KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OLASILIKLI ESNEK KÜMELER

HANDE POŞUL

KOCAELİ 2014

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OLASILIKLI ESNEK KÜMELER

HANDE POŞUL

Doç.Dr. Çiğdem GÜNDÜZ ARAS
Danışman, Kocaeli Üniv. .....

Prof.Dr. Halis AYGÜN
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv. .....

Prof.Dr. Hüseyin ÇAKALLI
Jüri Üyesi, Maltepe Üniv. .....

Tezin Savunulduğu Tarih: 20.06.2014

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli görüş ve katkılarıyla bana destek olan ve yol gösteren değerli hocam Sayın Doç. Dr. Çiğdem GÜNDÜZ (ARAS)'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Çalışmalarım esnasında yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Doç. Dr. Arzu ERDEM'e, çalışmamdaki önerilerinden dolayı hocam Sayın Prof. Dr. Halis AYGÜN'e ve Sayın Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI'ya teşekkür ederim. Ayrıca her zaman yanımda olan ve beni destekleyen sevgili anneme, babama ve kardeşime sevgi ve minnet duygularımı sunarım.

Haziran - 2014

Hande POŞUL

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR i
İÇİNDEKİLER ii
SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR iii
ÖZET v
ABSTRACT vi
GİRİŞ 1
1. GENEL BİLGİLER 5
1.1. Olasılık Teorisinde Temel Kavramlar 5
1.2. Esnek Küme Teorisi Üzerinde İşlemler 6
2. OLASILIKLI ESNEK KÜME TEORİSİ 14
2.1. Olasılıklı Küme Teorisindeki Temel Kavramlar 14
2.2. Olasılıklı Esnek Kümeler 20
2.3. Olasılıklı Esnek Matrisler 29
3. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 35
KAYNAKLAR 36
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER 39
ÖZGEÇMİŞ 40

SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR

$\forall$: Evrensel niceleyici, her
$\exists$: Varlıksal niceleyici, en az bir
$\subseteq$: Altküme
$\supseteq$: Üstküme
$\cup$: Birleşim
$\cap$: Arakesit
$\in$: Eleman
$\notin$: Elemanı değildir
$\wedge$: VE operatörü
$\vee$: VEYA operatörü
$\setminus$: Fark operatörü
Δ : Simetrik fark operatörü
$\leq$: Küçük veya eşittir operatörü
E : Parametre kümesi
S : Örneklem uzay
U : Evrensel küme
$X, Y, \ldots$: Olasılıklı kümeler
μ_X : X'in üyelik fonksiyonu
$\widetilde{A}$: Evrensel esnek küme
$\urcorner E$: E kümesinin değili
F^c : F in esnek tümleyen fonksiyonu
$\widetilde{S}$: Olay
X_Y^c : X'in Y'deki olasılıklı tümleyeni
Φ : Boş esnek küme
$D(U)$: U'daki tüm olasılıklı dağılımların kümesi
$P(U)$: U'nun kuvvet kümesi
$\Pr(U)$: U'daki tüm olasılıklı kümelerin kümesi
$\Pr S(U)$: U 'daki tüm olasılıklı esnek kümelerin kümesi
$\Pr SM_{m\times n}$: U'daki tüm m×n boyutlu olasılıklı esnek matrislerin kümesi
$\mathcal{P}(\widetilde{S})$: $\widetilde{S}$ olayının olasılığı
(F, A) : Esnek küme
$(F, A)^c$: Esnek kümenin tümleyeni
$P_A, P_B, \ldots$: Olasılıklı esnek kümeler
$p_A, p_B, \ldots$: Olasılıklı yaklaşım fonksiyonları
P_Φ : İmkansız olasılıklı esnek küme

$(P_A)^c_{P_b}$	: P_A'nın P_B'deki tümleyeni
R_A	: P_A'nın olasılıklı bağıntısı
$\lfloor a_{ij} \rfloor \lfloor b_{ij} \rfloor \ldots$	: m×n boyutlu olasılıklı esnek matris
$[0]$	: Sıfır olasılıklı esnek matris

OLASILIKLI ESNEK KÜMELER

ÖZET

Bu tezin amacı esnek küme ve olasılık teorisini kullanarak olasılıklı esnek kümeleri tanımlamaktır. Çalışmada ilk olarak, olasılıklı kümeler tanımlanmıştır ve olasılıklı kümelerin temel işlemleri verilmiştir. İkinci olarak, olasılıklı esnek kümenin tanımı genelleştirilerek imkansız olasılıklı esnek küme, olasılıklı esnek kümenin altkümesi, iki olasılıklı esnek kümenin eşitliği ve olasılıklı esnek kümenin tümleyeni kavramları tanımlanmıştır ve bu kavramların özellikleri örneklerle incelenmiştir. Ayrıca olasılıklı esnek kümeler üzerinde birleşim, arakesit, fark ve simetrik fark işlemleri verilmiştir. Son olarak olasılıklı esnek matrisler tanımlanmıştır ve olasılıklı esnek matrisler üzerinde temel işlemler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Esnek Küme, Olasılıklı Küme, Olasılıklı Esnek Küme, Olasılıklı Esnek Matris.

PROBABILISTIC SOFT SETS

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to introduce the theory of probabilistic soft sets by using soft set theory and probabilistic theory. In this work firstly, probabilistic sets were defined and their basic operations were given. Secondly, the concepts of impossible probabilistic soft set, subset of a probabilistic soft set, equality of two probabilistic soft sets and complement of a probabilistic soft set on probabilistic soft sets were introduced and examined with examples by generalizing the definition of probabilistic soft set. Moreover the operations of union, intersection, difference and symmetric difference on probabilistic soft sets were given. Finally, probabilistic soft matrices were defined and fundamental operations on probabilistic soft matrices were examined.

Keywords: Soft Set, Probabilistic Set, Probabilistic Soft Set, Probabilistic Soft Matrix.

GİRİŞ

Günlük hayatta güzel ev, ucuz araba, yeni elbise, soğuk hava gibi anlamı kişiden kişiye ve durumdan duruma göre değişen ve bu nedenle belirsizlik içeren pek çok ifade kullanılır. Aynı durum mühendislikte, ekonomide, tıp biliminde, sosyal bilimlerde ve daha pek çok alanda bulunan problemler için de geçerlidir. Bu problemler kendilerine özgü çeşitli belirsizlikler içerir. Bu belirsizlikler nedeniyle problemleri çözmek için klasik metotlar kullanılamaz. Çünkü klasik mantığın temelinde kesinlik vardır. Klasik mantıkta bir soruya evet ya da hayır, doğru ya da yanlış, ucuz ya da pahalı gibi kesinlik ifade eden cevaplar verilir. Bir başka ifade ile klasik mantıkta belirsizliklere yer yoktur.

Belirsizliklerle baş edebilmek için pek çok araştırmacı çeşitli çalışmalar yapmıştır. Belirsizlik içeren problemlerin çözümü için olasılık teorisi, bulanık kümeler teorisi, yaklaşımlı kümeler teorisi, aralık matematiği gibi pek çok teori geliştirilmiştir. Bu teoriler arasında en kullanışlı olanı Matematikçi Lötfi Askarzade Zadeh'in (1965) bilim dünyasına tanıttığı bulanık kümeler teorisidir. Bir bulanık küme klasik bir kümedeki her elemanı [0,1] aralığında bir sayıya götüren bir dönüşüm olarak ele alınır. Bu dönüşüme üyelik fonksiyonu da denir. Bulanık küme teorisinin güçlü yanlarının yanı sıra kendine özgü zorluğu da vardır. Bu zorluk üyelik fonksiyonunu oluşturmada tek bir yol olmamasından kaynaklanmaktadır. Bu sebeple bir elemanın kümeye ait olması kişiden kişiye farklı yorumlanabilir.

Teorilerdeki zorlukların ortaya çıkma nedeni muhtemel olarak teorilerdeki parametre araçlarının eksikliğinden kaynaklanmaktadır. Bu durumla başa çıkabilmek için Molodtsov (1999) bu tür zorluklardan bağımsız olarak belirsizlik ve kararsızlık modelleri için tamamen yeni bir yaklaşım olan esnek küme teorisini geliştirmiştir. Aynı çalışmasında esnek küme teorisini Perron integrasyonu, Riemann integrasyonu, sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, oyun teorisi, ölçüm teorisi, olasılık teorisi gibi birçok alana uygulamıştır.

Daha sonra esnek kümeler ve uygulamaları ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Maji ve diğ. (2002, 2003) esnek kümeler üzerinde bazı işlemler tanımlamışlar ve Pawlak (1982) tarafından verilen yaklaşımlı küme teorisini kullanarak esnek kümelerin karar verme problemlerine (decision making problem) uygulanmasını yapmışlardır. Chen ve diğ. (2005) ile Kong ve diğ. (2008) esnek kümelerde parametre indirgemesi üzerine yeni bir yaklaşım vermiştir. Pei ve diğ. (2005) esnek kümeler ve bilgi sistemleri (Information System) arasındaki ilişkiyi araştırmış ve esnek kümelerin bilgi sistemlerinin özel bir sınıfı olduğunu göstermiştir.

Esnek kümelerin matematiğin diğer alanlarına da pek çok uygulaması vardır. Aktaş ve Çağman (2007) esnek küme tanımından yararlanarak esnek grup tanımını vermiş ve esnek grupların temel özelliklerini incelemişlerdir. Feng ve diğ. (2008) esnek yarı-halkalar, esnek idealler ve esnek yarı-halkaların homomorfizmalarını tanımlamışlardır. Jun (2008) esnek BCK/BCI- cebir kavramını vermiş, Acar ve diğ. (2010) esnek halkaları çalışmışlardır. Esnek modülleri ise Sun ve diğ. (2008) tanımlamıştır. Ozturk ve diğ. (2013) esnek modüllerin ters ve düz sistemlerini vermişlerdir.

Shabir ve Naz (2011) esnek topolojik uzay tanımını vermişlerdir. Bu çalışmada esnek kapalı küme, bir noktanın esnek komşuluğu ve esnek ayırma aksiyomlarını tanımlayarak, bir esnek topolojik uzayın, topolojik uzayların parametrelenmiş bir ailesini verdiğini göstermişlerdir. Aygünoğlu ve Aygün (2012) esnek topolojik uzaylarda esnek dönüşümlerin esnek süreklilik tanımını vermiş, esnek çarpım topolojisi ve esnek kompaktlık kavramlarını tanımlamışlardır. Zorlutuna ve diğ. (2012) esnek topolojik uzaylarda esnek iç nokta, esnek komşuluk ve esnek kompaktlık kavramlarını incelemişlerdir. Bayramov ve Gunduz (2013) esnek topolojik uzaylarda esnek nokta tanımını yeniden tanımlamışlardır. Bu tanımdan yararlanarak Gunduz ve diğ. (2013) esnek topolojik uzaylarda esnek açık, esnek kapalı dönüşüm ve esnek homeomeorfizm kavramlarını detaylı olarak incelemişlerdir.

Esnek küme ve bulanık küme tanımlarını temel alarak tanımlanan bulanık esnek kümeler ilk olarak Maji ve diğ. (2001) tarafından verilmiştir. Daha sonra pek çok araştırmacı bulanık esnek kümeler üzerine çalışmalar yapmışlardır. Yang ve diğ.

(2007) bulanık esnek kümelerde indirgeme yöntemini kullanarak karar verme problemlerine uygulamasını vermişlerdir. Aygünoğlu ve Aygün (2009) bulanık esnek kümelerin cebirsel uygulamasını vererek bulanık esnek grupların temel özelliklerini ve bulanık esnek grupların homomorfik görüntü ve ters görüntülerini incelemişlerdir. Çağman ve diğ. (2011, 2012) bulanık esnek küme teorisinden yararlanarak bulanık esnek matrisleri inşa etmişler ve bulanık esnek yaklaşım metotlarını kullanarak max-min karar verme problemleri üzerine uygulamalarını vermişlerdir. Erdem ve diğ. (2014) bir esnek çoklu küme üzerinde esnek matris kavramını vererek max-min karar verme problemleri üzerine uygulamalarını incelemişlerdir.

Bilgi teknolojisinde yer alan çeşitli belirsizlikleri değerlendirmek için teorik çerçeveye paralel olarak olasılık kavramı geliştirilmiştir. Olasılık teorisi ilk olarak 18. yüzyılda Jacob Bernoulli'nin Ars Conjectandi (1713) ve Abraham DeMoiver'in Doctrine of Chances (1738) gibi dönüm noktası olan tezlerle geliştirilmiştir. Esnek küme ve olasılık teorisini temel alan olasılıklı esnek küme ilk olarak Zhu ve Wen (2010) tarafından verilmiştir.

Bu tez çalışmasında Zhu ve Wen (2010) tarafından verilen olasılıklı dağılım ve olasılıklı esnek küme tanımı genelleştirilmiştir. Daha sonra olasılıklı esnek kümeler üzerinde temel işlemler tanımlanarak, olasılıklı esnek kümelerin özellikleri incelenmiştir. Son olarak olasılıklı esnek kümelerin matrisleri tanımlanıp, temel özellikleri verilmiştir.

Tez, genel bilgiler ve olasılıklı esnek küme teorisini içeren toplam 2 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde önce olasılık teorisindeki temel tanımlar verilmiştir. Sonra esnek küme tanımı hatırlatılarak esnek küme üzerindeki işlemler örneklerle ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

İkinci bölümde Zhu ve Wen (2010) tarafından verilen olasılıklı dağılım tanımı genelleştirilerek olasılıklı küme tanımı verilmiş ve olasılıklı kümeler üzerinde temel işlemler tanımlanmıştır. Daha sonra olasılıklı esnek küme tanımı yeniden düzenlenerek, bu kümeler üzerinde altküme, eşitlik, tümleyen, birleşim, kesişim, fark ve simetrik fark gibi temel işlemler verilmiş, bu işlemler örnekler ve önermelerle

detaylı olarak ele alınmıştır. Bu bölümün sonunda, olasılıklı esnek kümeleri temel alan olasılıklı esnek matrisler tanımlanarak bu yapı üzerinde altküme, eşitlik, birleşim, kesişim gibi temel işlemler incelenmiştir.

1. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde olasılık kavramı ve esnek küme teorisi ile ilgili temel tanımlar ve işlemler verilmiştir.

1.1. Olasılık Teorisinde Temel Kavramlar

Bu bölümde olasılık teorisinin temel tanımları verilmiştir.

Tanım 1.1.1. Rastgele bir deneyin tüm olası sonuçlarını içeren kümeye örneklem uzay denir ve S ile gösterilir (Ross ve diğ., 2002).

Tanım 1.1.2. Bir örneklem uzayın herhangi bir altkümesine olay denir ve $\tilde{S}$ ile gösterilir (Ross ve diğ., 2002).

Tanım 1.1.3. Bir olayın gerçekleşmemesi durumuna imkansız olay denir (Ross ve diğ., 2002).

Tanım 1.1.4. S örneklem uzayının kendisine kesin olay denir (Ross ve diğ., 2002).

Tanım 1.1.5. S örneklem uzayı ve $\tilde{S} \subset S$ örneklem uzayda bir olay olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{P} : \tilde{S} \to [0,1]$ fonksiyonuna $\tilde{S}$ olayının olasılığı denir;

(1) $\forall \tilde{S}$ olayı için $0 \leq \mathcal{P}\left(\tilde{S}\right) \leq 1$,

(2) $\mathcal{P}(S) = 1$,

(3) Eğer $\tilde{S}_1 \cap \tilde{S}_2 = \varnothing$ ise $\mathcal{P}\left(\tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2\right) = \mathcal{P}\left(\tilde{S}_1\right) + \mathcal{P}\left(\tilde{S}_2\right)$,

(4) Eğer $\bigcap_{i \in I} \tilde{S}_i = \varnothing$ ise $\mathcal{P}\left(\tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2 \cup \tilde{S}_3 \cup \ldots\right) = \mathcal{P}\left(\tilde{S}_1\right) + \mathcal{P}\left(\tilde{S}_2\right) + \mathcal{P}\left(\tilde{S}_3\right) + \ldots$

$\tilde{S}$ olayının olasılığı $\mathcal{P}\left(\tilde{S}\right)$ ile gösterilir (Ross ve diğ., 2002).

1.2. Esnek Küme Teorisi Üzerinde İşlemler

Bu bölümde esnek küme teorisi ile ilgili temel tanım ve işlemler verilmiştir.

Tanım 1.2.1. U evrensel küme, E parametrelerin bir kümesi, $P(U)$, U kümesinin kuvvet kümesi ve $A \subset E$ olsun. $F: A \to P(U)$ bir dönüşüm olmak üzere (F, A) çiftine U kümesi üzerinde bir esnek küme denir (Molodtsov, 1999).
Başka bir deyişle, bir esnek küme U evrensel kümesinin altkümelerinin parametrize edilmiş bir ailesini verir.

Örnek 1.2.2. (F, E) esnek kümesi bir X kişisinin satın almayı düşündüğü arabaların özelliklerini tanımlasın.

$U = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$ arabaların kümesi,

$E = \{\text{pahalı, ucuz, beyaz, 2010 model ve üzeri, Alman yapımı}\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

parametreler kümesi olsun. O halde esnek kümeyi tanımlamak pahalı arabaları, ucuz arabaları, 2010 model ve üzeri arabaları, beyaz arabaları ve Alman yapımı arabaları belirlemek anlamına gelmektedir.
Örneği daha detaylı düşünelim. Varsayalım ki;

$F(e_1) = \{c_2, c_4\}$, $F(e_2) = \{c_1, c_3\}$, $F(e_3) = \{c_3, c_4, c_6\}$, $F(e_4) = \{c_1, c_3, c_5\}$,

$F(e_5) = \emptyset$

olsun. O halde $F(e_1)$ "pahalı arabalar" anlamındadır ve fonksiyon değeri $\{c_2, c_4\}$ kümesidir. O zaman (F, E) esnek kümesi;

$$(F, E) = \{(\text{pahalı arabalar}, \{c_2, c_4\}), (\text{ucuz arabalar}, \{c_1, c_3\}),$$
$$(\text{2010 model ve üzeri arabalar}, \{c_3, c_4, c_6\}),$$
$$(\text{beyaz arabalar}, \{c_1, c_3, c_5\}), (\text{Alman yapımı arabalar}, \emptyset)\}$$

şeklindedir.

Tanım 1.2.3. U bir evrensel küme ve $I = [0,1]$ olsun. $\mathcal{A}$ bulanık kümesi,

$$\mathcal{A} = \{(x, \mu_{\mathcal{A}}(x)) : x \in U, \mu_{\mathcal{A}}(x) \in [0,1]\}$$

şeklinde tanımlanır. U evrensel kümesindeki $\mathcal{A}$ bulanık kümesi $\mu_{\mathcal{A}}: U \to [0,1]$ fonksiyonu ile karakterize edilir. Buradaki $\mu_{\mathcal{A}}$ fonksiyonuna $\mathcal{A}$ bulanık kümesinin

üyelik fonksiyonu, $\mu_A(x)$ değerine $x \in U$ elemanının üyelik değeri denir. Bir elemanın üyelik değeri, o elemanın bulanık kümeye ait olma derecesidir (Zadeh, 1965).

Örnek 1.2.4. $\mathcal{A}$, U üzerinde bir bulanık küme, $\mu_A : U \to [0,1]$, $\mathcal{A}$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu ve $E = [0,1]$ olsun. $F : E \to P(U)$ dönüşümü,

$F(\alpha) = \{x \in U : \mu_A(x) \geq \alpha\}, \alpha \in [0,1]$

şeklinde tanımlansın. $F(\alpha)$, $\mathcal{A}$ bulanık kümesinin α – seviye kümesidir. O halde (F,E) bir esnek kümedir. Böylece her bulanık kümenin, bir esnek küme ürettiğini söyleyebiliriz (Pei ve diğ., 2005).

Tanım 1.2.5. (F,A) ve (G,B), U kümesi üzerinde iki esnek küme olsun. Eğer,

(1) $A \subseteq B$

(2) $\forall e \in A$, $F(e) \subseteq G(e)$

koşulları sağlanıyorsa (F,A) esnek kümesine (G,B) esnek kümesinin bir esnek altkümesi denir ve $(F,A) \tilde{\subseteq} (G,B)$ şeklinde gösterilir (Maji ve diğ., 2003).

Örnek 1.2.6. $U = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$, $A = \{e_1, e_3, e_5\} \subset E$ ve $B = \{e_1, e_2, e_3, e_5\} \subset E$ olsun. U üzerindeki (F,A) ve (G,B) esnek kümeleri,

$F(e_1) = \{c_2, c_4\}$, $F(e_3) = \{c_3, c_4, c_5\}$, $F(e_5) = \{c_1\}$,

$G(e_1) = \{c_2, c_4\}$, $G(e_2) = \{c_1, c_3\}$, $G(e_3) = \{c_3, c_4, c_5\}$, $G(e_5) = \{c_1\}$

şeklinde verilsin. O halde;

$A \subset B$ dir ve $\forall e \in A$ için $F(e) \subseteq G(e)$ olduğundan $(F,A) \tilde{\subseteq} (G,B)$ sağlanır.

Uyarı 1.2.7. Klasik altküme tanımının aksine, $(F,A) \tilde{\subseteq} (G,B)$ olması , (F,A) esnek kümesinin her elemanının (G,B) esnek kümesinin bir elemanı olması anlamına gelmez (Enginoğlu, 2009).

Örnek 1.2.8. $U = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$ evrensel küme, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametre kümesi, $A = \{e_1, e_3, e_5\} \subset E$ ve $B = \{e_1, e_2, e_3, e_5\} \subset E$ olsun.

$F(e_1)=\{c_2,c_4\}$, $F(e_3)=\{c_3,c_4,c_5\}$, $F(e_5)=\{c_1\}$,

$G(e_1)=\{c_2,c_4\}$, $G(e_2)=\{c_1,c_3\}$, $G(e_3)=\{c_3,c_4,c_5\}$, $G(e_5)=\{c_1,c_4\}$

şeklinde verilsin. O halde;

$(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B)$ dir. Ancak $(e_5,F(e_5))\in(F,A)$ fakat $(e_5,F(e_5))\notin(G,B)$ dir.

Tanım 1.2.9. (F,A) ve (G,B), U kümesi üzerinde iki esnek küme olsun. Eğer $(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B)$ ve $(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ koşulları sağlanıyorsa (F,A) ve (G,B) esnek kümelerine esnek eşittir denir (Maji ve diğ., 2003).

Tanım 1.2.10. $E=\{e_1,e_2,e_3,...,e_n\}$ parametreler kümesi olsun. $\neg E=\{\neg e_1,\neg e_2,\neg e_3,...,\neg e_n\}$ şeklinde tanımlanan $\neg E$ kümesine E kümesinin değili denir. Burada $\neg e_i$, her i için e_i nin değiline eşittir (Maji ve diğ., 2003).

Örnek 1.2.11. Örnek 1.2.2'yi ele alalım. O halde;

$\neg E=\{$pahalı değil, ucuz değil, 2010 model ve üzeri değil, beyaz değil,
Alman yapımı değil$\}$

şeklindedir.

Tanım 1.2.12. (F,A), U kümesi üzerinde bir esnek küme olsun. (F,A) esnek kümesinin tümleyeni $(F,A)^c$ şeklinde gösterilir ve $(F,A)^c=(F^c,\neg A)$ olarak tanımlanır. Burada $F^c:\neg A\to P(U)$, her $e\in\neg A$ için $F^c(e)=U-F(\neg e)$ dir. F^c ye F in esnek tümleyen fonksiyonu denir (Maji ve diğ., 2003).

$\left((F,A)^c\right)^c=(F,A)$ olduğu açıktır.

Örnek 1.2.13. Örnek 1.2.2'yi ele alalım.

$(F,E)^c=\{$(pahalı olmayan arabalar, $\{c_1,c_3,c_5,c_6\}$), (ucuz olmayan arabalar, $\{c_2,c_4,c_5,c_6\}$), (2010 model ve üzeri olmayan arabalar, $\{c_1,c_2,c_5\}$), (beyaz olmayan arabalar, $\{c_2,c_4,c_6\}$), (Alman yapımı olmayan arabalar, $\{c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6\}$)

şeklindedir.

Tanım 1.2.14. (F,A), U kümesi üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer her $e \in A$ için $F(e) = \emptyset$ ise (F,A) esnek kümesine boş esnek küme denir ve Φ ile gösterilir (Maji ve diğ., 2003).

Örnek 1.2.15. $U = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$ beyaz arabaların kümesi, $A = \{\text{siyah, mavi, kırmızı, gri}\}$ parametreler kümesi olsun. (F,A) esnek kümesi "arabaların renklerini" tanımlasın. O halde;

$(F,A) = \{(\text{siyah arabalar}, \emptyset), (\text{mavi arabalar}, \emptyset), (\text{kırmızı arabalar}, \emptyset),$
$(\text{gri arabalar}, \emptyset)\}$

şeklindedir. Bu durumda (F,A) boş esnek kümedir.

Tanım 1.2.16. (F,A), U kümesi üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer her $e \in A$ için $F(e) = U$ ise (F,A) esnek kümesine evrensel esnek küme denir ve $\tilde{A}$ ile gösterilir (Maji ve diğ., 2003).

$\tilde{A}^c = \Phi$ ve $\Phi^c = \tilde{A}$ olduğu açıktır.

Örnek 1.2.17. $U = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$ beyaz arabaların kümesi, $B = \{\text{siyah değil, mavi değil, kırmızı değil, gri değil}\}$ parametreler kümesi olsun. (G,B) esnek kümesi "arabaların renklerini" tanımlasın. O halde;

$(G,B) = \{(\text{siyah olmayan arabalar}, \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}), (\text{mavi olmayan arabalar},$
$\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}), (\text{kırmızı olmayan arabalar}, \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}),$
$(\text{gri olmayan arabalar}, \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\})\}$

şeklindedir. Bu durumda (G,B) evrensel esnek kümedir.

Tanım 1.2.18. (F,A) ve (G,B), U kümesi üzerinde iki esnek küme olsun. "(F,A) VE (G,B)" işlemi $(F,A) \wedge (G,B) = (H, A \times B)$ ile gösterilir ve $\forall (\alpha, \beta) \in A \times B$ için $H(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cap G(\beta)$ şeklinde tanımlanır (Maji ve diğ., 2003)

Örnek 1.2.19. $U=\{c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c_7,c_8,c_9,c_{10}\}$, $A=\{\text{pahalı, makul, ucuz}\}$ ve $B=\{\text{pahalı, beyaz, 2010 model ve üzeri}\}$ olsun. (F,A) esnek kümesi arabaların fiyatlarını, (G,B) esnek kümesi arabaların özelliklerini tanımlasın.

U üzerindeki (F,A) ve (G,B) esnek kümeleri,

$F(\text{pahalı})=\{c_1,c_4,c_7\}$, $F(\text{makul})=\{c_2,c_3,c_5,c_8\}$, $F(\text{ucuz})=\{c_3,c_9,c_{10}\}$,

$G(\text{pahalı})=\{c_1,c_4,c_7\}$, $G(\text{beyaz})=\{c_5,c_6,c_8\}$,

$G(\text{2010 model ve üzeri})=\{c_4,c_5,c_{10}\}$

şeklinde verilsin. O zaman;

$H(\text{pahalı,pahalı})=\{c_1,c_4,c_7\}$, $H(\text{pahalı,beyaz})=\emptyset$,

$H(\text{pahalı,2010 model ve üzeri})=\{c_4\}$, $H(\text{makul,pahalı})=\emptyset$,

$H(\text{makul,beyaz})=\{c_5,c_8\}$, $H(\text{makul,2010 model ve üzeri})=\{c_5\}$,

$H(\text{ucuz,pahalı})=\emptyset$, $H(\text{ucuz,beyaz})=\emptyset$,

$H(\text{ucuz,2010 model ve üzeri})=\{c_{10}\}$

olmak üzere;

$$(F,A)\wedge(G,B)=\big((\text{pahalı,pahalı}),\{c_1,c_4,c_7\}\big),\big((\text{pahalı,beyaz}),\emptyset\big),$$
$$\big((\text{pahalı,2010 model ve üzeri}),\{c_4\}\big),\big((\text{makul,pahalı}),\emptyset\big),$$
$$\big((\text{makul,beyaz}),\{c_5,c_8\}\big),\big((\text{makul,2010 model ve üzeri}),\{c_5\}\big),$$
$$\big((\text{ucuz,pahalı}),\emptyset\big),\big((\text{ucuz,beyaz}),\emptyset\big),$$
$$\big((\text{ucuz,2010 model ve üzeri}),\{c_{10}\}\big)\big\}$$

şeklindedir.

Tanım 1.2.20. (F,A) ve (G,B), U kümesi üzerinde iki esnek küme olsun. "(F,A) VEYA (G,B)" işlemi $(F,A)\vee(G,B)=(O,A\times B)$ şeklinde gösterilir ve $\forall(\alpha,\beta)\in A\times B$ için $O(\alpha,\beta)=F(\alpha)\cup G(\beta)$ biçiminde tanımlanır (Maji ve diğ., 2003).

Örnek 1.2.21. Örnek 1.2.19'u ele alalım.

$O(\text{pahalı,pahalı})=\{c_1,c_4,c_7\}$,

$O(\text{pahalı,beyaz}) = \{c_1, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8\}$,

$O(\text{pahalı,2010 model ve üzeri}) = \{c_1, c_4, c_5, c_7, c_{10}\}$,

$O(\text{makul,pahalı}) = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_7, c_8\}$,

$O(\text{makul,beyaz}) = \{c_2, c_3, c_5, c_6, c_8\}$,

$O(\text{makul,2010 model ve üzeri}) = \{c_2, c_3, c_4, c_5, c_8, c_{10}\}$,

$O(\text{ucuz,pahalı}) = \{c_1, c_3, c_4, c_7, c_9, c_{10}\}$,

$O(\text{ucuz,beyaz}) = \{c_3, c_5, c_6, c_8, c_9, c_{10}\}$,

$O(\text{ucuz,2010 model ve üzeri}) = \{c_3, c_4, c_5, c_9, c_{10}\}$

olmak üzere;

$$(F,A) \vee (G,B) = \{((\text{pahalı,pahalı}), \{c_1, c_4, c_7\}),$$
$$((\text{pahalı,beyaz}), \{c_1, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8\}),$$
$$((\text{pahalı,2010 model ve üzeri}), \{c_1, c_4, c_5, c_7, c_{10}\}),$$
$$((\text{makul,pahalı}), \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_7, c_8\}),$$
$$((\text{makul,beyaz}), \{c_2, c_3, c_5, c_6, c_8\}),$$
$$((\text{makul,2010 model ve üzeri}), \{c_2, c_3, c_4, c_5, c_8, c_{10}\}),$$
$$((\text{ucuz,pahalı}), \{c_1, c_3, c_4, c_7, c_9, c_{10}\}),$$
$$((\text{ucuz,beyaz}), \{c_3, c_5, c_6, c_8, c_9, c_{10}\}),$$
$$((\text{ucuz,2010 model ve üzeri}), \{c_3, c_4, c_5, c_9, c_{10}\})\}$$

şeklindedir.

Önerme 1.2.22. (F,A) ve (G,B), U kümesi üzerinde iki esnek küme olsun. O halde;

(1) $((F,A) \vee (G,B))^c = (F,A)^c \wedge (G,B)^c$

(2) $((F,A) \wedge (G,B))^c = (F,A)^c \vee (G,B)^c$

sağlanır (Maji ve diğ., 2003).

Tanım 1.2.23. (F,A) ve (G,B), U kümesi üzerinde iki esnek küme olsun. (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin birleşimi (H,C) esnek kümesidir. Burada $C = A \cup B$ ve her $e \in C$ için,

$$H(e)=\begin{cases} F(e), & e\in A-B \\ G(e), & e\in B-A \\ F(e)\cup G(e), & e\in A\cap B \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(F,A)\tilde{\cup}(G,B)=(H,C)$ şeklinde gösterilir (Maji ve diğ., 2003).

Örnek 1.2.24. Örnek 1.2.19'u ele alalım. O halde,

$H(\text{pahalı})=\{c_1,c_4,c_7\}$, $H(\text{makul})=\{c_2,c_3,c_5,c_8\}$, $H(\text{ucuz})=\{c_3,c_9,c_{10}\}$,

$H(\text{beyaz})=\{c_5,c_6,c_8\}$, $H(\text{2010 model ve üzeri})=\{c_4,c_5,c_{10}\}$

olmak üzere;

$$(F,A)\tilde{\cup}(G,B)=(H,C)=\{((\text{pahalı}),\{c_1,c_4,c_7\}),((\text{makul}),\{c_2,c_3,c_5,c_8\}),$$
$$((\text{ucuz}),\{c_3,c_9,c_{10}\}),((\text{beyaz}),\{c_5,c_6,c_8\}),$$
$$((\text{2010 model ve üzeri}),\{c_4,c_5,c_{10}\})\}$$

şeklindedir.

Önerme 1.2.25. (F,A), (G,B) ve (H,C), U kümesi üzerinde üç esnek küme olsun. O halde;

(1) $(F,A)\tilde{\cup}(F,A)=(F,A)$

(2) $(F,A)\tilde{\cup}\Phi=(F,A)$

(3) $(F,A)\tilde{\cup}\tilde{A}=\tilde{A}$

(4) $(F,A)\tilde{\cup}(G,B)=(G,B)\tilde{\cup}(F,A)$

(5) $(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B)\Rightarrow(F,A)\tilde{\cup}(G,B)=(G,B)$

(6) $((F,A)\tilde{\cup}(G,B))\tilde{\cup}(H,C)=(F,A)\tilde{\cup}((G,B)\tilde{\cup}(H,C))$

sağlanır (Enginoğlu, 2008).

Tanım 1.2.26. (F,A) ve (G,B), U kümesi üzerinde iki esnek küme olsun. (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin arakesiti (H,C) esnek kümesidir. Burada $C=A\cap B$ ve her $e\in C$ için,

$H(e)=F(e)\cap G(e)$

şeklinde tanımlanır ve $(F,A)\tilde{\cap}(G,B)=(H,C)$ ile gösterilir (Maji ve diğ., 2003).

Örnek 1.2.27. Örnek 1.2.19'u ele alalım. $C = A \cap B$ olduğundan,

$C = \{\text{pahalı}\}$

kümesidir. O halde;

$(F,A)\tilde{\cap}(G,B) = (H,C) = \{(\text{pahalı}, \{c_1, c_4, c_7\})\}$

şeklindedir.

Önerme 1.2.28 (F,A), (G,B) ve (H,C), U kümesi üzerinde üç esnek küme olsun. O halde;

(1) $(F,A)\tilde{\cap}(F,A) = (F,A)$

(2) $(F,A)\tilde{\cap}\Phi = \Phi$

(3) $(F,A)\tilde{\cap}\tilde{A} = (F,A)$

(4) $(F,A)\tilde{\cap}(G,B) = (G,B)\tilde{\cap}(F,A)$

(5) $((F,A)\tilde{\cap}(G,B))\tilde{\cap}(H,C) = (F,A)\tilde{\cap}((G,B)\tilde{\cap}(H,C))$

(6) $(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B) \Rightarrow (F,A)\tilde{\cap}(G,B) = (F,A)$

sağlanır (Enginoğlu, 2008).

Önerme 1.2.29. (F,A) ve (G,B) U kümesi üzerinde iki esnek küme olsun. O halde;

(1) $(F,A)\tilde{\cup}((G,B)\tilde{\cap}(H,C)) = ((F,A)\tilde{\cup}(G,B))\tilde{\cap}((F,A)\tilde{\cup}(H,C))$

(2) $(F,A)\tilde{\cap}((G,B)\tilde{\cup}(H,C)) = ((F,A)\tilde{\cap}(G,B))\tilde{\cup}((F,A)\tilde{\cap}(H,C))$

sağlanır (Enginoğlu, 2008).

2. OLASILIKLI ESNEK KÜME TEORİSİ

Bu bölümde Zhu ve Wen (2010) tarafından verilen olasılıklı dağılım ve olasılıklı esnek küme tanımı genelleştirilmiştir. Önce olasılıklı dağılım tanımı genelleştirilerek olasılıklı küme tanımı verilmiş ve olasılıklı kümeler üzerinde temel işlemler verilerek olasılıklı kümelerin özellikleri incelenmiştir. Daha sonra olasılıklı esnek kümeler üzerindeki işlemler tanımlanarak, olasılıklı esnek kümelerin başlıca özellikleri incelenmiştir. Son olarak olasılıklı esnek matrisler tanımlanıp olasılıklı esnek matrislerin temel özellikleri verilmiştir.

2.1. Olasılıklı Küme Teorisindeki Temel Kavramlar

Molodtsov'un esnek küme teorisi ile olasılık teorisini birleştiren olasılıklı esnek kümeler kavramı ilk defa Zhu ve diğ. (2010) tarafından ortaya atılmıştır. Bu çalışmada, değer kümesi olarak Molodtsov'un esnek kümesindeki küme değerli dönüşümü, olasılık dağılımlarına sahip olan bir dönüşümle yer değiştirilmiştir.

Tanım 2.1.1. U sonlu bir küme olsun. Eğer $\sum_{x\in U}\mu(x)=1$ ise $\mu:U\to[0,1]$

fonksiyonuna U kümesi üzerinde bir olasılık dağılımı denir.

U kümesi üzerindeki tüm olasılık dağılımlarının kümesi $D(U)$ ile gösterilir (Zhu ve diğ., 2010).

Tanım 2.1.2. $\{x\in U:\mu(x)>0\}$ kümesine μ fonksiyonunun desteği denir.

Desteği $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ olan μ olasılıklı dağılımı,

$$\mu=\frac{\mu(x_1)}{x_1}+\frac{\mu(x_2)}{x_2}+\ldots+\frac{\mu(x_n)}{x_n}$$

şeklinde de yazılabilir (Zhu ve diğ., 2010).

Tanım 2.1.3. U evrensel küme, E parametrelerin bir kümesi ve $A\subset E$ olsun. $F:A\to D(U)\cup\{\perp\}$ bir dönüşüm olmak üzere (F,A) çiftine U kümesi üzerinde bir olasılıklı esnek küme denir.

Burada $\perp$ ile esnek kümelerdeki boş alt küme olan dönüşüm gösterilir (Zhu ve diğ., 2010).

Örnek 2.1.4. Sıradan bir gün için hava durumu tahminini ele alalım.

$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8\}=\{$güneşli, az güneşli, parçalı bulutlu, yoğun bulutlu, kapalı, az yağmurlu, gökgürültülü yağmurlu, sağanak$\}$

evrensel küme,

$E=\{$sabah, öğle, öğleden sonra, akşam, gece$\}$ parametreler kümesi ve

$A=\{$sabah, öğleden sonra, akşam, gece$\}\subset E$ olsun.

(F,A) olasılıklı esnek kümesi hava durumu tahminini tanımlasın. O halde;

$$F(\text{sabah})=\frac{0,9}{u_1}+\frac{0,1}{u_2}, \qquad F(\text{öğleden sonra})=\frac{0,6}{u_4}+\frac{0,3}{u_5}+\frac{0,1}{u_7}$$

$$F(\text{akşam})=\frac{0,6}{u_5}+\frac{0,4}{u_7}, \qquad F(\text{gece})=\frac{0,2}{u_6}+\frac{0,8}{u_7}$$

şeklindedir (Zhu ve diğ., 2010).

Zhu ve diğ. (2010) tarafından verilen olasılıklı dağılım tanımında, parametreler kümesinin alt kümesinde de $\sum_{x\in U}\mu(x)=1$ koşulu bulunmaktadır. Bu ise olasılıklı esnek kümeler üzerindeki işlemlerde zorluklara sebep olmaktadır. Bu zorluklar parametreler kümesinin altkümelerinde olasılık değerlerinin toplamının her zaman $\sum_{x\in U}\mu(x)=1$ koşulunu vermemesinden kaynaklanmaktadır. Bu çalışmada bu zorlukların giderilmesi için olasılıklı dağılım tanımı yeniden düzenlenerek olasılıklı küme tanımı verilmiştir.. Bu tanımdan faydalanılarak olasılıklı kümeler üzerinde temel işlemler tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.5. U sonlu bir evrensel küme olsun. U üzerinde $\mu_X:U\to I=[0,1]$ fonksiyonu yardımıyla tanımlanan ve

(1) $\forall V\subset U$ için $\sum_{u\in V}\mu_X(u)\le 1$,

(2) Eğer $V=U$ ise $\sum_{u\in V}\mu_X(u)=1$ veya $\sum_{u\in V}\mu_X(u)=0$

koşullarını sağlayan kümeye bir olasılıklı küme denir ve X ile gösterilir. Burada μ_X

fonksiyonuna, X in üyelik fonksiyonu ve $\mu_X(u)$ değerine, $u \in U$ nun üyelik derecesi denir. Böylece U üzerindeki bir X olasılıklı kümesi;

$$X = \{(\mu_X(u)/u) : u \in U\}$$

şeklinde ifade edilir.

U üzerindeki tüm olasılıklı kümelerin kümesi $\Pr(U)$ ile gösterilecektir.

Açık olarak her olasılıklı küme bir bulanık kümedir. Ancak iki küme arasında şöyle bir ayrım vardır. Olasılıklı küme kavramı bir olayın gerçekleşme ihtimalini verir yani olaylar gerçekleşir veya gerçekleşmez. Bulanık küme kavramında ise olayın gerçekleşip gerçekleşmeyeceği hakkında bir kesinlik belirtilemez. Örneğin, bir buzdolabında %6 sı bozuk 50 yumurtanın olduğunu düşünelim. Bulanık küme kavramını düşünürsek bozuk yumurtaların üyelik fonksiyonunun değeri 0.06 dır. O halde her yumurta %6 oranında bozuktur ve hangi yumurtayı seçersek seçelim bir fark olmayacaktır. Olasılıklı küme kavramını düşünürsek, 47 yumurta sağlam iken 3 yumurta bozuk olacaktır. Böylece 50 yumurtadan herhangi birini seçersek iki ihtimal vardır: yumurta sağlamdır veya yumurta bozuktur. Yani, iyi yumurta seçme ihtimali oldukça yüksektir. Buna göre olasılıklı küme ve bulanık küme ilişkili fakat farklı kavramlar olarak düşünülür (Sanjaa ve diğ., 2007).

Olasılıklı küme teorisindeki işlemler, bulanık küme teorisindeki işlemlerin aksine, bilinen klasik küme teorisine paraleldir.

Tanım 2.1.6. X, U sonlu kümesi üzerinde bir olasılıklı küme olsun. Eğer $\forall u \in U$ için;

$$\mu_X : U \to I, \quad \mu_X(u) = 0$$

sağlanıyorsa X olasılıklı kümesine boş olasılıklı küme denir ve Ø ile gösterilir.

Tanım 2.1.7. $X, Y \in \Pr(U)$ olsun. O halde her $(\mu_X(u)/u) \in X$ için $(\mu_X(u)/u) \in Y$ sağlanıyorsa X olasılıklı kümesine Y olasılıklı kümesinin alt kümesi denir ve $X \subseteq Y$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.8. $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$ bir evrensel küme, $X=\{0,4/u_1, 0,1/u_2, 0,2/u_3\}$ ve $Y=\{0,4/u_1, 0,1/u_2, 0,2/u_3, 0,3/u_4\}$ U üzerinde iki olasılıklı küme olsun. O halde $X \subseteq \mathrm{Y}$ dir.

Önerme 2.1.9. $X,Y \in \Pr(U)$ olsun. O halde aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(1) $X \subseteq X$

(2) $X \subseteq Y$ ve $Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$

İspat: Açıktır.

Tanım 2.1.10. $X,Y \in \Pr(U)$ olsun. O halde $X \subseteq \mathrm{Y}$ ve $Y \subseteq \mathrm{X}$ ise X olasılıklı kümesi Y olasılıklı kümesine eşittir denir ve $X = \mathrm{Y}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.11. $X,Y \in \Pr(U)$ olsun. O halde X olasılıklı kümesi ve Y olasılıklı kümesinin tüm $(\mu_X(u)/u)$ elemanlarından oluşan kümeye X olasılıklı kümesi ile Y olasılıklı kümesinin birleşimi denir ve $X \cup \mathrm{Y}$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.12. Örnek 2.1.8'i ele alalım. O halde;

$X \cup \mathrm{Y}=\{0,4/u_1, 0,1/u_2, 0,2/u_3, 0,3/u_4\}$

şeklindedir.

Önerme 2.1.13. $X,Y,Z \in \Pr(U)$ olsun. O halde aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(1) $X \cup X = X$

(2) $X \cup Y = Y \cup X$

(3) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$

(4) $X \subseteq X \cup Y$ ve $Y \subseteq X \cup Y$

(5) $X \subseteq Y \Rightarrow X \cup Y = Y$

İspat: (2)'nin ispatını verelim. Diğerleri benzer şekilde yapılır.

(2) $\forall(\mu_X(u)/u) \in X \cup Y$ için,

$$(\mu_X(u)/u) \in X \cup Y \Leftrightarrow (\mu_X(u)/u) \in X \text{ veya } (\mu_X(u)/u) \in Y$$
$$\Leftrightarrow (\mu_X(u)/u) \in Y \text{ veya } (\mu_X(u)/u) \in X$$

$$\Leftrightarrow (\mu_X(u)/u) \in Y \cup X$$

olduğundan $X \cup Y = Y \cup X$ elde edilir.

Tanım 2.1.14. $X, Y \in \Pr(U)$ olsun. O halde X olasılıklı kümesi ve Y olasılıklı kümesinin ortak $(\mu_X(u)/u)$ elemanlarından oluşan kümeye X olasılıklı kümesi ile Y olasılıklı kümesinin arakesiti denir ve $X \cap Y$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.15. Örnek 2.1.8'i ele alalım. O halde;

$X \cap Y = \{0,4/u_1, 0,1/u_2, 0,2/u_3\}$

şeklindedir.

Önerme 2.1.16. $X, Y, Z \in \Pr(U)$ olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(1) $X \cap X = X$

(2) $X \cap Y = Y \cap X$

(3) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$

(4) $X \cap Y \subseteq X$ ve $X \cap Y \subseteq Y$

(5) $X \subseteq Y \Rightarrow X \cap Y = X$

İspat: (2)'nin ispatını verelim. Diğerleri benzer şekilde yapılır.

(2) $\forall (\mu_X(u)/u) \in X \cap Y$ için,

$$(\mu_X(u)/u) \in X \cap Y \Leftrightarrow (\mu_X(u)/u) \in X \text{ ve } (\mu_X(u)/u) \in Y$$
$$\Leftrightarrow (\mu_X(u)/u) \in Y \text{ ve } (\mu_X(u)/u) \in X$$
$$\Leftrightarrow (\mu_X(u)/u) \in Y \cap X$$

olduğundan $X \cap Y = Y \cap X$ elde edilir

Önerme 2.1.17. $X, Y, Z \in \Pr(U)$ olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(1) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

(2) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

İspat: (1)'in ispatını verelim. (2) benzer şekilde yapılır

(1) $\forall (\mu_X(u)/u) \in X \cup (Y \cap Z)$ için,

$$(\mu_X(u)/u) \in X \cup (Y \cap Z) \Leftrightarrow (\mu_X(u)/u) \in X \text{ veya } (\mu_X(u)/u) \in Y \cap Z$$

$$\Leftrightarrow (\mu_X(u)/u) \in X \text{ veya}$$
$$((\mu_X(u)/u) \in Y \text{ ve } (\mu_X(u)/u) \in Z)$$
$$\Leftrightarrow ((\mu_X(u)/u) \in X \text{ veya } (\mu_X(u)/u) \in Y) \text{ ve}$$
$$((\mu_X(u)/u) \in X \text{ veya } (\mu_X(u)/u) \in Z)$$
$$\Leftrightarrow (\mu_X(u)/u) \in X \cup Y \text{ ve } (\mu_X(u)/u) \in X \cup Z$$
$$\Leftrightarrow (\mu_X(u)/u) \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

olduğundan $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ elde edilir.

Tanım 2.1.18. $X, Y \in \Pr(U)$ olsun. O halde X olasılıklı kümesinde olup Y olasılıklı kümesinde olmayan $(\mu_X(u)/u)$ elemanlarının oluşturduğu kümeye X olasılıklı kümesinin Y olasılıklı kümesinden farkı denir ve $X \backslash Y$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.19. Örnek 2.1.8'i ele alalım. O halde;

$X \backslash Y = \varnothing$

şeklindedir.

Önerme 2.1.20. $X, Y, Z \in \Pr(U)$ olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(1) $X \backslash (Y \cup Z) = (X \backslash Y) \cap (X \backslash Z)$

(2) $X \backslash (Y \cap Z) = (X \backslash Y) \cup (X \backslash Z)$

İspat: (1)'in ispatını verelim. (2) benzer şekilde yapılır.

(1) $\forall (\mu_X(u)/u) \in X \backslash (Y \cup Z)$ için,

$$(\mu_X(u)/u) \in X \backslash (Y \cup Z) \Leftrightarrow (\mu_X(u)/u) \in X \text{ ve } (\mu_X(u)/u) \notin (Y \cup Z)$$
$$\Leftrightarrow (\mu_X(u)/u) \in X \text{ ve}$$
$$((\mu_X(u)/u) \notin Y \text{ ve } (\mu_X(u)/u) \notin Z)$$
$$\Leftrightarrow ((\mu_X(u)/u) \in X \text{ ve } (\mu_X(u)/u) \notin Y) \text{ ve}$$
$$((\mu_X(u)/u) \in X \text{ ve } (\mu_X(u)/u) \notin Z)$$
$$\Leftrightarrow ((\mu_X(u)/u) \in X \backslash Y) \text{ ve } ((\mu_X(u)/u) \in X \backslash Z)$$
$$\Leftrightarrow (\mu_X(u)/u) \in (X \backslash Y) \cap (X \backslash Z)$$

olduğundan $X \backslash (Y \cup Z) = (X \backslash Y) \cap (X \backslash Z)$ elde edilir.

Tanım 2.1.21. $X,Y \in \Pr(U)$ ve $X \subset Y$ olsun. O zaman X olasılıklı kümesinin Y olasılıklı kümesindeki olasılıklı tümleyeni Y\X ile tanımlanır ve X_Y^c ile gösterilir.

Örnek 2.1.22. Örnek 2.1.8'i ele alalım. O halde;

$X_Y^c = \{0,3/u_4\}$

şeklindedir.

Önerme 2.1.23. $X,Y,Z \in \Pr(U)$ ve $X,Y \subset Z$ olsun. O halde X ve Y olasılıklı kümeleri için De' Morgan kuralları sağlanır:

(1) $(X \cap Y)_Z^c = X_Z^c \cup Y_Z^c$

(2) $(X \cup Y)_Z^c = X_Z^c \cap Y_Z^c$

İspat: (1)'in ispatını verelim. (2) benzer şekilde yapılır.

(1) $\forall(\mu_X(u)/u) \in (X \cap Y)_Z^c$ için,

$$
\begin{aligned}
(\mu_X(u)/u) \in (X \cap Y)_Z^c &\Leftrightarrow (\mu_X(u)/u) \in Z \setminus (X \cap Y) \\
&\Leftrightarrow (\mu_X(u)/u) \in Z \text{ ve } (\mu_X(u)/u) \notin X \cap Y \\
&\Leftrightarrow (\mu_X(u)/u) \in Z \text{ ve} \\
&\quad \left((\mu_X(u)/u) \notin X \text{ veya } (\mu_X(u)/u) \notin Y\right) \\
&\Leftrightarrow \left((\mu_X(u)/u) \in Z \text{ ve } (\mu_X(u)/u) \notin X\right) \text{ veya} \\
&\quad \left((\mu_X(u)/u) \in Z \text{ ve } (\mu_X(u)/u) \notin Y\right) \\
&\Leftrightarrow (\mu_X(u)/u) \in Z \setminus X \text{ veya } (\mu_X(u)/u) \in Z \setminus Y \\
&\Leftrightarrow (\mu_X(u)/u) \in X_Z^c \text{ veya } (\mu_X(u)/u) \in Y_Z^c \\
&\Leftrightarrow (\mu_X(u)/u) \in X_Z^c \cup Y_Z^c
\end{aligned}
$$

olduğundan $(X \cap Y)_Z^c = X_Z^c \cup Y_Z^c$ elde edilir.

2.2. Olasılıklı Esnek Kümeler

Bu bölümde olasılıklı esnek kümeler ve olasılıklı esnek kümelerin temel işlemleri tanımlanmıştır.

Bu bölüm boyunca U sonlu bir evrensel küme, E bir parametre kümesi ve $A \subset E$ olarak alınacaktır.

Tanım 2.2.1. U kümesi üzerinde, $x \notin A$ için $p_A(x) = \emptyset$ koşulunu sağlayacak şekilde $p_A : E \to \Pr(U)$ fonksiyonu yardımıyla tanımlanan kümeye olasılıklı esnek küme (prs-küme) denir ve P_A ile gösterilir. O halde U üzerindeki P_A olasılıklı esnek kümesi;

$$P_A = \{(x, p_A(x)) : x \in A\}$$

şeklinde sıralı çiftlerin kümesi ile gösterilir. Burada p_A fonksiyonuna P_A olasılıklı esnek kümesinin olasılıklı yaklaşım fonksiyonu denir.

Başka bir deyişle, olasılıklı esnek küme, olasılıklı kümelerin parametrize edilmiş bir ailesini verir.

U kümesi üzerindeki tüm P_A olasılıklı esnek kümelerin kümesi $\Pr S(U)$ ile gösterilecektir.

Olasılıklı küme ve bulanık küme arasındaki aynı bağlantı olasılıklı esnek küme ve bulanık esnek küme arasında da vardır. Yani olasılıklı esnek küme ve bulanık esnek küme ilişkili fakat farklı kavramlar olarak düşünülür.

Örnek 2.2.2. P_A olasılıklı esnek kümesi evlere ait özelliklerin olasılıklarını tanımlasın. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ evlerin kümesi ve $E = \{\text{ucuzluk, güzellik, denize yakınlık, şehir merkezine yakınlık}\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ parametreler kümesi olsun.

$A = \{x_1, x_3, x_4\} \subset E$ için,

$p_A(x_1) = \{0,9/u_2, 0,1/u_4\}$,

$p_A(x_3) = \{0,2/u_1, 0,2/u_2, 0,2/u_3, 0,2/u_4, 0,2/u_5\}$,

$p_A(x_4) = \{0,2/u_1, 0,4/u_3, 0,4/u_5\}$

olsun. Burada $p_A(x_1)$, A kümesindeki evlerin ucuzluk parametresine göre olasılık değerlerini verir. Yani u_2 evi %90 olasılıkla ucuz ve u_4 evi %10 olasılıkla ucuzdur. Böylece u_2 evinin çok ucuz, u_4 evinin ise yeterince ucuz olmadığı ve u_1, u_3, u_5 evlerinin ise hiç ucuz olmadığı sonucunu elde ederiz.

O halde P_A olasılıklı esnek kümesi;

$$P_A = \{(x_1, \{0,9/u_2, 0,1/u_4\}), (x_3, \{0,2/u_1, 0,2/u_2, 0,2/u_3, 0,2/u_4, 0,2/u_5\}),$$
$$(x_4, \{0,2/u_1, 0,4/u_3, 0,4/u_5\})\}$$

şeklindedir.

Açık olarak U üzerindeki bir esnek kümeyi olasılıklı esnek küme olarak düşünebiliriz.

Tanım 2.2.3. $P_A \in \Pr S(U)$ olsun. Eğer her $x \in A$ için $p_A(x) = \emptyset$ ise P_A ya A-imkansız olasılıklı esnek küme denir ve P_Φ ile gösterilir.

Tanım 2.2.4. $P_A, P_B \in \Pr S(U)$ olsun. Eğer,

(1) $A \subseteq B$,

(2) Her $x \in A$ için $p_A(x) \subseteq p_B(x)$

koşulları sağlanıyorsa P_A olasılıklı esnek kümesine P_B olasılıklı esnek kümesinin bir altkümesi denir ve $P_A \tilde{\subseteq} P_B$ ile gösterilir. P_B olasılıklı esnek kümesine de P_A olasılıklı esnek kümesinin bir üstkümesi denir ve $P_B \tilde{\supseteq} P_A$ ile gösterilir.

Önerme 2.2.5. $P_A, P_B \in \Pr S(U)$ olsun. O halde aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(1) $P_A \tilde{\subseteq} P_A$

(2) $P_A \tilde{\subseteq} P_B$ ve $P_B \tilde{\subseteq} P_C \Rightarrow P_A \tilde{\subseteq} P_C$

İspat: Önerme olasılıklı esnek kümelerin olasılıklı yaklaşım fonksiyonlarını kullanarak kolaylıkla ispatlanır.

Uyarı 2.2.6. $P_A \tilde{\subseteq} P_B$ olması P_A olasılıklı esnek kümesinin her sıralı çiftinin P_B olasılıklı esnek kümesinin bir sıralı çifti olması anlamına gelmez.

Örnek 2.2.7. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ bir evrensel küme, $E = \{x_1, x_2, x_3\}$ parametre kümesi ve,

$x_1 \rightarrow \{0,4/u_1, 0,2/u_2, 0,4/u_5\}$,

$x_2 \rightarrow \{0,2/u_1, 0,4/u_2, 0,1/u_3, 0,1/u_4, 0,2/u_5\}$,

$x_3 \to \{1/u_3\}$

olsun. Eğer $A=\{x_1\}$ ve $B=\{x_1,x_2\}$ ise o halde;

$p_A(x_1)=\{0,4/u_1, 0,2/u_2\}$,

$p_B(x_1)=\{0,4/u_1, 0,2/u_2, 0,4/u_5\}$,

$p_B(x_2)=\{0,2/u_1, 0,4/u_2, 0,1/u_3\}$

olmak üzere;

$P_A=\{(x_1,\{0,4/u_1, 0,2/u_2\})\}$,

$P_B=\{(x_1,\{0,4/u_1, 0,2/u_2, 0,4/u_5\}),(x_2,\{0,2/u_1, 0,4/u_2, 0,1/u_3\})\}$

dir. O halde her $x\in A$ için $p_A(x)\subseteq p_B(x)$ sağlandığından $P_A\tilde{\subseteq}P_B$ elde edilir. Fakat $(x_1,\{0,4/u_1, 0,2/u_2\})\in P_A$ olmasına rağmen $(x_1,\{0,4/u_1, 0,2/u_2\})\notin P_B$ olduğu açıktır.

Tanım 2.2.8. $P_A,P_B\in \Pr S(U)$ olsun. Eğer $P_A\tilde{\subseteq}P_B$ ve $P_A\tilde{\supseteq}P_B$ ise P_A ve P_B olasılıklı esnek kümelerine eşit kümeler denir ve $P_A\tilde{=}P_B$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.9. $P_A,P_B\in \Pr S(U)$ olsun. O halde P_A ve P_B olasılıklı esnek kümelerinin farkı her $x\in E$ için,

$p_{A\backslash B}(x)=p_A(x)\backslash p_B(x)$

şeklinde olasılıklı esnek kümelerin olasılıklı yaklaşım fonksiyonları yardımıyla tanımlanır ve $P_A\tilde{\backslash}P_B$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.10. $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$ bir evrensel küme, $E=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ parametre kümesi ve,

$x_1 \to \{0,4/u_1, 0,2/u_2, 0,4/u_5\}$,

$x_2 \to \{0,2/u_1, 0,4/u_2, 0,1/u_3, 0,1/u_4, 0,2/u_5\}$,

$x_3 \to \{1/u_3\}$,

$x_4 \to \{0,2/u_1, 0,1/u_2, 0,3/u_3, 0,2/u_4, 0,2/u_5\}$

olsun. Eğer $A=\{x_1,x_2\}$ ve $B=\{x_1,x_2,x_4\}$ ise;

$p_A(x_1)=\{0,2/u_2, 0,4/u_5\}$, $p_A(x_2)=\{0,2/u_1, 0,1/u_4\}$,

$p_B(x_1)=\{0,4/u_1, 0,2/u_2, 0,4/u_5\}$, $p_B(x_2)=\{0,4/u_2, 0,1/u_3\}$,

$p_B(x_4)=\{0,2/u_4, 0,2/u_5\}$

olmak üzere;

$P_A=\{(x_1,\{0,2/u_2, 0,4/u_5\}),(x_2,\{0,2/u_1, 0,1/u_4\})\}$,

$P_B=\{(x_1,\{0,4/u_1, 0,2/u_2, 0,4/u_5\}),(x_2,\{0,4/u_2, 0,1/u_3\}),(x_4,\{0,2/u_4, 0,2/u_5\})\}$

dir. O halde;

$P_A \backslash P_B=\{(x_2,\{0,2/u_1, 0,1/u_4\})\}$

şeklindedir.

Tanım 2.2.11. $P_A, P_B \in \Pr S(U)$ olsun. P_A ve P_B olasılıklı esnek kümelerinin birleşimi her $x \in E$ için,

$p_{A\cup B}(x)=p_A(x)\cup p_B(x)$

şeklinde olasılıklı esnek kümelerinin olasılıklı yaklaşım fonksiyonları yardımıyla tanımlanır ve $P_A \tilde{\cup} P_B$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.12. Örnek 2.2.10'u ele alalım. Burada $A\cup B=\{x_1,x_2,x_4\}$ olduğundan,

$p_{A\cup B}(x_1)=p_A(x_1)\cup p_B(x_1)=\{0,4/u_1, 0,2/u_2, 0,4/u_5\}$,

$p_{A\cup B}(x_2)=p_A(x_2)\cup p_B(x_2)=\{0,2/u_1, 0,4/u_2, 0,1/u_3, 0,1/u_4\}$,

$p_{A\cup B}(x_4)=p_A(x_4)\cup p_B(x_4)=\{0,2/u_4, 0,2/u_5\}$

dir. O halde;

$P_A \tilde{\cup} P_B=\{(x_1,\{0,4/u_1, 0,2/u_2, 0,4/u_5\}),(x_2,\{0,2/u_1, 0,4/u_2, 0,1/u_3, 0,1/u_4\}),$
$(x_4,\{0,2/u_4, 0,2/u_5\})\}$

şeklindedir.

Önerme 2.2.13. $P_A, P_B, P_C \in \Pr S(U)$ olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(1) $P_A \tilde{\cup} P_A = P_A$

(2) $P_A \tilde{\cup} P_B = P_B \tilde{\cup} P_A$

(3) $(P_A \tilde{\cup} P_B) \tilde{\cup} P_C = P_A \tilde{\cup} (P_B \tilde{\cup} P_C)$

İspat: (2)'nin ispatını verelim. Diğerleri benzer şekilde yapılır.

(2) $\forall x \in E$ için,

$$\begin{aligned} p_{A \cup B}(x) &= p_A(x) \cup p_B(x) \\ &= p_B(x) \cup p_A(x) \\ &= p_{B \cup A}(x) \end{aligned}$$

olduğundan $P_A \tilde{\cup} P_B = P_B \tilde{\cup} P_A$ elde edilir.

Tanım 2.2.14. $P_A, P_B \in \Pr S(U)$ olsun. P_A ve P_B olasılıklı esnek kümelerinin arakesiti her $x \in A \cap B$ için,

$$p_{A \cap B}(x) = p_A(x) \cap p_B(x)$$

şeklinde olasılıklı esnek kümelerin olasılıklı yaklaşım fonksiyonları yardımıyla tanımlanır ve $P_A \tilde{\cap} P_B$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.15. Örnek 2.2.10' u ele alalım. O halde $A \cap B = \{x_1, x_2\}$ ve,

$$p_{A \cap B}(x_1) = p_A(x_1) \cap p_B(x_1) = \{0,2/u_2, 0,4/u_5\},$$

$$p_{A \cap B}(x_2) = p_A(x_2) \cap p_B(x_2) = \varnothing$$

olduğundan,

$$P_A \tilde{\cap} P_B = \{(x_1, \{0,2/u_2, 0,4/u_5\})\}$$

şeklindedir.

Önerme 2.2.16. $P_A, P_B, P_C \in \Pr S(U)$ olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(1) $P_A \tilde{\cap} P_A = P_A$

(2) $P_A \tilde{\cap} P_B = P_B \tilde{\cap} P_A$

(3) $(P_A \tilde{\cap} P_B) \tilde{\cap} P_C = P_A \tilde{\cap} (P_B \tilde{\cap} P_C)$

İspat: (2)'nin ispatını verelim. Diğerleri benzer şekilde yapılır.

(2) $\forall x \in E$ için,

$$\begin{aligned} p_{A \cap B}(x) &= p_A(x) \cap p_B(x) \\ &= p_B(x) \cap p_A(x) \end{aligned}$$

$= p_{B\cap A}(x)$

olduğundan $P_A \tilde{\cap} P_B = P_B \tilde{\cap} P_A$ elde edilir.

Tanım 2.2.17. $P_A, P_B \in \Pr S(U)$ ve $P_A \tilde{\subseteq} P_B$ olsun. O halde P_A olasılıklı esnek kümesinin P_B olasılıklı esnek kümesindeki tümleyeni $(P_A)^c_{P_B}$ şeklinde gösterilir ve $\forall x \in E$ için,

$(p_A)^c_{p_B}(x) = p_B(x) \backslash \mathrm{p_A}(x)$

şeklinde olasılıklı esnek kümelerin olasılıklı yaklaşım fonksiyonları yardımıyla tanımlanır.

Örnek 2.2.18. Örnek 2.2.7' yi ele alalım. O halde;

$(P_A)^c_{P_B} = \{(x_1, \{0,4/u_5\}), (x_2, \{0,2/u_1, 0,4/u_2, 0,1/u_3\})\}$

şeklindedir.

Önerme 2.2.19. $P_A, P_B, P_C \in \Pr S(U)$ ve $P_A, P_B \tilde{\subseteq} P_C$ olsun. O halde P_A ve P_B olasılıklı esnek kümeleri için De' Morgan kuralları sağlanır:

(1) $(P_A \tilde{\cap} P_B)^c_{P_C} = (P_A)^c_{P_C} \tilde{\cup} (P_B)^c_{P_C}$

(2) $(P_A \tilde{\cup} P_B)^c_{P_C} = (P_A)^c_{P_C} \tilde{\cap} (P_B)^c_{P_C}$.

İspat:

(1) $\forall x \in E$ için,

$$\begin{aligned}(p_{A\cap B})^c_{p_C}(x) &= (p_A \cap p_B)^c_{p_C}(x)\\ &= p_C(x) \backslash (\mathrm{p_A} \cap p_B)(x)\\ &= (p_C(x) \backslash \mathrm{p_A}(x)) \cup (p_C(x) \backslash \mathrm{p_B}(x))\\ &= (\mathrm{p_A})^c_{p_C}(x) \cup (\mathrm{p_B})^c_{p_C}(x)\end{aligned}$$

olduğundan $(P_A \tilde{\cup} P_B)^c_{P_C} = (P_A)^c_{P_C} \tilde{\cap} (P_B)^c_{P_C}$ elde edilir.

(2) $\forall x \in E$ için,

$(p_{A\cup B})^c_{p_C}(x) = (p_A \cup p_B)^c_{p_C}(x)$

$$= p_C(x) \setminus (p_A \cup p_B)(x)$$
$$= (p_C(x) \setminus p_A(x)) \cap (p_C(x) \setminus p_B(x))$$
$$= (p_A)^c_{p_C}(x) \cap (p_B)^c_{p_C}(x)$$

olduğundan $(P_A \tilde{\cap} P_B)^c_{P_C} = (P_A)^c_{P_C} \tilde{\cup} (P_B)^c_{P_C}$ elde edilir.

Önerme 2.2.20. $P_A, P_B, P_C \in \Pr S(U)$ olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(1) $P_A \tilde{\cup} (P_B \tilde{\cap} P_C) = (P_A \tilde{\cup} P_B) \tilde{\cap} (P_A \tilde{\cup} P_C)$

(2) $P_A \tilde{\cap} (P_B \tilde{\cup} P_C) = (P_A \tilde{\cap} P_B) \tilde{\cup} (P_A \tilde{\cap} P_C)$

İspat:

(1) $\forall x \in E$ için,

$$p_{A \cup (B \cap C)}(x) = p_A(x) \cup p_{B \cap C}(x)$$
$$= p_A(x) \cup (p_B(x) \cap p_C(x))$$
$$= (p_A(x) \cup p_B(x)) \cap (p_A(x) \cup p_C(x))$$
$$= p_{A \cup B}(x) \cap p_{A \cup C}(x)$$
$$= p_{(A \cup B) \cap (A \cup C)}(x)$$

olduğundan $P_A \tilde{\cup} (P_B \tilde{\cap} P_C) = (P_A \tilde{\cup} P_B) \tilde{\cap} (P_A \tilde{\cup} P_C)$ elde edilir.

(2) $\forall x \in E$ için,

$$p_{A \cap (B \cup C)}(x) = p_A(x) \cap p_{B \cup C}(x)$$
$$= p_A(x) \cap (p_B(x) \cup p_C(x))$$
$$= (p_A(x) \cap p_B(x)) \cup (p_A(x) \cap p_C(x))$$
$$= p_{A \cap B}(x) \cup p_{A \cap C}(x)$$
$$= p_{(A \cap B) \cup (A \cap C)}(x)$$

olduğundan $P_A \tilde{\cap} (P_B \tilde{\cup} P_C) = (P_A \tilde{\cap} P_B) \tilde{\cup} (P_A \tilde{\cap} P_C)$ elde edilir.

Önerme 2.2.21. $P_A, P_B, P_C \in \Pr S(U)$ ve $P_B \tilde{\subseteq} P_C$ olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(1) $P_A \tilde{\setminus} P_B = P_A \tilde{\cap} (P_B)^c_{P_C}$

(2) $P_A \tilde{\setminus} P_B = P_\Phi \Leftrightarrow P_A \tilde{\subseteq} P_B$.

İspat: Önerme olasılıklı esnek kümelerin olasılıklı yaklaşım fonksiyonlarını kullanarak ispatlanır.

Tanım 2.2.22. $P_A, P_B \in \Pr S(U)$ olsun. O halde P_A ve P_B olasılıklı esnek kümelerinin simetrik farkı $\forall x \in E$ için,

$p_A(x) \Delta p_B(x) = (p_A(x) \setminus p_B(x)) \cup (p_B(x) \setminus p_A(x))$

şeklindeki olasılıklı esnek kümelerin olasılıklı yaklaşım fonksiyonları yardımıyla tanımlanır ve $P_A \tilde{\Delta} P_B$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.23. Örnek 2.2.10'u ele alalım. O halde;

$P_A \tilde{\setminus} P_B = \{(x_2, \{0,2/u_1, 0,1/u_4\})\}$,

$P_B \tilde{\setminus} P_A = \{(x_1, \{0,4/u_1\}), (x_2, \{0,4/u_2, 0,1/u_3\}), (x_4, \{0,2/u_4, 0,2/u_5\})\}$

olduğundan,

$P_A \tilde{\Delta} P_B = \{(x_1, \{0.4/u_1\}), (x_2, \{0.2/u_1, 0.4/u_2, 0.1/u_3, 0.1/u_4\}), (x_4, \{0.2/u_4, 0.2/u_5\})\}$

şeklindedir.

Önerme 2.2.24. $P_A, P_B, P_C \in \Pr S(U)$ olsun. O halde aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(1) $P_A \tilde{\Delta} P_B = P_B \tilde{\Delta} P_A$

(2) $P_A \tilde{\Delta} (P_B \tilde{\Delta} P_C) = (P_A \tilde{\Delta} P_B) \tilde{\Delta} P_C$

(3) $P_A = P_B \Leftrightarrow P_A \tilde{\Delta} P_B = P_\Phi$

İspat: (1)'in ispatını verelim. Diğerleri benzer şekilde yapılır.

(1) $\forall x \in E$ için,

$$\begin{aligned} p_A(x) \Delta p_B(x) &= (p_A(x) \setminus p_B(x)) \cup (p_B(x) \setminus p_A(x)) \\ &= (p_B(x) \setminus p_A(x)) \cup (p_A(x) \setminus p_B(x)) \\ &= p_B(x) \Delta p_A(x) \end{aligned}$$

olduğundan $P_A \tilde{\Delta} P_B = P_B \tilde{\Delta} P_A$ elde edilir.

2.3. Olasılıklı Esnek Matrisler

Günlük hayatta, m seçenek ve n alternatiften oluşan karar verme problemleri için çoklu karar verme problemlerini ele aldığımızda, işlerin kolaylaştırılması için karar tablosu oluşturulur. Bu işlem için matris gösterimleri tercih edilir. Esnek kümeler üzerinde matris gösterimleri Çağman ve diğ. (2010, 2012) ile Erdem ve diğ. (2014) tarafından esnek matris olarak adlandırılmıştır. Bu çalışmalarda esnek matrislerden faydalanarak max-min karar verme problemleri üzerine uygulamaları incelenmiştir.

Bu bölümde olasılıklı esnek kümeler yardımıyla olasılıklı esnek matrisler ve olasılıklı esnek matrislerin temel işlemleri tanımlanmıştır

Tanım 2.3.1. $P_A \in \Pr S(U)$ olsun. O halde P_A olasılıklı esnek kümesinin bir olasılıklı bağıntısı,

$$R_A = \{(\mu_{R_A}(u,x)/(u,x)) : (u,x) \in U \times E\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada μ_{R_A} üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{R_A} : U \times E \to [0,1], \quad \mu_{R_A}(u,x) = \mu_{p_A(x)}(u)$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyondur.

Eğer $U = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$, $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ve $A \subseteq E$ ise, R_A olasılıklı bağıntısı aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

R_A	x_1	x_2	...	x_n
u_1	$\mu_{R_A}(u_1,x_1)$	$\mu_{R_A}(u_1,x_2)$	...	$\mu_{R_A}(u_1,x_n)$
u_2	$\mu_{R_A}(u_2,x_1)$	$\mu_{R_A}(u_2,x_2)$	...	$\mu_{R_A}(u_2,x_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
u_m	$\mu_{R_A}(u_m,x_1)$	$\mu_{R_A}(u_m,x_2)$	...	$\mu_{R_A}(u_m,x_n)$

Burada $a_{ij} = \mu_{R_A}(u_i, x_j)$ şeklinde gösterilirse,

$$[a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisini tanımlayabiliriz. Bu matrise U kümesi üzerindeki P_A olasılıklı esnek kümesinin $m \times n$ boyutlu olasılıklı esnek matrisi denir. Bu tanıma göre bir P_A olasılıklı esnek kümesi $\lfloor a_{ij} \rfloor_{m \times n}$ olasılıklı esnek matrisi ile tek türlü olarak belirlidir.

Burada $\lfloor a_{ij} \rfloor_{m \times n}$ gösterimi yerine $\lfloor a_{ij} \rfloor$ gösterimi kullanılacaktır ve U kümesi üzerineki tüm $m \times n$ boyutlu olasılıklı esnek matrislerin kümesi $\Pr SM_{m \times n}$ ile gösterilecektir.

Örnek 2.3.2. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ bir evrensel küme, $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ parametre kümesi ve,

$x_1 \rightarrow \{0,4/u_1, 0,2/u_2, 0,4/u_5\}$,

$x_2 \rightarrow \{0,5/u_2, 0,5/u_4\}$,

$x_3 \rightarrow \{0,2/u_1, 0,2/u_2, 0,6/u_5\}$,

$x_4 \rightarrow \{1/u_2\}$,

$x_5 \rightarrow \{1/u_3\}$

olsun. Eğer $A = \{x_2, x_3, x_4\}$ ise;

$p_A(x_2) = \{0,5/u_2, 0,5/u_4\}$,

$p_A(x_3) = \{0,2/u_1\}$,

$p_A(x_4) = \{1/u_2\}$

olmak üzere P_A olasılıklı esnek kümesinin olasılıklı bağıntısı;

$$R_A = \{(0,5/(u_2, x_2)), (0,5/(u_4, x_2)), (0,2/(u_1, x_3)), (1/(u_2, x_4))\}$$

dir. O halde $\lfloor a_{ij} \rfloor$ olasılıklı esnek matrisi,

$$\lfloor a_{ij} \rfloor = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

Tanım 2.3.3. $\lfloor a_{ij} \rfloor, \lfloor b_{ij} \rfloor \in \Pr SM_{m\times n}$ olsun. Eğer tüm i ve j değerleri için $a_{ij} \le b_{ij}$ ise $\lfloor a_{ij} \rfloor$ olasılıklı esnek matrisine $\lfloor b_{ij} \rfloor$ olasılıklı esnek matrisinin altmatrisi denir ve $\lfloor a_{ij} \rfloor \tilde{\subseteq} \lfloor b_{ij} \rfloor$ ile gösterilir.

Örnek 2.3.4. Örnek 2.3.2'yi ele alalım. $\lfloor a_{ij} \rfloor$ olasılıklı esnek matrisi,

$$\left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

idi. Ek olarak $B = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ kümesi için,

$p_B(x_1) = \{0,2/u_2, 0,4/u_5\}$,

$p_B(x_2) = \{0,5/u_2, 0,5/u_4\}$,

$p_B(x_3) = \{0,2/u_1, 0,2/u_2\}$,

$p_B(x_4) = \{1/u_2\}$

olsun. O halde $\lfloor b_{ij} \rfloor$ olasılıklı esnek matrisi,

$$\left[b_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,5 & 0,2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

Bu durumda tüm i ve j değerleri için $a_{ij} \le b_{ij}$ sağlandığından $\lfloor a_{ij} \rfloor \tilde{\subseteq} \lfloor b_{ij} \rfloor$ dir.

Tanım 2.3.5. $\lfloor a_{ij} \rfloor, \lfloor b_{ij} \rfloor \in \Pr SM_{m\times n}$ olsun. Eğer tüm i ve j değerleri için $a_{ij} = b_{ij}$ ise $\lfloor a_{ij} \rfloor$ ve $\lfloor b_{ij} \rfloor$ olasılıklı esnek matrislerine eşit matrisler denir ve $\lfloor a_{ij} \rfloor = \lfloor b_{ij} \rfloor$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.6. $\lfloor a_{ij} \rfloor \in \Pr SM_{m\times n}$ olsun. Eğer tüm i ve j değerleri için $a_{ij} = 0$ ise $\lfloor a_{ij} \rfloor$ olasılıklı esnek matrisine bir sıfır olasılıklı esnek matris denir ve $[0]$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.7. $\lfloor a_{ij} \rfloor, \lfloor b_{ij} \rfloor \in \Pr SM_{m\times n}$ olsun. Eğer tüm i ve j değerleri için $c_{ij} = \max\{a_{ij}, b_{ij}\}$ ise $\lfloor c_{ij} \rfloor$ olasılıklı esnek matrisine $\lfloor a_{ij} \rfloor$ ve $\lfloor b_{ij} \rfloor$ olasılıklı esnek matrislerinin birleşimi denir ve $\lfloor a_{ij} \rfloor \tilde{\cup} \lfloor b_{ij} \rfloor$ ile gösterilir.

Örnek 2.3.8. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ bir evrensel küme, $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ parametre kümesi ve,

$x_1 \rightarrow \{0,2/u_1, 0,3/u_2, 0,3/u_3, 0,2/u_4\}$,

$x_2 \rightarrow \{0,1/u_1, 0,3/u_2, 0,1/u_3, 0,5/u_4\}$,

$x_3 \rightarrow \{0,2/u_1, 0,2/u_2, 0,6/u_5\}$,

$x_4 \rightarrow \{0,5/u_2, 0,5/u_4\}$

olsun. Eğer $A = \{x_2, x_3, x_4\}$ ve $B = \{x_2, x_3\}$ ise

$p_A(x_2) = \{0,1/u_1, 0,3/u_2, 0,1/u_3\}$,

$p_A(x_3) = \{0,5/u_2\}$,

$p_A(x_4) = \{0,5/u_4\}$,

$p_B(x_2) = \{0,1/u_1, 0,5/u_4\}$,

$p_B(x_3) = \{0,2/u_1, 0,5/u_2, 0,3/u_3\}$

olsun. Bu durumda $\lfloor a_{ij} \rfloor, \lfloor b_{ij} \rfloor \in \Pr SM_{4\times 4}$ olasılıklı esnek matrisleri,

$$\lfloor a_{ij} \rfloor = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix},$$

$$\lfloor b_{ij} \rfloor = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

O halde;

$$\left[a_{ij}\right]\tilde{\cup}\left[b_{ij}\right]=\begin{bmatrix}0 & 0,1 & 0,2 & 0\\ 0 & 0,3 & 0,5 & 0\\ 0 & 0,1 & 0,3 & 0\\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5\end{bmatrix}$$

dir.

Tanım 2.3.9. $\lfloor a_{ij}\rfloor,\lfloor b_{ij}\rfloor\in \Pr SM_{m\times n}$ olsun. Eğer tüm i ve j değerleri için $c_{ij}=\min\{a_{ij},b_{ij}\}$ ise $\lfloor c_{ij}\rfloor$ olasılıklı esnek matrisine $\lfloor a_{ij}\rfloor$ ve $\lfloor b_{ij}\rfloor$ olasılıklı esnek matrislerinin arakesiti denir ve $\lfloor a_{ij}\rfloor\tilde{\cap}\lfloor b_{ij}\rfloor$ ile gösterilir.

Örnek 2.3.10. Örnek 2.3.8'i ele alalım. O halde;

$$\left[a_{ij}\right]\tilde{\cap}\left[b_{ij}\right]=\begin{bmatrix}0 & 0,1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0,5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

dir.

Önerme 2.3.11. $\lfloor a_{ij}\rfloor,\lfloor b_{ij}\rfloor\in \Pr SM_{m\times n}$ olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) $\lfloor a_{ij}\rfloor\tilde{\subseteq}\lfloor a_{ij}\rfloor$,

(2) $\lfloor a_{ij}\rfloor\tilde{\subseteq}\lfloor b_{ij}\rfloor \text{ve} \lfloor b_{ij}\rfloor\tilde{\subseteq}\lfloor c_{ij}\rfloor\Rightarrow\lfloor a_{ij}\rfloor\tilde{\subseteq}\lfloor c_{ij}\rfloor$,

(3) $\lfloor a_{ij}\rfloor\tilde{\subseteq}\lfloor b_{ij}\rfloor\Leftrightarrow\lfloor a_{ij}\rfloor\tilde{\cap}\lfloor b_{ij}\rfloor=\lfloor a_{ij}\rfloor \text{ve} \lfloor a_{ij}\rfloor\tilde{\cup}\lfloor b_{ij}\rfloor=\lfloor b_{ij}\rfloor$.

İspat: (2)'nin ispatını verelim. Diğerleri benzer şekilde yapılır.

(2) $\lfloor a_{ij}\rfloor\tilde{\subseteq}\lfloor b_{ij}\rfloor \text{ve} \lfloor b_{ij}\rfloor\tilde{\subseteq}\lfloor c_{ij}\rfloor$ olsun.

Eğer $\left[a_{ij}\right]\tilde{\subseteq}\left[b_{ij}\right]$ ise tüm i ve j değerleri için $a_{ij}\le b_{ij}$,

Eğer $\left[b_{ij}\right]\tilde{\subseteq}\left[c_{ij}\right]$ ise tüm i ve j değerleri için $b_{ij}\le c_{ij}$

sağlanır. O halde tüm i ve j değerleri için $a_{ij}\le c_{ij}$ olduğundan $\left[a_{ij}\right]\tilde{\subseteq}\left[c_{ij}\right]$ dir

Önerme 2.3.12. $\lfloor a_{ij}\rfloor,\lfloor b_{ij}\rfloor,\lfloor c_{ij}\rfloor\in \Pr SM_{m\times n}$ olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) $\lfloor a_{ij}\rfloor=\lfloor b_{ij}\rfloor \text{ve} \lfloor b_{ij}\rfloor=\lfloor c_{ij}\rfloor\Leftrightarrow\lfloor a_{ij}\rfloor=\lfloor c_{ij}\rfloor$

(2) $\left[a_{ij}\right]\tilde{\subseteq}\left[b_{ij}\right]$ ve $\left[b_{ij}\right]\tilde{\subseteq}\left[a_{ij}\right]\Leftrightarrow\left[a_{ij}\right]=\left[b_{ij}\right]$

İspat: Açıktır.

Önerme 2.3.13. $\lfloor a_{ij} \rfloor, \lfloor b_{ij} \rfloor, \lfloor c_{ij} \rfloor \in \Pr SM_{m\times n}$ olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) $\lfloor a_{ij} \rfloor \tilde{\cap} \lfloor b_{ij} \rfloor = \lfloor b_{ij} \rfloor \tilde{\cap} \lfloor a_{ij} \rfloor$

(2) $\lfloor a_{ij} \rfloor \tilde{\cup} \lfloor b_{ij} \rfloor = \lfloor b_{ij} \rfloor \tilde{\cup} \lfloor a_{ij} \rfloor$

(3) $(\lfloor a_{ij} \rfloor \tilde{\cap} \lfloor b_{ij} \rfloor) \tilde{\cap} \lfloor c_{ij} \rfloor = \lfloor a_{ij} \rfloor \tilde{\cap} (\lfloor b_{ij} \rfloor \tilde{\cap} \lfloor c_{ij} \rfloor)$

(4) $(\lfloor a_{ij} \rfloor \tilde{\cup} \lfloor b_{ij} \rfloor) \tilde{\cup} \lfloor c_{ij} \rfloor = \lfloor a_{ij} \rfloor \tilde{\cup} (\lfloor b_{ij} \rfloor \tilde{\cup} \lfloor c_{ij} \rfloor)$

(5) $\lfloor a_{ij} \rfloor \tilde{\cap} (\lfloor b_{ij} \rfloor \tilde{\cup} \lfloor c_{ij} \rfloor) = (\lfloor a_{ij} \rfloor \tilde{\cap} \lfloor b_{ij} \rfloor) \tilde{\cup} (\lfloor a_{ij} \rfloor \tilde{\cap} \lfloor c_{ij} \rfloor)$

(6) $\lfloor a_{ij} \rfloor \tilde{\cup} (\lfloor b_{ij} \rfloor \tilde{\cap} \lfloor c_{ij} \rfloor) = (\lfloor a_{ij} \rfloor \tilde{\cup} \lfloor b_{ij} \rfloor) \tilde{\cap} (\lfloor a_{ij} \rfloor \tilde{\cup} \lfloor c_{ij} \rfloor)$

İspat: Önermenin ispatı olasılıklı esnek matrisler üzerindeki arakesit ve birleşim tanımları kullanılarak kolayca elde edilebileceğinden sadece (3) ve (4) ün ispatı verilecektir. Diğerleri benzer şekilde ispatlanır.

(3) Tüm i ve j değerleri için,

$$\begin{aligned}(\lceil a_{ij} \rceil \tilde{\cap} \lceil b_{ij} \rceil) \tilde{\cap} \lceil c_{ij} \rceil &= \min\{\min\{a_{ij}, b_{ij}\}, c_{ij}\} \\ &= \min\{a_{ij}, \min\{b_{ij}, c_{ij}\}\} \\ &= \lceil a_{ij} \rceil \tilde{\cap} (\lceil b_{ij} \rceil \tilde{\cap} \lceil c_{ij} \rceil)\end{aligned}$$

olduğundan $(\lfloor a_{ij} \rfloor \tilde{\cap} \lfloor b_{ij} \rfloor) \tilde{\cap} \lfloor c_{ij} \rfloor = \lfloor a_{ij} \rfloor \tilde{\cap} (\lfloor b_{ij} \rfloor \tilde{\cap} \lfloor c_{ij} \rfloor)$ elde edilir.

(4) Tüm i ve j değerleri için,

$$\begin{aligned}(\lceil a_{ij} \rceil \tilde{\cup} \lceil b_{ij} \rceil) \tilde{\cup} \lceil c_{ij} \rceil &= \max\{\max\{a_{ij}, b_{ij}\}, c_{ij}\} \\ &= \max\{a_{ij}, \max\{b_{ij}, c_{ij}\}\} \\ &= \lceil a_{ij} \rceil \tilde{\cup} (\lceil b_{ij} \rceil \tilde{\cup} \lceil c_{ij} \rceil)\end{aligned}$$

olduğundan $(\lfloor a_{ij} \rfloor \tilde{\cup} \lfloor b_{ij} \rfloor) \tilde{\cup} \lfloor c_{ij} \rfloor = \lfloor a_{ij} \rfloor \tilde{\cup} (\lfloor b_{ij} \rfloor \tilde{\cup} \lfloor c_{ij} \rfloor)$ elde edilir.

3. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Zhu ve Wen (2010) tarafından verilen olasılıklı esnek küme tanımı genelleştirilmiş ve olasılıklı esnek kümeler ile ilgili temel işlemler tanıtılarak bu işlemlerle ilgili önermeler ve örnekler verilmiştir.

Daha sonra olasılıklı esnek matrisler tanımlanmış ve olasılıklı esnek matrisler üzerinde temel işlemler ifade edilmiştir.

Bu çalışmada ele alınan olasılıklı esnek kümeler teorisinden yararlanarak esnek çarpım işlemleri tanımlanıp, karar verme problemleri üzerine uygulaması yapılabilir.

KAYNAKLAR

Acar U., Koyuncu F., Tanay B., Soft sets and soft rings, *Computers and Mathematics with Applications*, 2010, **59**, 3458-3463.

Aktaş H., Çağman N., Soft sets and soft groups, *Information Sciences*, 2007, **177**, 2726-2735.

Aygünoğlu A., Aygün H., Introduction to fuzzy soft groups, *Computers and Mathematics with Applications*, 2009, **58**, 1279-1286.

Aygünoğlu A., Aygün H., Some notes on soft topological spaces, *Neural Computing and Applications*, 2012, **21**(1), 113-119.

Bayramov S., Gunduz Aras C., Soft locally compact and soft paracompact spaces, *Journal of Mathematics and System Science*, 2013, **3**, 122-130.

Bernoulli J., *Ars Conjectandi*. 1st ed., Impensis Thurnisiorum Fratrum, Basel, 1713.

Chen D., The parametrization reduction of soft sets and its applications, *Computers and Mathematics with Applications*, 2005, **49**, 757-763.

Çağman N., Enginoğlu S., Soft matrix theory and its decision making, *Computers and Mathematics with Applications*, 2010, **59**, 3308-3314.

Çağman N., Enginoğlu S., Çıtak F., Fuzzy soft set theory and its applications, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 2011, **8**(3), 137-147.

Çağman N., Enginoğlu S., Fuzzy soft matrix theory and its application in decision making, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 2012, **9**(1), 109-119.

De Moivre A., *The Doctrine of Chances, or, a Method of Calculating the Probability of Events in Play*, 1st ed., Pearson, London, 1718.

Enginoğlu S., Esnek Kümeler ve Esnek Karar Verme Metotları, Yüksek Lisans Tezi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Tokat, 2008, 245455.

Erdem A., Gunduz Aras C., Sonmez A., Cakalli H., The Use of Soft Matrices on Soft Matrices on Soft Multisets in Optimal Decision Process, arXiv:1401.7543v1 [math.GM], http://xxx.tau.ac.il/pdf/1401.7543.pdf (Ziyaret tarihi: 4 Temmuz 2014).

Feng F., Jun Y. B., Zhao X. Z., Soft semirings, *Computers and Mathematics with Applications*, 2008, **56**, 2621-2628.

Gunduz Aras C., Sonmez A., Cakalli H., On soft mappings, arxiv:1305.4545v1, [math.GM], http://arxiv.org/pdf/1305.4545v1.pdf (Ziyaret tarihi: 4 Temmuz 2014).

Jun Y. B., Soft BCK/BCI-algebras, *Computers and Mathematics with Applications*, 2008, **56**, 1408–1413.

Kong, Z., Gao L., Wong L., Li S., The normal parameter reduction of soft sets and its algorithm, *Computers and Mathematics with Applications*, 2008, **56**, 3029–3037.

Maji P. K., Biswas R., Roy A. R., Fuzzy soft sets, *Journal of Fuzzy Mathematics*, 2001, **9**(3), 589-602.

Maji P. K., Roy A. R., Biswas R., An application of soft sets in a decision making problem, *Computers and Mathematics with Applications*, 2002, **44**, 1077-1083.

Maji P. K., Biswas R., Roy A. R., Soft set theory, *Computers and Mathematics with Applications*, 2003, **45**, 555-562.

Molodtsov D., Soft set theory-first results, *Computers and Mathematics with Applications*, 1999, **37**, 19-31.

Ozturk T. Y., Gunduz Aras C., Bayramov S., Inverse and direct systems of soft modules, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2013, **5**(1), 73-85.

Pei D., Miano D., From soft sets to information systems, *IEEE International Conference on Granular Computing (2)*, Hangzhou, China, 25-27 July 2005.

Pawlak, Z., Rough sets, Internat*ional Journal of Information and Computer Sciences*, 1982, **11**(1), 341-356.

Ross T. J., Booker J. M., Parkinson W. J., Fuzzy Logic and Probabilty Applications: Bridging Gap, 1st ed., ASA-SIAM, USA, 2002.

Sanjaa B., Tsoozol P., Fuzzy and Probability, Retrieved at URL http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=04798542 (Ziyaret tarihi: 4 Temmuz 2014).

Shabir M., M. Naz. On soft topological spaces, *Computers and Mathematics with Applications*, 2011, **61**, 1786–1799.

Sun Q. M., Zhang Z. L., Liu J., Soft sets and soft modules, Lecture Notes in Computer Science, DOI: 10.1007/978-3-540-79721-0_56.

Yang X., Yu D., Yang J., Wu C., Generalization of soft set theory: From crisp to fuzzy case, *Fuzzy Inform. Engin.*, 2007, **40**, 345-354.

Zadeh L. A., Fuzzy sets, *Information and Control*, 1965, **8**, 338-353.

Zhu P., Wen Q., Probabilistic soft sets, *IEEE International Conference on Granular Computing*, San Jose, California, USA, 14-16 August 2010.

Zorlutuna I., Aktağ M., Min W. K., Atmaca S., Remarks on soft topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2012, **3**(2), 171-185.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

Gündüz Aras Ç., **Poşul H.**, On some new operations in pobabilistic soft set theory, *Karatekin Mathematics Days*, Çankırı, Türkiye, 11-13 Haziran 2014.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Giresun'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2008 yılında girdiği Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden 2012 yılında mezun oldu. 2012 yılında Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı.