMU'da kavramlar arası ilişkiler

Tablo 5.2. BMBU’da Cauchy dizisi ve tamlık tanımları

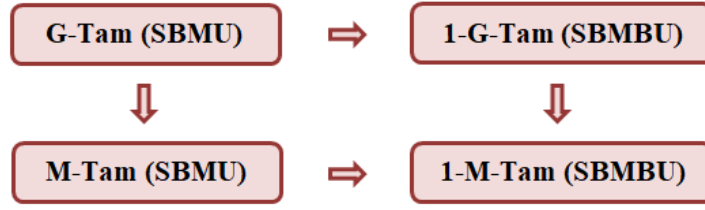
$(X, F, *)$ bulanık metrik benzeri uzay (BMBU) ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olmak üzere,	
Cauchy (G-Cauchy) : Eğer her $t > 0$ ve $p \geq 1$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n+p}, x_n, t)$ limiti var ve sonlu ise $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.	Tamlık (G-Tamlık) : Her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi bir $x \in X$ ’e yakınsak öyle ki her $t > 0$, $p \geq 1$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = F(x, x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n+p}, x_n, t)$ oluyorsa $(X, F, *)$ ’a tam bulanık metrik benzeri uzay denir.
1 – G – Cauchy (Grabiec) Her $t > 0$ ve $p \geq 1$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x_{n+p}, t) = 1$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine 1-G-Cauchy dizisi denir.	1 – G – Tamlık (Grabiec) Her 1-G-Cauchy dizisi yakınsak ve her $t > 0$ için $F(x, x, t) = 1$ ise $(X, F, *)$ 1-G-Tam bulanık metrik benzeri uzaydır.
1 – M – Cauchy (George ve Veeramani) Her $t > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F(x_n, x_m, t) = 1$ ise $\{x_n\}$ dizisine 1-M-Cauchy dizisi denir.	1 – M – Tamlık (George ve Veeramani) Her 1-M-Cauchy dizisi yakınsak ve her $t > 0$ için $F(x, x, t) = 1$ ise $(X, F, *)$ 1-M-Tam bulanık metrik benzeri uzaydır.



Şekil 5.7. BMBU’da kavramlar arası ilişkiler



Şekil 5.8. BMU ve BMBU için kavramlar arası ilişkiler



Şekil 5.9. SBMU ve SBMBU için kavramlar arası ilişkiler

Teorem 5.4.6: $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir 1 – M tam SBMBU ve $T : X \rightarrow X$ bir $\mathfrak{B}$ daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T tek bir $a \in X$ sabit noktaya sahiptir ve her $t > 0$ için $F(a, a, t) = 1$ ve $G(a, a, t) = 0$ 'dır.

İspat: T dönüşümü $\alpha, \beta \in \mathfrak{B}$ 'ya göre bir $\mathfrak{B}$ –daralma dönüşümü olsun.

Bir $x_0 \in X$ için $(x_n) \subset X$ dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$x_1 = T(x_0), x_2 = T(x_1), \dots, x_n = T(x_{n-1})$ kuralıyla belirli olsun.

Eğer bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x_{n-1}$ ise bu durumda x_{n-1} T 'nin bir sabit noktasıdır.

Tersine, varsayalım ki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n-1}$ olsun. Sabit bir $t > 0$ için $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $I_n = \inf_{m \geq n} F(x_n, x_m, t)$ ve $J_n = \sup_{m \geq n} G(x_n, x_m, t)$ olsun. T dönüşümü $\alpha, \beta \in \mathfrak{B}$ 'ya göre bir $\mathfrak{B}$ –daralma dönüşümü olduğundan her $m, n \in \mathbb{N}$ için α ve β 'nın özelliklerinden $m \geq n$ için,

$$F(x_n, x_{m-1}, t) \leq \alpha(F(x_n, x_{m-1}, t)) \leq F(T(x_n), T(x_{m-1}), t) = F(x_{n+1}, x_m, t)$$

$$G(x_n, x_{m-1}, t) \geq \beta(G(x_n, x_{m-1}, t)) \geq G(T(x_n), T(x_{m-1}), t) = G(x_{n+1}, x_m, t)$$

$m \geq n + 1$ üzerinden infimum ve supremum alınırsa her $n \in \mathbb{N}$ için $I_n \leq I_{n+1}$ ve $J_n \geq J_{n+1}$ elde edilir. Ve buradan I ve J vardır öyle ki $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = J$ sağlanır. T dönüşümü $\alpha, \beta \in \mathfrak{B}$ 'ya göre bir $\mathfrak{B}$ –daralma dönüşümü olduğundan her $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$ için,

$$\alpha(F(x_{n-1}, x_{m-1}, t)) \leq F(T(x_{n-1}), T(x_{m-1}), t) = F(x_n, x_m, t)$$

$$\beta(G(x_{n-1}, x_{m-1}, t)) \geq G(T(x_{n-1}), T(x_{m-1}), t) = G(x_n, x_m, t)$$

elde edilir. Böylece eğer $n \geq 2, m > n$ ise,

$$\alpha(F(x_{n-2}, x_{m-2}, t)) \leq F(x_n, x_{m-1}, t)$$

$$\beta(G(x_{n-2}, x_{m-2}, t)) \geq G(x_{n-1}, x_{m-1}, t)$$

olup, α, β azalmayan olduğundan,

$$\alpha^2(F(x_{n-2}, x_{m-2}, t)) \leq \alpha(F(x_{n-1}, x_{m-1}, t)) \leq F(x_n, x_m, t)$$

$$\beta^2(G(x_{n-2}, x_{m-2}, t)) \geq \beta(G(x_{n-1}, x_{m-1}, t)) \geq G(x_n, x_m, t)$$

elde edilir. Tümevarım ile her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\alpha^n(F(x_0, x_{m-n}, t)) \leq F(x_n, x_m, t)$$

$$\beta^n(G(x_0, x_{m-n}, t)) \geq G(x_n, x_m, t)$$

elde edilir. $m(> n)$ üzerinden infimum ve supremum alınırsa her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\inf \{ \alpha^n(F(x_0, x_1, t)), \alpha^n(F(x_0, x_2, t)), \dots \} \leq I_n$$

$$\sup \{ \beta^n(G(x_0, x_1, t)), \beta^n(G(x_0, x_2, t)), \dots \} \geq J_n$$

elde edilir. Tanım 5.3.1'deki (α_2) ve (β_2) ifadeleri göz önüne alınırsa, yukarıdaki eşitsizliklerden $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I = 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = J = 0$ elde edilir.

Tanım 5.4.4'ten her $n, m \in \mathbb{N}$ için $I_n \leq F(x_n, x_m, t)$ ve $J_n \geq G(x_n, x_m, t)$ elde edilir. $m > n$ ve yukarıdaki eşitsizliklerden $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F(x_n, x_m, t) = 1$ ve $\lim_{n, m \rightarrow \infty} G(x_n, x_m, t) = 0$ olduğu görülür. Böylece (x_n) dizisi X 'de $1 - M$ Cauchy dizisidir. $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir $1 - M$ tam SBMBU olduğundan en az bir $x \in X$ vardır öyle ki her $t > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, x_m, t) = F(x, x, t) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n, x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n, x_m, t) = G(x, x, t) = 0$$

elde edilir.

Şimdi $x \in X$ 'in T 'nin tek sabit noktası olduğu gösterilmelidir. Tanım 5.3.3'ten her $n \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ için

$$\alpha(F(x_n, x, t)) \leq F(T(x_n), T(x), t) = F(x_{n+1}, T(x), t)$$

$$\beta(G(x_n, x, t)) \geq G(T(x_n), T(x), t) = G(x_{n+1}, T(x), t) \text{ 'dir.}$$

Yukarıdaki eşitsizliklerden ve α, β 'nın özelliğinden her $t > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n+1}, T(x), t) = 1 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} G(x_{n+1}, T(x), t) = 0 \text{ elde edilir.}$$

(SBMB5) ve (SBMB10) özelliklerinden,

$$F(x, T(x), t) \geq F\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) * F\left(x_{n+1}, T(x), \frac{t}{2}\right) \text{ ve}$$

$$G(x, T(x), t) \leq G\left(x_n, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) \Delta G\left(x_{n+1}, T(x), \frac{t}{2}\right) \text{ olur.}$$

Yukarıdaki son iki eşitlik ve eşitsizlikleri kullanarak her $t > 0$ için $F(x, T(x), t) = 1$ ve $G(x, T(x), t) = 0$ elde edilir. Böylece $T(x) = x$ olup sabit noktanın varlığı gösterilmiş olur. Şimdi sabit noktanın tekliği gösterilmelidir.

İddia: $x \in X$ T 'nin tek sabit noktasıdır. Varsayalım ki $z \in X$ 'in T 'nin başka bir sabit noktası olsun. Bu durumda $T(z) = z$ ve en az bir $k > 0$ vardır öyle ki $F(x, z, k) > 1$ ve $G(x, z, k) > 0$ 'dır. Tanım 5.3.3'ten ve her $s, r \in (0, 1)$ için $s > \alpha(s)$ ve $\beta(r) < r$ olduğundan,

$$F(x, z, k) < \alpha(F(x, z, k)) \leq F(T(x), T(z), k) = F(x, z, k)$$

$$G(x, z, k) > \beta(G(x, z, k)) \geq G(T(x), T(z), k) = G(x, z, k)$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde her $k > 0$ için,

$$F(x, z, k) = 1 \text{ ve } G(x, z, k) = 0 \text{ olmalıdır. Böylece } x = z \text{ elde edilir.}$$

□

Sonuç 5.4.7: $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir $1 - M$ tam SBMBU ve $T : X \rightarrow X$ birim dönüşüm olsun. Varsayalım ki en az bir $n \in \mathbb{N}$ ve $\alpha, \beta \in \mathfrak{B}$ vardır öyle ki her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için,

$$\alpha(F(x, y, t)) \leq F(T^n(x), T^n(y), t) \text{ ve}$$

$$\beta(G(x, y, t)) \geq G(T^n(x), T^n(y), t) \text{ sağlanır.}$$

Böylece T tek bir $a \in X$ sabit noktaya sahiptir. Her $t > 0$ için $F(a, a, t) = 1$ ve $G(a, a, t) = 0$ elde edilir.

İspat: İspatı Sonuç 5.2.4'e benzer şekilde yapılmaktadır.

Teorem 5.4.8: $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir $1 - M$ tam SBMBU olsun.

$T : X \rightarrow X$ dönüşümü her $t > 0$ ve $y, x \in X$ için $g, h : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$,

$$F(x, y, g(t)) \geq F(x, y, t) \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} F(x, y, g^n(t)) = 1$$

$$G(x, y, h(t)) \leq G(x, y, t) \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} G(x, y, h^n(t)) = 0$$

özellğinde fonksiyonlar olmak üzere $F(T(x), T(y), t) \geq F(x, y, g(t))$ ve $G(T(x), T(y), t) \leq G(x, y, h(t))$ eşitsizliklerini sağlayan bir dönüşüm olsun. Böylece T tek bir $a \in X$ sabit noktaya sahiptir ve her $t > 0$ için $F(a, a, t) = 1$ ve $G(a, a, t) = 0$ olur.

İspat: Bir $x_0 \in X$ için $(x_n) \subset X$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T(x_{n-1})$ kuralıyla belirli ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n-1}$ olsun. (x_n) 'nin bir $1 - M$ -Cauchy dizisi olduğu gösterilmelidir. Sabit bir $t > 0$ için $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$I_n = \inf_{m \geq n} F(x_n, x_m, t) \text{ ve } J_n = \sup_{m \geq n} G(x_n, x_m, t) \text{ olsun.}$$

Her $m, n \in \mathbb{N}$ için $m \geq n$ için hipotezden,

$$F(x_{n+1}, x_m, t) = F(T(x_n), T(x_{m-1}), t) \geq F(x_n, x_{m-1}, g(t)) \geq F(x_n, x_{m-1}, t)$$

$$G(x_{n+1}, x_m, t) = G(T(x_n), T(x_{m-1}), t) \leq G(x_n, x_{m-1}, h(t)) \leq G(x_n, x_{m-1}, t)$$

elde edilir. $m (\geq n + 1)$ üzerinden infimum ve supremum alınır, sırasıyla

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $I_n \leq I_{n+1}$ ve $J_n \geq J_{n+1}$ elde edilir ve buradan I ve J vardır öyle ki

$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = J$ sağlanır. Bir $k \in \mathbb{N}$ için hipotezden,

$$\begin{aligned} F(x_{n+k}, x_{m+k}, t) &= F(T(x_{n+k-1}), T(x_{m+k-1}), t) \\ &\geq F(x_{n+k-1}, x_{m+k-1}, g(t)) \geq F(x_{n+k-1}, x_{m+k-1}, t) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G(x_{n+k}, x_{m+k}, t) &= G(T(x_{n+k-1}), T(x_{m+k-1}), t) \\ &\leq G(x_{n+k-1}, x_{m+k-1}, h(t)) \leq G(x_{n+k-1}, x_{m+k-1}, t) \end{aligned}$$

elde edilir ve yukarıdaki eşitsizliklerden,

$$F(x_{n+k-1}, x_{m+k-1}, g(t)) \geq F(x_{n+k-2}, x_{m+k-2}, g^2(t)) \geq F(x_{n+k-2}, x_{m+k-2}, t) \text{ ve}$$

$$G(x_{n+k-1}, x_{m+k-1}, h(t)) \leq G(x_{n+k-2}, x_{m+k-2}, h^2(t)) \leq G(x_{n+k-2}, x_{m+k-2}, t) \text{ elde edilir.}$$

Bu eşitsizlikler tekrarlı olarak uygulanmaya devam edilirse,

$$F(x_{n+k}, x_{m+k}, g(t)) \geq F(x_n, x_m, g^k(t)) \geq F(x_n, x_m, t) \text{ ve}$$

$$G(x_{n+k}, x_{m+k}, h(t)) \leq G(x_n, x_m, h^k(t)) \leq G(x_n, x_m, t) \text{ elde edilir.}$$

$m (\geq n)$ üzerinden sırasıyla infimum ve supremum alınır,

$$I_n = \inf \{F(x_n, x_{n+1}, g^k(t)), F(x_n, x_{n+2}, g^k(t)), \dots, \} \leq I_{n+p}$$

$$J_n = \sup \{G(x_n, x_{n+1}, h^k(t)), G(x_n, x_{n+2}, h^k(t)), \dots, \} \geq J_{n+p}$$

Her $y, x \in X, t > 0$ için $\lim_{k \rightarrow \infty} F(x, y, g^k(t)) = 1$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} G(x, y, h^k(t)) = 0$ olduğundan yukarıdaki eşitlikten $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I = 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = J = 0$ elde edilir.

Tanım 5.4.4'ten her $n, m \in \mathbb{N}$ için $I_n \leq F(x_n, x_m, t)$ ve $J_n \geq G(x_n, x_m, t)$ olup böylece $m > n$ ve yukarıdaki eşitsizliklerden, $\lim_{n, m \rightarrow \infty} F(x_n, x_m, t) = 1$ ve

$\lim_{n,m \rightarrow \infty} G(x_n, x_m, t) = 0$ elde edilir. Böylece (x_n) dizisi X 'te bir $1 - M$ -Cauchy dizisidir. $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir $1 - M$ - tam SBMBU olduğundan her $t > 0$ için en az bir $a \in X$ vardır öyle ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, a, t) = \lim_{n,m \rightarrow \infty} F(x_n, x_m, t) = F(a, a, t) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n, a, t) = \lim_{n,m \rightarrow \infty} G(x_n, x_m, t) = G(a, a, t) = 0$$

elde edilir. Şimdi $a \in X$ 'in T 'nin tek bir sabit noktası olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} F(a, T(a), t) &\geq F\left(a, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) * F\left(x_{n+1}, T(a), \frac{t}{2}\right) \\ &= F\left(a, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) * F\left(T(x_n), T(a), \frac{t}{2}\right) \\ &\geq F\left(a, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) * F\left(x_n, a, g\left(\frac{t}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G(a, T(a), t) &\leq G\left(a, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) \Delta G\left(x_{n+1}, T(a), \frac{t}{2}\right) \\ &= G\left(a, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) \Delta G\left(T(x_n), T(a), \frac{t}{2}\right) \\ &\leq G\left(a, x_{n+1}, \frac{t}{2}\right) \Delta G\left(x_n, a, h\left(\frac{t}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

olup, yukarıdaki eşitsizlikler kullanılarak her $t > 0$ için $F(a, T(a), t) = 1$ ve $G(a, T(a), t) = 0$ elde edilir. Böylece $T(a) = a$ olduğu görülür. Şimdi sabit noktanın tekliği gösterilmelidir. Bunun için varsayalım ki $b \in X$ T 'nin bir diğer sabit noktası olsun. Bu durumda $T(b) = b \neq a = T(a)$ olup, hipotezden

$$F(a, b, s) = G(T(a), T(b), s) \geq F(a, b, g(s))$$

$$G(a, b, s) = G(T(a), T(b), s) \leq G(a, b, h(s))$$

elde edilir. Bu işlem tekrar edilirse,

$F(a, b, s) \geq F(a, b, g^n(s))$ ve $G(a, b, s) \leq G(a, b, h^n(s))$ eşitsizlikleri elde edilir.

$n \rightarrow \infty$ için limit alır ve g, h fonksiyonlarının özellikleri kullanılırsa,

$F(a, b, s) = 1$ ve $G(a, b, s) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $a = b$ olur. Böylece $a \in X$ her $t > 0$ için $F(a, a, t) = 1$ ve $G(a, a, t) = 0$ eşitliklerini sağlayan, T 'nin tek bir sabit noktasıdır. $\square$

Örnek 5.4.9: a, b, c rasyonel sayılar olmak üzere, $0 < a < b < c$ ve $X = [0, c] \cap Q$ olsun. $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde F ve G sezgisel bulanık kümeleri her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $F(x, y, t) = 1 - \frac{\max\{x, y\}}{c+t}$ ve $G(x, y, t) = \frac{\max\{x, y\}}{c+t}$ şeklinde belirli olsunlar. Bu durumda, $(X, F, G, *, \Delta)$ beşlisi bir $1 - M$ - tam SBMBU'dır fakat her $x \in X \setminus \{0\}$ için $F(x, x, t) = 1 - \frac{x}{c+t} \neq 1$ ve $G(x, x, t) = \frac{x}{c+t} \neq 0$ olduğundan SBMU değildir.

Gerçekten, $T : X \rightarrow X$ dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in [0, b] \cap Q; \\ a & , \quad x \in (b, c) \cap Q. \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $g, h : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ olmak üzere her $t > 0$ için,

$g(t) = \left(\frac{b-a}{a}\right)c + \left(\frac{b}{a}\right)t$ ve $h(t) = t\left(\frac{a}{b}\right) - c\left(\frac{b-a}{b}\right)$ olarak tanımlansın. Böylece,

$F(x, y, g(t)) \geq F(x, y, t)$ ve $G(x, y, h(t)) \leq G(x, y, t)$ olur. Her $x, y \in [0, c] \cap Q$ ve $t > 0$ için,

$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x, y, g^n(t)) = 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} G(x, y, h^n(t)) = 0$ elde edilir.

Sonuç olarak T, g, h Teorem 5.4.8'in bütün koşullarını sağlar ve her $t > 0$ için $F(0, 0, t) = 1$ ve $G(0, 0, t) = 0$ olduğundan $0 \in X$ T 'nin tek bir sabit noktasıdır.

6.SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada bulanık matematiğin teorisini ve uygulamasını daha ileriye taşıyan, sezgisel bulanık metrik benzeri uzaylar ve uygulamalarda önemli bir konu olan Banach sabit nokta teorisi ve daralma dönüşümleri üzerinde bütünlük oluşturacak şekilde aşağıdaki çalışmalar yapılmış ve gelecek çalışmalar için öneriler sunulmuştur.

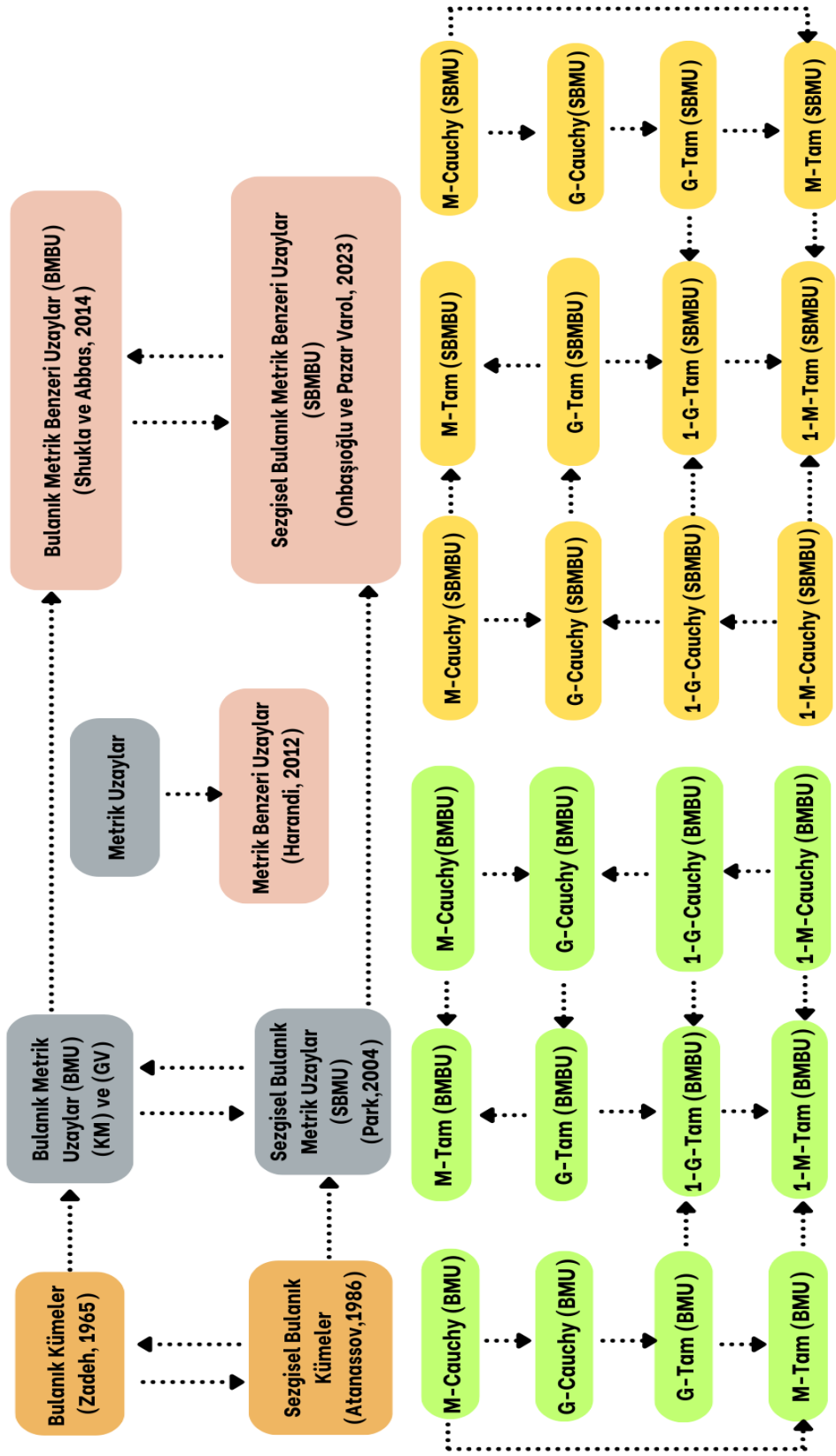
1) Metrik tarafından elde edilen metriklenebilir topolojik uzaylar, topolojik uzayların analizinde ve yapısal özelliklerin araştırılmasında önemli bir yere sahiptir. Harandi (2012) tarafından metrik benzeri uzaylar üzerine yapılan çalışma ve Hosseini ve Fosner (2019) tarafından analiz edilen metrik benzeri uzayların yapısında, bir dizinin yakınsaklığı, açık top tanımı, tam uzay olma koşulları ve uzayın noktalarının gösterdiği farklı özelliklerin klasik metrik uzaylardan farklı olduğu görülmüştür. Çalışmanın üçüncü bölümünde metrik benzeri dönüşüm hakkında detaylı bilgilere yer verilmiş ve bu yapı üzerinde elde edilen yeni sonuçlar sunularak, metrik benzeri dönüşümün neden önemli olduğu açıklanmaya çalışılmıştır. Yapısal olarak klasik metrik uzaylardan daha zayıf fakat incelendiğinde oldukça yararlı sonuçlar sunan Harandi (2012) anlamındaki metrik benzeri dönüşüm için ise topoloji tanımı henüz sunulmamıştır. Bu nedenle, metrik benzeri dönüşümün topolojisinin araştırılması gelecek çalışmalar için önem arz etmektedir.

2) Bu çalışmada metrik benzeri dönüşüm kullanılarak, Shukla ve Abbas (2014) tarafından literatüre kazandırılan bulanık metrik benzeri uzaylar kavramı ve bu uzaylarda elde edilen sabit nokta teoremleri ve sonuçları tanıtılmıştır. Ardından bulanık metrik uzayların bir genelleştirmesi olan sezgisel bulanık metrik uzaylarda metrik benzeri dönüşüm incelenmiş ve sezgisel bulanık metrik benzeri uzaylar kavramı literatüre kazandırılmıştır. Sonuçları açıklayıcı örnekler sunulmuş ve bu örnekler görseller ile desteklenmiştir. Elde edilen yeni yapı üzerinde Banach sabit nokta teoremleri çalışılmış, (α, β) -daralma dönüşümü ve 1-M Cauchy dizisi ile 1-M tam sezgisel bulanık metrik benzeri uzaylar tanımlanmıştır. Çalışmada mevcut teoriyi geliştiren yararlı ve ilginç sonuçlar sunulmuş, Grabiec ve George ve Veeramani anlamındaki çalışmalar genişletilmiştir.

3) Metrik benzeri dönüşümün, b-metrik benzeri uzaylar gibi metrik uzayların farklı genelleştirmeleri ile karşılaştırılması ve bulanık yapı içinde elde edilen sonuçlar ve genelleştirmelerin, sezgisel bulanık metrik uzaylarda incelenmesi ve ne gibi sonuçlar elde edileceğinin araştırılması yine gelecek çalışmalar için bir öneri sunmaktadır. Benzer şekilde metrik benzeri dönüşüm kullanılarak integral denklemler, ekonomi, oyun teorisi, dinamik sistemler gibi uygulamalarda önemli bir araç olan sabit nokta teoremi üzerindeki çalışmalarda, Banach sabit nokta teoreminin yanı sıra farklı sabit nokta teoremlerinin incelenmesinde faydalı olabileceği ön görülmektedir.

4) Gelişen teknoloji ile birlikte, insan düşünme biçimi ile benzerliği dolayısıyla popülerlik kazanmış ve kazanmaya devam eden bulanık mantık teorisi ve üzerine inşa edilen uygulamalarda, metrik dönüşümlerin etkili bir araç olduğu görülmüştür. Bu nedenle, metrik benzeri yapı ile elde edilen sezgisel bulanık metrik benzeri uzayların da belirsizlik içeren problemlerin çözümünde ve sabit nokta teorisi alanını geliştirme konusunda yeni bir motivasyon sağlayacağı düşünülmektedir. Gelecekteki uygulamalı çalışmalar için, elde edilen bu sonuçlar sezgisel bulanık metrik uzayların yapısına daha derin bir anlayış sunacaktır. Ayrıca bu sonuçlar matematiksel modelleme ve optimizasyon, karar verme problemleri, desen tanıma, görüntü işleme ve veri analizi gibi alanlarda yeni yaklaşımlar sunabilir ki bu çalışmalar hali hazırda gelişmeye devam etmektedir. Araştırmacılar için daha derin öngörü modelleri elde edebilmelerini sağlayacak ve sonuçlarını tartışabilirlecekleri Gregori ve diğ., (2011); Alroshan ve diğ., (2022); Atanassov ve diğ., (2023) makalelerinin bir kaynak sunabileceği düşünülmüştür.

5) Şekil 6.1’de, bu tez çalışmasında sunulan kavramlar arasındaki ilişkiler gösterilmektedir.



Şekil 6.1. Kavramlar arası ilişkiler

KAYNAKLAR

- A.Amini-Harandi. (2012). Metric-Like Spaces, Partial Metric Spaces and Fixed Points. *Fixed Point Theory and Applications*, 204(2012), 2-10.
- Alaca, C., Türkoğlu, D., & Yıldız, C. (2006). Fixed Points in Intuitionistic Fuzzy Metric Spaces. *Chaos, Solitons & Fractals*, 29(5), 1073-1078.
- Alghamdi, M. A., Shahzad, N., & Valero, O. (2012). On Fixed Point Theory in Partial Metric Spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 175(2012), 1-25.
- Alroshan, A., Asgher, T., Hussain, M., Shahzad, M., Rasool, F., & Abu-Khadrah, A. (2022). Virtual Trust on Driverless Cars Using Fuzzy Logic Design. 2022 *International Conference on Business Analytics for Technology and Security (ICBATS)*. Dubai, United Arab Emirates (16-17 Şubat 2022): IEEE.
- Atanassov, K. T. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20(1), 87-96.
- Atanassov, K., Sotirov, S., & Pencheva, T. (2023). Intuitionistic Fuzzy Deep Neural Network. *Mathematics*, 11(3), 716.
- Azam, A., & Kanwal, S. (2022). Introduction to Intuitionistic Fuzzy b-Metric Spaces and Fixed Point Results. *Thai Journal of Mathematics*, 20(1), 141-163.
- Bakhtin, I. (1989). The Contraction Mapping Principle in Almost Metric Space. *Functional Analysis*, 30, 26-37.
- Banach, S. (1922). Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrals. *Fundamenta Mathematicae*, 3, 133-181.
- Bets, R., & Shostak, A. (2022). Some Remarks on Strong Fuzzy Metrics and Strong Fuzzy Approximating Metrics with Applications in Word Combinatorics. *Mathematics*, 10(5), 738.
- Bukatin, M., Kopperman, R., Matthews, S., & Pajoohesh, H. (2009). Partial Metric Spaces. *The American Mathematical Monthly*, 116(8), 708-718.
- Chang, C. (1968). Fuzzy Topological Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 24(1), 182-190.
- Czerwik, S. (1993). Contraction Mappings in b-Metric Spaces. *Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis*, 1, 5-11.
- George, A., & Veeramani, P. (1994). On Some Results in Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 64(3), 395-399.
- George, B. (1847). *The Mathematical Analysis of Logic*. Cambridge University Press.

- Grabiec , M. (1988). Fixed Points in Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 27(3), 385-389.
- Gregori , V., & Romaguera , S. (2000). Some Properties of Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 115(3), 485-489.
- Gregori, V., & Sapena, A. (2002). On Fixed-Point Theorems in Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 125(2), 245-252.
- Gregori, V., Miñana, J.-J., Roig, B., & Sapena, A. (2024). On Completeness and Fixed Point Theorems in Fuzzy Metric Spaces. *Mathematics*, 12(2), 287.
- Gregori, V., Morillas, S., & Sapena, A. (2011). Examples of Fuzzy Metrics and Applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 170(1), 95-111.
- Grigorenko, O., Miñana, J., Shostak, A., & Valero, O. (2020). On t-Conorm Based Fuzzy (Pseudo)metrics. *Axioms*, 9(3), 78.
- Güner, E., Çetkin, V., & Aygün, H. (2018). On Intuitionistic Fuzzy 2-Metric Spaces. *ITM Web of Conferences 22 (CMES2018)*, 22(2018).
- Hosseini, A., & Fosner, A. (2019). On the Structure of Metric-Like Spaces. *Sahand Communications in Mathematical Analysis (SCMA)*, 14(1), 159-171.
- Hussain, N., Roshan, J. R., Parvaneh, V., & Kadelburg, Z. (2014). Fixed Points of Contractive Mappings in b-Metric-Like Spaces. *The Scientific World Journal*, 2014, 1-15.
- Klement , E. P., Mesiar, R., & Pap , E. (2005). *2-Triangular norms: Basic Notions and Properties*. Elsevier Science.
- Klement, E., Mesiar, R., & Pap, E. (2000). *Triangular Norms* (Cilt 8). Netherlands: Springer.
- Kosko, B. (1993). *Fuzzy Thinking: The New Science of Fuzzy Logic*. Hyperion Books.
- Kramosil, I., & Michálek, J. (1975). Fuzzy Metrics and Statistical Metric Spaces. *Kybernetika*, 11(5), 336-344.
- Lowen , R. (1976). Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Compactness. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 56, 621-633.
- Matthews, S. G. (1994). Partial Metric Topology. *General Topology and Applications*, 728(1), 183-197.
- O'Neill, S. J. (1996). Partial Metrics, Valuations and Domain Theory. *Papers on General Topology and Applications*, 806(1), 304-315.

- Park , J. H. (2004). Intuitionistic Fuzzy Metric Spaces. *Chaos, Solitons & Fractals*, 22(5), 1039-1046.
- Pazar Varol , B., & Aygün, H. (2012). Intuitionistic Fuzzy Metric Groups. *International Journal of Fuzzy Systems*, 14(3), 454-461.
- Pazar Varol, B. (2022). Statistically Convergent Sequences in Intuitionistic Fuzzy Metric Spaces. *Axioms*, 11(4), 159.
- Priskillal, J., & Thangavelu, P. (2017). Intuitionistic Fuzzy (ψ, η) -Contractive Mapping and Fixed Points. *Journal of Analysis & Number Theory*, 5(2), 105-108.
- Rafi, M., & Noorani, M. (2006). Fixed Point Theorem on Intuitionistic Fuzzy Metric Spaces. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 3(1), 23-29.
- Rıza, S., Shaban, S., & N., S. (2008). Modified Intuitionistic Fuzzy Metric Spaces and Some Fixed Point Theorems. *Chaos Solitons and Fractals*, 38(1), 36-47.
- Schweizer, B., & Sklar, A. (1960). Statistical Metric Spaces. *Pacific Journal of Math.*, 10(1), 313-334.
- Shostak, A. (1985). On a Fuzzy Topological Structure. *Proceedings of the 13th Winter School on Abstract Analysis*, 89-103.
- Shukla, S., & Abbas, M. (2014). Fixed Point Results in Fuzzy Metric-Like Spaces. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 11(5), 81-92.
- Shukla, S., & Nashine, H. K. (2016). Cyclic-Prešić–Ćirić Operators in Metric-Like Spaces and Fixed Point Theorems. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 21(2), 261-273.
- Shukla, S., & Rai, S. (2023). Caristi Type Fixed Point Theorems in 1-M-Complete Fuzzy Metric-Like Spaces. *The Journal of Analysis*, 31, 2247–2263.
- Shukla, S., Gopal, D., & Roldán-López-de-Hierro, A.-F. (2016). Some Fixed Point Theorems in 1-M-Complete Fuzzy Metric-Like Spaces. *International Journal of General Systems*, 45(7-8), 815-829.
- Shukla, S., Radenovic, S., & Rajic, V. C. (2013). Some Common Fixed Point Theorems in 0- σ -Complete Metric-Like Spaces. *Vietnam Journal of Mathematics*, 41, 341–352.
- Sintunavarat, W., & Kumam, P. (2012). Fixed Point Theorems for a Generalized Intuitionistic Fuzzy Contraction in Intuitionistic Fuzzy Metric Spaces. *Thai Journal of Mathematics*, 10(1), 123-135.
- Tirado , P. (2012). On Compactness and G-Completeness in Fuzzy Metric Spaces. *Iran Journal of Fuzzy Systems*, 9(4), 151-158.

- Türkoğlu , D., Alaca, C., Yeol Je, C., & Yıldız, C. (2006). Common Fixed Point Theorems in Intuitionistic Fuzzy Metric Spaces. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 22(1), 411-424.
- Ying, M. (1991). A New Approach For Fuzzy Topology (I). *Fuzzy Sets and Systems*, 39(3), 303-321.
- Yüksel, Y. (2006). *Puslu Mantık ve Felsefi Arka Planı*. Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Felsefe Anabilim Dalı, İstanbul, 215482.
- Zadeh , L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control* 8, 338-353.



KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

Onbaşıoğlu, Ş. , Varol, P.B. (2023). Intuitionistic Fuzzy Metric-Like Spaces and Fixed-Point Results, *Mathematics*, 11(8), 1-15.

Onbaşıoğlu, Ş. , Varol, P.B. (2023). (α, β) -Contractive Mapping in Intuitionistic Fuzzy Metric-Like Spaces and Fixed Points. *ICOMSS'2023: 2nd International E-Conference On Mathematical And Statistical Sciences: A Selcuk Meeting*, Selçuk Üniversitesi, Konya, Türkiye, 05-07 Haziran 2023.



ÖZGEÇMİŞ

İlk, orta ve lise öğrenimini Bursa'da tamamladı. 2015 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2021 yılında mezun oldu. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Tezli Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2023-2024 akademik yılı güz döneminde Letonya Üniversitesine Erasmus+ değişim programından faydalanarak staj öğrencisi olarak gitti ve beş ay süreyle araştırma stajı gerçekleştirdi.

