

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİPOLAR BULANIK SUPRA TOPOLOJİK UZAYLAR

HAMİ MALKOÇ

KOCAELİ 2022

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİPOLAR BULANIK SUPRA TOPOLOJİK UZAYLAR

HAMİ MALKOÇ

Doç. Dr. Banu PAZAR VAROL
Danışman, Kocaeli Üniv.

.....

Prof. Dr. Halis AYGÜN
Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.

.....

Dr. Öğr. Üyesi İzzettin DEMİR
Jüri Üyesi, Düzce Üniv.

.....

Tezin Savunulduğu Tarih: 18.01.2022

ETİK BEYAN VE ARAŞTIRMA FONU DESTEĞİ

Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez/proje çalışmada,

- Bu tezin/projenin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu,
- Çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı,
- Bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi,
- Bu çalışmanın Kocaeli Üniversitesi'nin abone olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun olduğunu,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Tezin/Projenin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez/proje çalışması olarak sunmadığımı,

beyan ederim.

☒ Bu tez/proje çalışmasının herhangi bir aşaması hiçbir kurum/kuruluş tarafından maddi/alt yapı desteği ile desteklenmemiştir.

☐ Bu tez/proje çalışması kapsamında üretilen veri ve bilgiler tarafından no'lu proje kapsamında maddi/alt yapı desteği alınarak gerçekleştirilmiştir.

Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Hami MALKOÇ

YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI

Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/projemin tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda belirtilen koşullarla kullanıma açma izninin Kocaeli Üniversitesi'ne verdiğimi beyan ederim. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin/projemin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanımı bana ait olacaktır.

Tezin/projenin kendi özgün çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin/projenin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim kurulu tarafından yayınlanan **“Lisanüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge”** kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricinde YÖK Ulusal Tez Merkezi/ Kocaeli Üniversitesi Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

☐ Enstitü yönetim kurulu kararı ile tezimin/projemin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 2 yıl ertelenmiştir.

☐ Enstitü yönetim kurulu gerekçeli kararı ile tezimin/projemin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 6 ay ertelenmiştir.

☒ Tezim/projem ile ilgili gizlilik kararı verilmemiştir.

Hami MALKOÇ

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

1983 yılında topolojik uzayların zayıf hali olan supra topolojik uzay kavramı Mashhour (Mashhour ve diğ., 1983) tarafından verilmiştir. Bu kavram, topolojik uzaylardaki açık kümeler için sonlu arakesit özelliğinin geçerli olmaması ile tanımlanmıştır. Bu tez çalışmasının amacı supra topolojik uzayların bir genellemesi olarak bipolar bulanık supra topolojik uzay tanımını vermek ve bu yapıda süreklilik, kompaktlık ve komşuluk kavramlarını incelemektir.

Bu tez çalışmasının konusunun belirlenmesi ve bu konunun teorisinde büyük emeği geçen danışman hocam sayın Doç. Dr. Banu PAZAR VAROL'a yoğun mesaisi arasında ayırdığı vakit ve bilhassa göstermiş olduğu nezaketi sebebiyle sonsuz teşekkür eder saygılarımı sunarım. Ayrıca eğitim hayatım boyunca desteklerini daima hissettiğim aileme teşekkür ederim.

Ocak-2022

Hami MALKOÇ

İÇİNDEKİLER

ETİK BEYAN VE ARAŞTIRMA FONU DESTEĞİ	i
YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
ŞİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ	x
2. BİPOLAR BULANIK KÜMELER	1
2.1. Bipolar Bulanık Kümeler	1
2.2. Bipolar Bulanık Nokta ve Özellikleri	6
3. BİPOLAR BULANIK TOPOLOJİK UZAYLAR	9
4. BİPOLAR BULANIK SUPRA TOPOLOJİK UZAYLAR	14
5. BİPOLAR BULANIK SUPRA TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜREKLİLİK	23
6. BİPOLAR BULANIK SUPRA TOPOLOJİK UZAYLARDA KOMŞULUK YAPILARI	32
6.1. Bipolar Bulanık Supra Komşuluk	32
6.2. Bipolar Bulanık Supra Q-Komşuluk	37
7. BİPOLAR BULANIK SUPRA TOPOLOJİK UZAYLARDA KOMPAKTLIK	44
8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	48
KAYNAKLAR	49
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER	51
ÖZGEÇMİŞ	52

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.	X bipolar bulanık kümesi ve bipolar bulanık nokta temsili	7
Şekil 5.1.	gof bileşke fonksiyonunun diyagramı.....	30
Şekil 6.1.	τ üzerindeki açık kümelerin pozitif üyelik dereceleri.....	33
Şekil 6.2.	τ üzerindeki açık kümelerin negatif üyelik dereceleri.....	33



TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 5.1. U kümesi üzerindeki bipolar bulanık ve bipolar bulanık supra topolojiler	29
Tablo 5.2. V kümesi üzerindeki bipolar bulanık ve bipolar bulanık supra topolojiler	29
Tablo 5.3. W kümesi üzerindeki bipolar bulanık ve bipolar bulanık supra topolojiler	30
Tablo 6.1. τ üzerindeki açık kümelerin pozitif üyelik dereceleri.....	33
Tablo 6.2. X ve Y kümelerinin $\pi/2$ noktasındaki üyelik dereceleri.....	34



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\text{int}_\tau(X)$	: X bipolar bulanık kümesinin bipolar bulanık supra içi
$\text{cl}_\tau(X)$	: X bipolar bulanık kümesinin bipolar bulanık supra kapanışı
X^c	: X bipolar bulanık kümesinin tümleyeni
$\subseteq$	: Alt küme
$\cap (U)$	: Arakesit (Birleşim)
$u_{(\alpha,\beta)}$	: Bipolar bulanık nokta
τ, σ, δ	: Bipolar bulanık supra topolojiler
$\tau^*, \sigma^*, \delta^*$	: Bipolar bulanık topolojiler
(U, τ)	: Bipolar bulanık supra topolojik uzay
(U, τ^*)	: Bipolar bulanık topolojik uzay
p_1, p_2	: Birinci ve ikinci izdüşüm fonksiyonları
0_{bp}	: Boş bipolar bulanık küme
$\geq (>)$	: Büyük eşittir (büyüktür)
$\in (\notin)$	: Eleman (Eleman değil)
1_{bp}	: Evrensel bipolar bulanık küme
$\forall$	: Evrensel niceleyici, her
$\circ$	: Fonksiyonlarda bileşke işlemi
$U, V, W \dots$	: Klasik kümeler
$\leq (<)$	: Küçük eşittir (küçüktür)
$\vee (\wedge)$	: Supremum (İnfimum)
$\exists$	: Varlıksal niceleyici, en az bir
$u_{(\alpha,\beta)} qX$	: $u_{(\alpha,\beta)}$ ile Y q-çakışımıdır
$Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$	: $u_{(\alpha,\beta)}$ bipolar bulanık noktasının tüm q komşuluklarının ailesi
$N_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$	: $u_{(\alpha,\beta)}$ bipolar bulanık noktasının tüm bipolar bulanık supra komşuluklarının ailesi
$N_{\tau^*}(u_{(\alpha,\beta)})$	: $u_{(\alpha,\beta)}$ bipolar bulanık noktasının tüm bipolar bulanık komşuluklarının ailesi
XqY	: X ile Y q-çakışımıdır
$\mu_X^+ (\mu_X^-)$	: X bipolar bulanık kümesinin pozitif (negatif) üyelik fonksiyonu
$:=$	: Tanım olarak eşittir
$: \Leftrightarrow$	: Tanım olarak ancak ve ancak

Kısaltmalar

$\text{BPF}(U)$	: U klasik kümesi üzerindeki tüm bipolar bulanık kümelerin ailesi
$\text{BPF}_P(U)$	: U klasik kümesi üzerindeki tüm bipolar bulanık noktaların ailesi
$\text{BPFT}(U)$	: U klasik kümesi üzerindeki tüm bipolar bulanık topolojilerin ailesi

BİPOLAR BULANIK SUPRA TOPOLOJİK UZAYLAR

ÖZET

Bu tez çalışmasında hali hazırda teorisi mevcut bulunan bipolar bulanık kümeler vasıtası ile supra topoloji tanımlamak ve bipolar bulanık supra açık-kapalı kümeler ile ilgi temel teşkil edecek teoremleri ispatlamak, akabinde bu şekildeki uzaylar arasında sürekli dönüşümlerin yapısını incelemek ve nihayet kompaktlık ve bazı komşuluk yapılarının incelenmesi amaçlanmaktadır.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde bipolar bulanık kümeler için nokta, küme ve fonksiyonlar için bazı cebirsel özellikler ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde bipolar bulanık topolojik uzaylar konusu bazı temel tanım ve teoremler verilerek özetlenmiştir.

Üçüncü bölümde ise tezin konusu olan bipolar bulanık supra topolojik uzaylar tanımlanmış bipolar bulanık supra açık, kapalı kümeler ile ilgili tanımlar ve bazı teoremler verilip ardından bipolar bulanık supra iç ve kapanış konuları bazı ters örneklerle ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde bipolar bulanık supra sürekli ve S^* bipolar bulanık supra sürekli fonksiyon tanımı yapıp bu şekildeki dönüşümlerin temel karakterizasyonları yapılmıştır.

Beşinci bölümde bipolar bulanık supra komşuluk ve bipolar bulanık supra Q komşuluk tanımları ve bazı ilgili teoremleri ispatlanmıştır. Ardından bu şekildeki komşuluklar vasıtası ile bipolar bulanık supra topoloji üretmek konusu ele alınmıştır.

Son bölümde ise bipolar bulanık supra açık örtüm ve alt örtüm tanımları ile kompaktlık tanımı verilmiş, bipolar bulanık supra kompakt kümelerin bazı özellikleri ve bipolar bulanık supra sürekli dönüşümlerin kompakt kümeler ile ilişkileri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bipolar Bulanık Küme, Bipolar Bulanık Supra Kompaktlık, Bipolar Bulanık Supra (Q) Komşuluk, Bipolar Bulanık Supra Topolojik Uzay.

BIPOLAR FUZZY SUPRA TOPOLOGICAL SPACES

ABSTRACT

The aim of this thesis is to introduce the concept of bipolar fuzzy supra topology through bipolar fuzzy sets and prove some fundamental theorems about bipolar fuzzy supra open-closed sets and subsequently study to continuity of functions defined between this kinds of topological spaces.

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, some algebraic properties for bipolar fuzzy points and sets are summarized.

In the second chapter, bipolar fuzzy topological space and some of its properties are covered.

In the third chapter, the definition of bipolar fuzzy supra topological space and some properties of bipolar fuzzy supra open and bipolar fuzzy supra closed sets are discussed. In addition the concepts of bipolar fuzzy supra interior and closure are introduced and some counterexamples are given.

In the fourth section, the definitions of bipolar fuzzy supra continuity and S^* bipolar fuzzy supra continuity are introduced and the characterizations of this kinds of transformations are obtained.

In the fifth chapter, the bipolar notions of fuzzy supra neighborhood and bipolar fuzzy supra Q -neighborhood are discussed. In addition the theorem of bipolar fuzzy supra topology induced by bipolar fuzzy supra neighborhood is also stated.

In the final chapter, the definition of bipolar fuzzy supra compactness is given by virtue of bipolar fuzzy supra open cover and subcover. Some properties of bipolar fuzzy supra compact sets and the relation between bipolar fuzzy supra compact sets and continuous functions are discussed.

Keywords: Bipolar Fuzzy Set, Bipolar Fuzzy Supra Compactness, Bipolar Fuzzy Supra (Q) Neighborhood, Bipolar Fuzzy Supra Topological Space.

1. GİRİŞ

İnsanoğlu tarih boyunca karşılaştığı problemlere çözüm üretmek için belli başlı disiplinler ortaya koymuştur. Bu disiplinlerde zaman içinde değişik yönlerden ele alınmak suretiyle alt disiplinlere ayrılmak zorunda kalmıştır. Matematik de bu kadarı paylaştan disiplinler arasında en eskilerden biridir. Günümüzde matematiğin neredeyse tüm alt disiplinleri (Kategori teorisi istisna olarak gösterilebilir) kümeler teorisi üzerine inşa edilmiş durumdadır.

Daha önceden bilinen küme kavramı ancak 19. yüzyılın sonlarında aksiyomatik ve formel temellere kavuşabilmiştir. Klasik anlamda bilinen analiz, cebir ve geometri gibi alanların teorisi için klasik kümeler teorisi beraberinde getirdiği bazı paradokslara rağmen hala daha etkin bir şekilde kullanılıyor diyebiliriz. Bu paradokslara bir örnek verecek olursak klasik kümeler teorisinde bir topluluğun her zaman için küme belirtmesi mümkün olmayabilir. Bertrand Russell bir paradoks ortaya koyarak her topluluğa küme demenin yanlış olabileceğini gösterdi. Klasik kümeler teorisi matematik problemleri kadar mühendislik, tıp ve beşeri bilimler gibi bazı disiplinlerin olasılık ve istatistik problemlerine çözüm üretmek için etkin bir şekilde kullanılmıştır. Fakat karşılaşılan bütün problemlere eksiksiz bir biçimde cevap üretmesi elbette mümkün değildir. Bu problemlerden karar verme problemi birçok disiplin için temel sorun teşkil etmiştir. Klasik kümeler teorisinin çözüm üretme noktasında yetersiz kalması araştırmacıları farklı küme konseptleri üzerinde çalışmaya sevk etmiştir.

Zadeh (1965) in literatüre kazandırdığı bulanık (fuzzy) küme fikri geçen zaman içinde bu tarz problemler için çok başarılı sonuçlar vermiştir. Bulanık kümeler, elemanların bir kümeye ait olmalarını derecelendirir. Söz gelimi bir bulanık küme $X = \{\langle u, \mu_X(u) \rangle \mid u \in U\}$ ile gösterilebilir. Burada U klasik bir küme olup $\mu_X: U \rightarrow [0,1]$ şeklinde bir fonksiyondur. μ_X 'e, keyfi bir $u \in U$ elemanının üyelik fonksiyonu adı verilir. Bulanık kümelerin de, sezgisel (intuitionistic) bulanık kümeler, neutrosophic bulanık kümeler ve bu tezin de konusunu belirleyen bipolar bulanık kümeler gibi genelleştirmeleri literatüre kazandırılmıştır.

Chang (1968) tarafından bulanık kümeler üzerine topolojik uzaylar tanımlanmış ve açık-kapalı kümeler, süreklilik ve kompaktlık gibi temel özellikleri incelemiştir. 1976 yılında

ise Lowen (1976) bulanık topoloji tanımında değişiklik yaparak sabit fonksiyonların bu anlamdaki bulanık topolojik uzaylarda sürekli olmasını garanti etmiştir. Günümüze kadar bu gibi birçok yönden ele alınan bulanık topoloji teorisi artık belli bir olgunluğa ulaşmıştır. Günümüzde ise bulanık kümelerin bazı genişlemeleri üzerine tanımlanan topoloji teorileri çalışılmaktadır. Örneğin bulanık soft topoloji, neutrosophic bulanık (esnek) topoloji vs. gibi.

Supra topolojik uzaylar (Mashhour ve diğ., 1983) tarafından topolojik uzaylar tanımından sonlu arakesit özelliği çıkartılarak tanımlanmıştır. Bu sayede klasik topolojik uzayların bazı özelliklerinin daha zayıf halleri edilmiştir.

Zhang (1994) bipolar bulanık küme kavramını tanıttı. Lee (2000) bipolar bulanık kümeleri, bulanık kümelerin bir genellemesi olarak tanımladı ve temel cebirsel özelliklerini elde etti. Lee (2019) yayınladığı makalesinde bipolar bulanık nokta tanımını vererek bu uzayların topolojik yapılarını, komşuluk, süreklilik, taban, alttaban, çarpım ve bölüm uzayları gibi temel teşkil edecek yapılarını inceledi. Bu çalışmada bipolar bulanık supra topolojik uzaylar, supra topolojilerin bipolar bulanık topolojilere genellemesi olarak ele alınacaktır.

2. BİPOLAR BULANIK KÜMELER

2.1. Bipolar Bulanık Kümeler

Bu bölümde bipolar bulanık kümeler bulanık kümelerin bir genelleştirmesi olarak tanımlanıp bazı cebirsel özellikleri verilecektir.

Tanım 2.1.1: U boştan farklı bir küme olsun. U üzerinde bir X bipolar bulanık kümesi

$$X = \{ \langle u, \mu_X^+(u), \mu_X^-(u) \rangle \mid u \in U \} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mu_X^+: U \rightarrow [0,1]$ ve $\mu_X^-: U \rightarrow [-1,0]$ iki fonksiyondur. Pozitif üyelik derecesi $\mu_X^+(u)$, X bipolar bulanık kümesine karşılık gelen özelliğe u elemanın sahip olma derecesini gösterir, negatif üyelik derecesi $\mu_X^-(u)$ bir u elemanın X bipolar bulanık kümesinin bazı ters özelliklerine sahip olma derecesini gösterir. (Lee, 2004)

Eğer $\mu_X^+(u) \neq 0$ ve $\mu_X^-(u) = 0$ ise u elemanın, X bipolar bulanık kümesinin sadece pozitif özelliklerini sağladığı durumdur. Bu durumda X bir bulanık kümedir.

Eğer $\mu_X^+(u) = 0$ ve $\mu_X^-(u) \neq 0$ ise u elemanın, X bipolar bulanık kümesinin özelliklerini sağlamayıp ters özelliklerini sağladığı durumdur.

$\mu_X^+(u) \neq 0$ ve $\mu_X^-(u) \neq 0$ ise u elemanın, X bipolar bulanık kümesinin özelliklerini ve ters özelliklerinin sağlandığı durumdur.

U boştan farklı bir küme olmak üzere U üzerinde tanımlanmış bütün bipolar bulanık kümelerin topluluğu $BPF(U)$ olarak gösterilir

Örnek 2.1.2: $U = \{u, v, w\}$ olmak üzere

$$X = \{ \langle u, 0.6, -0.4 \rangle, \langle v, 0.8, -0.3 \rangle, \langle w, 0.5, -0.5 \rangle \}$$

X üzerinde bir bipolar bulanık kümedir

Tanım 2.1.3: Boş bipolar bulanık küme bir bipolar bulanık küme olup her $x \in X$ için

$$0_{bp} = \{ \langle u, 0_{bp}^+(u), 0_{bp}^-(u) \rangle \mid u \in U \} \quad (2.2)$$

olarak tanımlanır. Burada $0_{bp}^+(u) = 0 = 0_{bp}^-(u), \forall u \in U$

Evrensel bipolar bulanık küme U üzerinde bir bipolar bulanık küme olup her $u \in U$ için

$$1_{bp} = \{\langle u, 1_{bp}^+(u), 1_{bp}^-(u) \rangle \mid u \in U\} \quad (2.3)$$

olarak tanımlanır. Burada $1_{bp}^+(u) = 1$ ve $1_{bp}^-(u) = -1, \forall u \in U$

(Azhangaphan ve Kamaraj, 2016)

Uyarı 2.1.4: Şimdi bir $X \in BPF(U)$ bipolar bulanık kümesinden bulanık küme elde etme hususunu ele alacağız. X bipolar bulanık kümesini $\forall u \in U$ için $(\mu_X^+(u), \mu_X^-(u))$ ile gösterelim. Bu gösterimi fonksiyon işlemlerinde kolaylık olması sebebiyle kullanıyoruz. $i = 1, 2$ için p_i izdüşüm fonksiyonu olmak üzere

$$(3 - 2i)p_i: BPF(U) \rightarrow [0,1], i = 1, 2 \quad (2.4)$$

$$X \mapsto (3 - 2i)p_i(X)$$

dönüşümü tanımlansın. Bu taktirde

$$i = 1 \text{ için } p_1(X) = p_1(\mu_X^+(u), \mu_X^-(u)) = \mu_X^+(u) \in [0,1] \text{ ve}$$

$$i = 2 \text{ için } -p_2(X) = -p_2(\mu_X^+(u), \mu_X^-(u)) = -\mu_X^-(u) \in [0,1]$$

olur. Böylece $-\mu_X^-, \mu_X^+ \in [0,1]^U$ şeklinde iki bulanık küme elde edilir.

Tanım 2.1.5: X ve Y , U de iki bipolar bulanık küme olsun. Bu taktirde

$$(1) X \subseteq Y \Leftrightarrow u \in U \text{ için } \mu_X^+(u) \leq \mu_Y^+(u) \text{ ve } \mu_X^-(u) \geq \mu_Y^-(u).$$

$$(2) X = Y \Leftrightarrow \text{her } u \in U \text{ için } \mu_X^+(u) = \mu_Y^+(u) \text{ ve } \mu_X^-(u) = \mu_Y^-(u).$$

$$(3) X \cap Y = \{\langle u, \mu_{X \cap Y}^+(u), \mu_{X \cap Y}^-(u) \rangle \mid u \in U\} \text{ dir. Burada;}$$

$$\mu_{X \cap Y}^+(u) = \min\{\mu_X^+(u), \mu_Y^+(u)\} \text{ ve } \mu_{X \cap Y}^-(u) = \max\{\mu_X^-(u), \mu_Y^-(u)\}$$

dir.

(4) $X \cup Y = \{ \langle u, \mu_{X \cup Y}^+(u), \mu_{X \cup Y}^-(u) \rangle \mid u \in U \}$ dir. Burada;

$$\mu_{X \cup Y}^+(u) = \max\{\mu_X^+(u), \mu_Y^+(u)\} \text{ ve } \mu_{X \cup Y}^-(u) = \min\{\mu_X^-(u), \mu_Y^-(u)\}$$

dir.

(5) Bipolar bulanık kümenin tümleyeni $X^c = \{ \langle u, 1 - \mu_X^+(u), -1 - \mu_X^-(u) \rangle \mid u \in U \}$ olarak tanımlanır. (Lee, 2004)

Önerme 2.1.6: X, Y ve Z ortak U evrensel kümesi üzerinde bipolar bulanık kümeler olsun. Bu taktirde aşağıdakiler sağlanır.

(1) $X \cup X = X$ ve $X \cap X = X$.

(2) $X \cup Y = Y \cup X$ ve $X \cap Y = Y \cap X$.

(3) $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$ ve $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$.

(4) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ ve $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$.

(5) $X \cup (X \cap Y) = X$ ve $X \cap (X \cup Y) = X$.

(6) $X \cap Y \subset X$ ve $X \cap Y \subset Y$.

(7) $X \subset X \cup Y$ ve $Y \subset X \cup Y$.

(8) $(X^c)^c = X$.

(9) $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$ ve $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$.

(10) $X \subset Y$ ve $Y \subset Z$ ise $X \subset Z$.

(11) $X \subset Y$ ise $X \cap Z \subset Y \cap Z$ ve $X \cup Z \subset Y \cup Z$.

(12) $X \cup 1_{bp} = 1_{bp}$ ve $X \cap 1_{bp} = X$.

(13) $X \cup 0_{bp} = X$ ve $X \cap 0_{bp} = 0_{bp}$. (Kim ve diğ., 2019)

Sonuç 2.1.7: X ve Y ortak U evrensel kümesi üzerinde bipolar bulanık kümeler olsun. Bu taktirde aşağıdakiler denktir.

$$(1) X \subset Y.$$

$$(2) X \cap Y = X.$$

$$(3) X \cup Y = Y. \text{ (Kim ve diğ., 2019)}$$

Tanım 2.1.8: U boştan farklı bir küme ve $(X_j)_{j \in J}$, U kümesi üzerindeki bipolar bulanık kümelerin bir ailesi olsun.

(1) $(X_j)_{j \in J}$ ailesinin arakesiti U kümesi üzerinde bir bipolar bulanık küme olup $\bigcap_{j \in J} X_j$ ile gösterilir ve her $u \in U$ için,

$$\left(\bigcap_{j \in J} X_j\right)(u) = \left(\bigwedge_{j \in J} \mu_X^+(u), \bigvee_{j \in J} \mu_X^-(u)\right) \quad (2.5a)$$

şeklinde tanımlanır.

(2) $(X_j)_{j \in J}$ ailesinin birleşimi U kümesi üzerinde bir bipolar bulanık küme olup $\bigcup_{j \in J} X_j$ ile gösterilir ve her $u \in U$ için,

$$\left(\bigcup_{j \in J} X_j\right)(u) = \left(\bigvee_{j \in J} \mu_X^+(u), \bigwedge_{j \in J} \mu_X^-(u)\right) \quad (2.5b)$$

şeklinde tanımlanır. (Kim ve diğ., 2019)

Sonuç 2.1.9: U boştan farklı bir küme olmak üzere X , U üzerinde bipolar bulanık küme ve $(X_j)_{j \in J}$, U üzerinde bulanık kümelerin bir ailesi olsun. Bu taktirde,

$$(1) \text{ (Genelleştirilmiş dağılıma kuralları): } X \cup \left(\bigcap_{j \in J} X_j\right) = \bigcap_{j \in J} (X_j \cup X)$$

$$X \cap \left(\bigcup_{j \in J} X_j\right) = \bigcup_{j \in J} (X_j \cap X)$$

$$(2) \text{ (Genelleştirilmiş De Morgan kuralları): } \left(\bigcup_{j \in J} X_j\right)^c = \bigcap_{j \in J} X_j^c$$

$$\left(\bigcap_{j \in J} X_j\right)^c = \bigcup_{j \in J} X_j^c$$

(Kim ve diğ., 2019)

Tanım 2.1.10: $g: U \rightarrow V$ bir fonksiyon ve X, Y sırasıyla U ve V kümeleri üzerinde birer bipolar bulanık küme olsun.

(1) X bipolar bulanık kümesinin g altındaki görüntüsü de bir bipolar bulanık küme olup her $v \in V$ için;

$$g(X)(v) = (\mu_{g(X)}^+(v), \mu_{g(X)}^-(v)) = (g(\mu_X^+)(v), g(\mu_X^-)(v)), \forall v \in V \quad (2.6a)$$

olarak tanımlanır. Burada

$$g(\mu_X^+)(v) = \begin{cases} \bigvee \mu_X^+(u), & u \in g^{-1}(v), \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

$$g(\mu_X^-)(v) = \begin{cases} \bigwedge \mu_X^-(u), & u \in g^{-1}(v), \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklindedir.

(2) Y bipolar bulanık kümesinin g altındaki ters görüntüsü de bir bipolar bulanık küme olup her $u \in U$ için;

$$g^{-1}(Y) = (\mu_{g^{-1}(Y)}^+(u), \mu_{g^{-1}(Y)}^-(u)) = (g^{-1}(\mu_Y^+), g^{-1}(\mu_Y^-)) \quad (2.6b)$$

olarak tanımlanır. Burada

$$g^{-1}(\mu_Y^+) = \mu_Y^+ \circ g(u) \text{ ve } g^{-1}(\mu_Y^-) = \mu_Y^- \circ g(u)$$

(Kim ve diğ., 2019)

Sonuç 2.1.11: $f: U \rightarrow V$ bir fonksiyon ve $X, X_1, X_2 \in \text{BPF}(U)$, $(X_j)_{j \in J} \subset \text{BPF}(U)$, $Y, Y_1, Y_2 \in \text{BPF}(V)$ ve $(Y_j)_{j \in J} \subset \text{BPF}(V)$ olsun. Bu taktirde aşağıdakiler sağlanır.

(1) $X_1 \subset X_2$ ise $f(X_1) \subset f(X_2)$.

(2) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$, $f(\bigcup_{j \in J} X_j) = \bigcup_{j \in J} f(X_j)$.

- (3) $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$, $f(\bigcap_{j \in J} X_j) \subset \bigcap_{j \in J} f(X_j)$.
- (4) f bire-bir ise $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$, $f(\bigcap_{j \in J} X_j) = \bigcap_{j \in J} f(X_j)$.
- (5) $Y_1 \subset Y_2$ ise $f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$.
- (6) $f(X) = 0_{bp} \Leftrightarrow X = 0_{bp}$.
- (7) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$, $f^{-1}(\bigcup_{j \in J} Y_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(Y_j)$.
- (8) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$, $f^{-1}(\bigcap_{j \in J} Y_j) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(Y_j)$.
- (9) $f^{-1}(Y) = 0_{bp} \Leftrightarrow Y \cap f(1_{bp}) = 0_{bp}$.
- (10) $X \subset (f^{-1} \circ f)(X)$, özel olarak f bire-bir ise $X = (f^{-1} \circ f)(X)$.
- (11) $(f \circ f^{-1})(Y) \subset Y$, özel olarak f örten ise $Y = (f \circ f^{-1})(Y)$.
- (12) $f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c$.
- (13) $f: U \rightarrow V$ ve $g: V \rightarrow W$ bir fonksiyon ise her $X \in BPF(U)$ için
- $$(g \circ f)(X) = (g(f(X))).$$
- (14) $f: U \rightarrow V$ ve $g: V \rightarrow W$ bir fonksiyon ise her $Z \in BPF(W)$ için;
- $$(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}(g^{-1}(Z)). \text{ (Kim ve diğ., 2019)}$$

2.2. Bipolar Bulanık Nokta ve Özellikleri

Tanım 2.2.1: $u \in U$, $(\alpha, \beta) \in (0, 1] \times [-1, 0)$ ve $X \in BPF(U)$ olsun.

(a), U kümesi üzerinde bir $u_{(\alpha, \beta)}$ bipolar bulanık noktası her $v \in U$ için

$$[u_{(\alpha, \beta)}](v) = \begin{cases} (\alpha, \beta), & v = u \\ (0, 0), & \text{diğer} \end{cases} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır. (α, β) ikilisine bu noktanın değeri ve u 'ya bu noktanın desteği denir.

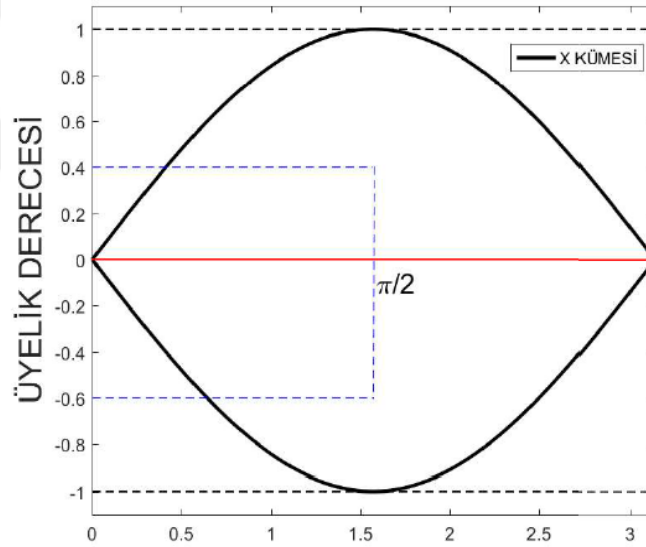
(b) Eğer $\mu_X^+(u) \geq \alpha$ ve $\mu_X^-(u) \leq \beta$ ise $u_{(\alpha,\beta)}$, X 'e aittir denir ve $u_{(\alpha,\beta)} \in X$ ile gösterilir.

U kümesi üzerinde tanımlanan bütün bipolar bulanık noktaların kümesini $BPF_P(U)$ ile göstereceğiz. $X \in BPF(U)$ için,

$$X = \bigcup \{u_{(\alpha,\beta)} \in BPF_P(U) \mid u_{(\alpha,\beta)} \in X\} \quad (2.8)$$

olduğu açıktır. (Kim ve diğ., 2019)

Örnek 2.2.2: $U = [0, \pi]$ ve $X = \{(u, \sin(u), -\sin(u)) \mid u \in [0, \pi]\}$ bipolar bulanık kümesini ele alalım. U üzerinde $(\pi/2)_{(0.4, -0.6)}$ bipolar bulanık noktası verilsin. Bu takdirde bu noktanın X bipolar bulanık kümesine ait olduğu aşağıdaki şekilden açıktır. Burada $\pi/2$ 'ye bu noktanın desteği, $(0.4, -0.6)$ ikilisine ise bu noktanın değeri denir.



Şekil 2.1. X bipolar bulanık kümesi ve bipolar bulanık nokta temsili

Teorem 2.2.3: $X, Y \in BPF(U)$ olsun. Bu takdirde $X \subseteq Y$ ise $\forall u_{(\alpha,\beta)} \in X$ için $u_{(\alpha,\beta)} \in Y$ dir. (Kim ve diğ., 2019)

Teorem 2.2.4: $X, Y \in BPF(U)$ ve $u_{(\alpha,\beta)} \in BPF_P(U)$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır.

$$(1) u_{(\alpha,\beta)} \in X \text{ ve } u_{(\alpha,\beta)} \in Y \Leftrightarrow u_{(\alpha,\beta)} \in X \cap Y.$$

(2) $u_{(\alpha,\beta)} \in X$ veya $u_{(\alpha,\beta)} \in Y \Rightarrow u_{(\alpha,\beta)} \in X \cup Y$. (Kim ve diğ., 2019)

Teorem 2.2.5: $(X_j)_{j \in J} \subset \text{BPF}(U)$ ve $u_{(\alpha,\beta)} \in \text{BPF}_P(U)$ olsun. Bu taktirde,

(1) $u_{(\alpha,\beta)} \in \bigcap_{j \in J} X_j \Leftrightarrow \forall j \in J$ için $u_{(\alpha,\beta)} \in X_j$.

(2) $u_{(\alpha,\beta)} \in X_j$ olacak şekilde bir $j \in J$ varsa o zaman $u_{(\alpha,\beta)} \in \bigcup_{j \in J} X_j$. (Kim ve diğ., 2019)

Teorem 2.2.6: $u_{(\alpha,\beta)} \in \text{BPF}_P(U)$, $v_{(\gamma,\theta)} \in \text{BPF}_P(V)$ ve $f: U \rightarrow V$ bir fonksiyon olsun. Bu taktirde aşağıdakiler sağlanır.

1. $f(u_{(\alpha,\beta)}) \in \text{BPF}_P(V)$. (Kim ve diğ., 2019)
2. $X \in \text{BPF}(U)$ ve $u_{(\alpha,\beta)} \in X$ ise $f(u_{(\alpha,\beta)}) \in f(X)$ sağlanır.
3. $f^{-1}(v_{(\gamma,\theta)}) \in \text{BPF}_P(U)$.

İspat:

2. $u_{(\alpha,\beta)} \in X$ olsun. Her $u \in U$ için

$$\alpha \leq \mu_X^+(u) \leq \bigvee_{z \in f^{-1}(u)} \mu_X^+(z) = f(\mu_X^+)(f(u)) \text{ ve}$$

$$\beta \geq \mu_X^-(u) \geq \bigwedge_{z \in f^{-1}(u)} \mu_X^-(z) = f(\mu_X^-)(f(u))$$

olup $f(u_{(\alpha,\beta)}) \in f(X)$ olur.

3. (2) de $X = f^{-1}(Y)$ olarak alırsak istenen elde edilir.

3. BİPOLAR BULANIK TOPOLOJİK UZAYLAR

Tanım 3.1: U boştan farklı bir küme ve $\tau^* \subset \text{BPF}(U)$ olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan τ^* ailesine X üzerinde bir bipolar bulanık topoloji denir.

(BFT1) $0_{bp}, 1_{bp} \in \tau^*$.

(BFT2) Her $X, Y \in \tau^*$ için $X \cap Y \in \tau^*$.

(BFT3) Her $(X_j)_{j \in J} \subset \tau^*$ için $\bigcup_{j \in J} X_j \in \tau^*$.

(U, τ^*) ikilisine bipolar bulanık topolojik uzay ve τ^* 'ın her elemanına U 'da bir bipolar bulanık açık küme (kısaca BPFOS) denir. $X^c \in \tau^*$ şeklindeki $X \in \text{BPF}(U)$ kümesine bipolar bulanık kapalı küme denir. (Azhagaphan ve diğ., 2016)

U üzerindeki tüm bipolar bulanık topolojilerin kümesini $\text{BPFT}(U)$ şeklinde göstereceğiz.

(U, τ^*) herhangi bulanık topolojik uzay olmak üzere aşağıdaki ailelerin

$$(\tau^+)^* = \{\mu_X^+ \in [0,1]^U \mid X \in \tau^*\}, (\tau^-)^* = \{-\mu_X^- \in [0,1]^U \mid X \in \tau^*\}$$

Chang (Chang, 1968) anlamında birer bulanık topoloji oldukları açıktır.

Önerme 3.2: (U, τ^*) bir bipolar bulanık topolojik uzay ve $\mathcal{F}$, U 'daki tüm kapalı kümelerin ailesi olsun. Bu takdirde;

(1) $0_{bp}, 1_{bp} \in \mathcal{F}$.

(2) Her $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ için $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.

(3) Her $(F_j)_{j \in J} \subset \mathcal{F}$ için $\bigcap_{j \in J} F_j \in \mathcal{F}$. (Kim ve diğ., 2019)

Önerme 3.3: (U, τ^*) bir bipolar bulanık topolojik uzay ve $X \in \text{BPF}(U)$ olsun. Eğer her $u_{(\alpha,\beta)} \in X$ için $u_{(\alpha,\beta)} \in Y \subset X$ olacak şekilde $Y \in \tau^*$ varsa o zaman $X \in \tau^*$ olur. (Kim ve diğ., 2019)

Tanım 3.4: (U, τ^*) bir bipolar bulanık topolojik uzay olsun. Bu takdirde,

(1) $\mathcal{B} \subset \tau^*$, τ^* için bir taban (baz) olarak adlandırılır : $\Leftrightarrow$ her $X \in \tau^*$, $X = 0_{bp}$; veya her $u_{(\alpha,\beta)} \in X$ için bir $Y \in \mathcal{B}$ vardır öyle ki $u_{(\alpha,\beta)} \in Y \subset X$ olur.

(2) $S \subset \tau^*$ ye τ^* için bir alt taban denir $\Leftrightarrow S$ 'nin elemanlarının bütün sonlu arakesitleri τ^* için bir taban oluşturur. (Kim ve diğ., 2019)

Tanım 3.5: (U, τ^*) bipolar bulanık topolojik uzay ve $X \in BPF(U)$ olsun. Bu taktirde X 'e $u_{(\alpha,\beta)} \in BPF_p(U)$ noktasının bipolar bulanık komşuluğu denir : $\Leftrightarrow u_{(\alpha,\beta)} \in Y \subset \tau^*$ olacak şekilde $Y \in \tau^*$ vardır. $u_{(\alpha,\beta)}$ noktasındaki tüm bipolar bulanık komşulukların kümesini $N_{\tau^*}(u_{(\alpha,\beta)})$ ile göstereceğiz. (Kim ve diğ., 2019)

Lemma 3.6: (U, τ^*) bipolar bulanık topolojik uzay ve $X \in BPF(U)$ olsun. Bu taktirde $X \in \tau^*$ olması için gerek ve yeter şart $Y \subset X$ olacak şekilde $Y \in N_{\tau^*}(u_{(\alpha,\beta)})$ vardır. (Kim ve diğ., 2019)

Önerme 3.7: (U, τ) bipolar bulanık topolojik uzay olsun. Bu taktirde aşağıdakiler sağlanır.

(1) $1_{bp} \in N_{\tau^*}(u_{(\alpha,\beta)})$, $\forall u_{(\alpha,\beta)} \in BPF_p(U)$ ve $X \in N_{\tau^*}(u_{(\alpha,\beta)})$ ise o zaman $u_{(\alpha,\beta)} \in X$ dir.

(2) $X, Y \in N_{\tau^*}(u_{(\alpha,\beta)})$ ise $X \cap Y \in N_{\tau^*}(u_{(\alpha,\beta)})$.

(3) $X \subset Y$ ve $X \in N_{\tau^*}(u_{(\alpha,\beta)})$ ise o zaman $Y \in N_{\tau^*}(u_{(\alpha,\beta)})$.

(4) $X \in N_{\tau^*}(u_{(\alpha,\beta)})$ ise o zaman $\forall v_{(\gamma,\theta)} \in Y$ için $Y \subset X$ ve $Y \in N_{\tau^*}(u_{(\gamma,\theta)})$ olacak şekilde $Y \in N_{\tau^*}(v_{(\alpha,\beta)})$ vardır. (Kim ve diğ., 2019)

Tanım 3.8: (U, τ^*) bipolar bulanık topolojik uzay ve $X \in BPF(U)$ olsun. Bu taktirde X 'in bipolar bulanık kapanışı $cl_{\tau^*}(X)$ ile gösterilir (kısaca cl) ve U üzerinde bir bulanık küme olup

$$cl_{\tau^*}(X) = \bigcap \{F \in BPF(U) | F^c \in \tau^*, X \subset F\} \quad (3.1)$$

ile tanımlanır. (Azghagaphan ve diğ., 2016)

Sonuç 3.9: (U, τ^*) bipolar bulanık topolojik uzay ve $X, Y \in BPF(U)$ olsun. Bu taktirde aşağıdakiler sağlanır.

- (1) $cl_{\tau^*}(X)$, X bipolar bulanık kümesini içeren en dar kapalı kümedir,
- (2) X bipolar bulanık kümesinin U üzerinde bipolar bulanık kapalı olması için gerek ve yeter şart $X = cl_{\tau^*}(X)$ olmasıdır.
- (3) $cl_{\tau^*}(0_{bp}) = 0_{bp}$.
- (4) $cl_{\tau^*}(cl_{\tau^*}(X)) = cl_{\tau^*}(X)$.
- (5) $cl_{\tau^*}(X \cup Y) = cl_{\tau^*}(X) \cup cl_{\tau^*}(Y)$.
- (6) $cl_{\tau^*}(X \cap Y) \subset cl_{\tau^*}(X) \cap cl_{\tau^*}(Y)$. (Azhagaphan ve diğ., 2016)

Tanım 3.10: (U, τ^*) bipolar bulanık topolojik uzay ve $X \in BPF(U)$ olsun. Bu taktirde X 'in bipolar bulanık içi $int_{\tau^*}(X)$ ile gösterilir (kısaca $int(X)$) ve U üzerinde bir bipolar bulanık küme olup

$$int_{\tau^*}(X) = \bigcup \{ Y \in BPF(U) \mid Y \in \tau^*, Y \subset X \} \quad (3.2)$$

ile tanımlanır. (Azhagaphan ve diğ., 2016)

Sonuç 3.11: (U, τ^*) bipolar bulanık topolojik uzay ve $X, Y \in BPF(U)$ olsun. Bu taktirde aşağıdakiler sağlanır.

- (1) $int_{\tau^*}(X)$, X 'in kapsadığı en geniş bipolar bulanık açık kümedir.
- (2) X 'in U üzerinde bipolar bulanık açık olması için gerek ve yeter şart $int_{\tau^*}(X) = X$.
- (3) $X \subset Y$ ise $int_{\tau^*}(X) \subset int_{\tau^*}(Y)$ dir.
- (4) $int_{\tau^*}(int_{\tau^*}(X)) = int_{\tau^*}(X)$.
- (5) $int_{\tau^*}(X \cap Y) = int_{\tau^*}(X) \cap int_{\tau^*}(Y)$.
- (6) $int_{\tau^*}(X \cup Y) \supset int_{\tau^*}(X) \cup int_{\tau^*}(Y)$.
- (7) $int_{\tau^*}(X^c) = (cl_{\tau^*}(X))^c$.
- (8) $cl_{\tau^*}(X^c) = (int_{\tau^*}(X))^c$. (Azhagaphan ve diğ., 2016)

Önerme 3.12: (U, τ^*) bipolar bulanık topolojik uzay olsun. Bu taktirde $int_{\tau^*}(1_{bp}) = 1_{bp}$ dir. (Kim ve diğ., 2019)

Tanım 3.13: (X, τ^*) ve (Y, σ^*) iki bipolar bulanık topolojik uzay olsun. Eğer her $f^{-1}(V) \in \tau^*$ için $V \in \sigma^*$ sağlanıyorsa o zaman $f: (X, \tau^*) \rightarrow (Y, \sigma^*)$ fonksiyonuna süreklidir denir. (Kim ve diğ., 2019)

Önerme 3.14: Eğer $f: (U, \tau^*) \rightarrow (V, \sigma^*)$ ve $g: (V, \sigma^*) \rightarrow (W, \delta^*)$ fonksiyonları sürekli ise o zaman $g \circ f: (U, \tau^*) \rightarrow (W, \delta^*)$ bileşke fonksiyonu da süreklidir. (Kim ve diğ., 2019)

Tanım 3.15: (U, τ^*) ve (V, σ^*) iki bipolar bulanık topolojik uzay, $f: (U, \tau^*) \rightarrow (V, \sigma^*)$ bir fonksiyon ve $u_{(\alpha, \beta)} \in \text{BPF}_P(U)$ olsun. Her $Y \in N_{\tau^*}(f(u_{(\alpha, \beta)})) = N_{\tau^*}(f(u)_{(\alpha, \beta)})$ için $f^{-1}(Y) \in N_{\tau^*}(u_{(\alpha, \beta)})$ oluyorsa o zaman $f: (U, \tau^*) \rightarrow (V, \sigma^*)$ fonksiyonu $u_{(\alpha, \beta)}$ noktasında süreklidir denir. (Kim ve diğ., 2019)

Lemma 3.16: Bir $f: (U, \tau^*) \rightarrow (V, \sigma^*)$ fonksiyonu süreklidir. $\Leftrightarrow f$, her $u_{(\alpha, \beta)} \in \text{BPF}_P(U)$ noktasında süreklidir. (Kim ve diğ., 2019)

Teorem 3.17: $f: (U, \tau^*) \rightarrow (V, \sigma^*)$ bir fonksiyon olsun. Bu taktirde aşağıdakiler denktir.

- (1) f süreklidir.
- (2) V 'deki her bipolar bulanık kapalı F kümesi için $f^{-1}(F)$, U 'da kapalıdır.
- (3) $\mathcal{S}, \sigma^*$ için alt taban ve $S \in \mathcal{S}$ ise $f^{-1}(S) \in \tau^*$.
- (4) f , her $u_{(\alpha, \beta)} \in \text{BPF}_P(U)$ noktasında süreklidir.
- (5) Her $u_{(\alpha, \beta)} \in \text{BPF}_P(U)$ ve her $Y \in N_{\sigma^*}(f(u)_{(\alpha, \beta)})$ için $f(X) \subset Y$ olacak şekilde $X \in N_{\tau^*}(u_{(\alpha, \beta)})$ vardır.
- (6) Her $X \in \text{BPF}(U)$ için $f(\text{cl}_{\tau^*}(X)) \subset \text{cl}_{\sigma^*}(f(X))$.
- (7) Her $Y \in \text{BPF}(V)$ için $\text{cl}_{\tau^*}(f^{-1}(Y)) \subset f^{-1}(\text{cl}_{\sigma^*}(Y))$. (Kim ve diğ., 2019)

Sonuç 3.18: $Y \in \text{BPF}(V)$ olmak üzere $f: (U, \tau_1^*) \rightarrow (V, \tau_2^*)$ fonksiyonu süreklidir $\Leftrightarrow f^{-1}(\text{int}_{\sigma^*}(Y)) \subset \text{int}_{\tau^*}(f^{-1}(Y))$. (Kim ve diğ., 2019)

Tanım 3.19: (U, τ^*) ve (V, σ^*) iki bipolar bulanık topolojik uzay olsun. Bu taktirde $f: (U, \tau^*) \rightarrow (V, \sigma^*)$ fonksiyonuna;

(a) Her $X \in \tau^*$ için $f(X) \in \sigma^*$ ise açıktır denir.

(b) Her $F^c \in \tau^*$ için $f(F) \in \sigma^*$ ise kapalıdır denir. (Kim ve diğ., 2019)

Önerme 3.20: $f: (U, \tau^*) \rightarrow (V, \sigma^*)$ ve $g: (V, \sigma^*) \rightarrow (W, \delta^*)$ iki fonksiyon olsun. f ve g açık (kapalı) fonksiyonlar ise $g \circ f: (U, \tau^*) \rightarrow (W, \delta^*)$ bileşke fonksiyonu da açıktır (kapalıdır). (Kim ve diğ., 2019)

Teorem 3.21: $f: (U, \tau^*) \rightarrow (V, \sigma^*)$ bir fonksiyon olsun. Bu taktirde f 'nin bipolar bulanık açık olması için gerek ve yeter şart her $X \in \text{BPF}(U)$ için $f(\text{int}_{\tau^*}(X)) \subset \text{int}_{\sigma^*}(f(X))$ sağlanır. (Kim ve diğ., 2019)

Önerme 3.22: $f: (U, \tau^*) \rightarrow (V, \sigma^*)$ bir bire-bir fonksiyon olsun. Bu taktirde f sürekli ise her $X \in \text{BPF}(U)$ için $\text{int}_{\sigma^*}(f(X)) \subset f(\text{int}_{\tau^*}(X))$ sağlanır. (Kim ve diğ., 2019)

Sonuç 3.23: $f: (U, \tau^*) \rightarrow (V, \sigma^*)$ sürekli, birebir ve açık bir fonksiyon olsun. Bu taktirde her $X \in \text{BPF}(U)$ için $f(\text{int}_{\tau^*}(X)) = \text{int}_{\sigma^*}(f(X))$ (Kim ve diğ., 2019)

Teorem 3.24: $f: (U, \tau^*) \rightarrow (V, \sigma^*)$ bir fonksiyon olsun. Bu taktirde f 'nin bipolar bulanık kapalı olması için gerek ve yeter şart $X \in \text{BPF}(U)$ için $\text{cl}_{\sigma^*}(f(X)) \subset f(\text{cl}_{\tau^*}(X))$. (Kim ve diğ., 2019)

Sonuç 3.25: $f: (U, \tau^*) \rightarrow (V, \sigma^*)$ bir fonksiyon olsun. Bu taktirde f 'nin bipolar bulanık kapalı ve sürekli olması için gerek ve yeter şart her $X \in \text{BPF}(U)$ için $\text{cl}_{\sigma^*}(f(X)) = f(\text{cl}_{\tau^*}(X))$. (Kim ve diğ., 2019)

4. BİPOLAR BULANIK SUPRA TOPOLOJİK UZAYLAR

Supra topolojik uzaylar Mashhour (Mashhour ve diğ., 1983) tarafından tanımlandı. Bu bölümde bipolar bulanık kümeler üzerine supra topoloji tanımlanacak ve açık kapalı kümelerin temel özellikleri elde edilecektir. Daha sonra bipolar bulanık supra iç ve kapanış kavramları tanımlanacak ve ilgili bazı teoremler ispatlanacaktır. Son olarak bipolar bulanık topolojik uzaylarda sağlanan fakat bipolar bulanık supra topolojik uzaylarda sağlanmayan iç ve kapanış özellikleri hakkında ters örnekler verilecektir.

Tanım 4.1: U boştan farklı bir küme olsun. Eğer bir $\tau \subseteq \text{BPF}(U)$ ailesi;

(BFST1) $0_{bp}, 1_{bp} \in \tau$.

(BFST2) $(X_j)_{j \in J} \subseteq \tau$ iken $\bigcup_{j \in J} (X_j) \in \tau$.

şartlarını sağlıyorsa τ 'ya U üzerinde bir bipolar bulanık supra topoloji, (U, τ) ikilisine bipolar bulanık supra topolojik uzay denir. τ 'nın elemanlarına bipolar bulanık supra açık küme, bütünleyeni τ 'ya ait olan bipolar bulanık kümelere ise bipolar bulanık supra kapalı kümeler denir. U üzerindeki tüm bipolar bulanık supra topolojilerin ailesini $\text{BPFST}(U)$ ile göstereceğiz.

U üzerindeki τ bipolar bulanık supra topolojisine τ^* bipolar bulanık topolojisi ile uyumludur denir : $\Leftrightarrow \tau^* \subset \tau$

Bipolar bulanık supra topolojik uzayın tanımdan her bipolar bulanık topolojik uzayın bir bipolar bulanık supra topolojik uzay olduğu açıktır.

Uyarı 4.2: Bipolar bulanık supra topolojik uzaylarda keyfi sayıda bipolar bulanık supra açık kümenin arakesitinin bipolar bulanık supra açık küme olması gerekmez. Örneğin

$$U = \{u, v\}, X, Y \in \text{BPF}(U) \text{ ve } \tau = \{0_{bp}, 1_{bp}, X, Y\}$$

olsun. Burada

$$X = \{\langle u, 1, -0.1 \rangle, \langle v, 0.5, -1 \rangle\}$$

$$Y = \{\langle u, 0.6, -1 \rangle, \langle v, 1, -0.5 \rangle\}$$

dir. Buna göre

$$X \cup Y = \{\langle u, 1, -1 \rangle, \langle v, 1, -1 \rangle\} \in \tau$$

olur. Fakat

$$X \cap Y = \{\langle u, 0.6, -0.1 \rangle, \langle v, 0.5, -0.5 \rangle\} \notin \tau$$

olduğundan keyfi arakesit özelliğinin bipolar bulanık supra topolojik uzaylarda sağlanması gerekmez.

Tanım 4.3: τ ve σ , U üzerinde iki bipolar bulanık supra topolojik uzay olsun. Eğer $\tau \subset \sigma$ ise τ ya, σ dan daha kabadır denir, σ ya τ dan daha incedir denir.

Örnek 4.4:

(1) U boştan farklı bir küme ve $\tau^0 = \{0_{bp}, 1_{bp}\}$ olsun. Bu taktirde τ^0 , U üzerinde bir bipolar bulanık supra topolojidir. τ^0 'a ilkel (indiscrete) bipolar bulanık supra topoloji, (U, τ^0) 'a indiskret bipolar bulanık supra topolojik uzay denir.

(2) U boştan farklı bir küme ve $\tau^1 = \text{BPF}(U)$ olsun. Bu taktirde τ^1 , U üzerinde bir bipolar bulanık supra topolojidir. τ^1 'e ayrık (discrete) bipolar bulanık supra topoloji, (U, τ^1) 'e ayrık bipolar bulanık supra topolojik uzay denir.

(3) $\tau = \{X \in \text{BPF}(U) \mid X = 0_{bp} \text{ veya } X^c \text{ sonlu}\}$ olsun. τ 'nın U üzerinde bir bipolar bulanık supra topoloji olduğu açıktır. τ 'ya U üzerinde bipolar bulanık bütünleyeni sonlu (cofinite) supra topoloji denir ve $\text{Cof}_{bpfs}(U)$ ile gösterilir.

(4) $\tau = \{X \in \text{BPF}(U) \mid X = 0_{bp} \text{ veya } X^c \text{ sayılabilir}\}$ olsun. τ , U üzerinde bir bipolar bulanık supra topolojidir. τ 'ya U üzerinde bipolar bulanık bütünleyeni sayılabilir (cocountable) supra topoloji denir ve $\text{Coc}_{bpfs}(U)$ ile gösterilir.

(5) (U, τ) bir bipolar bulanık supra topolojik uzay olsun.

$$\tau^+ = \{\mu_X^+ \in I^U \mid X \in \tau\} \text{ ve } \tau^- = \{-\mu_X^- \in I^U \mid X \in \tau\}$$

aileleri El Monsef ve Ramadan (Monsef 1987) anlamında birer bulanık supra topolojik uzaydır.

Teorem 4.5: τ , U üzerinde bir bipolar bulanık supra topoloji olsun.

$$\eta_\tau = \{X \in \text{BPF}(U) | \text{Her } Y \in \tau \text{ için } X \cap Y \in \tau\} \quad (4.1)$$

ailesi U üzerinde bir bipolar bulanık topolojidir ve $\eta_\tau \subseteq \tau$ dur.

İspat:

(1) $Y \in \tau$ ise $0_{bp} \cap Y = 0_{bp} \in \tau$ ve $1_{bp} \cap Y = Y \in \tau$ olduğundan $0_{bp}, 1_{bp} \in \eta_\tau$

(2) $X_1, X_2 \in \eta_\tau$ ve $Y \in \tau$ olsun. $(X_1 \cap X_2) \cap Y \in \tau$ olduğunu göstermeliyiz. $X_1 \in \eta_\tau$ ve $Y \in \tau$ olduğundan $X_1 \cap Y \in \tau$ ve $X_2 \in \eta_\tau$ ve $Y \in \tau$ olduğundan $X_2 \cap Y \in \tau$ dur. $X_2 \cap Y \in \tau$ ve $X_1 \in \eta_\tau$ olduğundan $X_1 \cap (X_2 \cap Y) \in \tau$ dur. Buradan $(X_1 \cap X_2) \cap Y \in \tau$ olup $X_1, X_2 \in \eta_\tau$ sağlanır.

(3) $(X_j)_{j \in J} \subset \eta_\tau$ ve $Y \in \tau$ olsun. Göstermemiz gereken $\bigcup_{j \in J} X_j \in \eta_\tau$ yani $(\bigcup_{j \in J} X_j) \cap Y \in \tau$ dur. Her $j \in J$ için $X_j \in \eta_\tau$ olup $X_j \cap Y \in \tau$ dur. τ bipolar bulanık supra topoloji olduğundan keyfi birleşim özelliğine sahip olup $\bigcup_{j \in J} (X_j \cap Y) \in \tau$ olur. Buradan da $\bigcup_{j \in J} X_j \in \eta_\tau$ sağlandığı görülür.

Önerme 4.6: (U, τ_1) ve (U, τ_2) iki bipolar bulanık supra topolojik uzay olsun. Bu takdirde $(U, \tau_1 \cap \tau_2)$ bir bipolar bulanık supra topolojik uzaydır.

Uyarı 4.7: U üzerindeki iki bipolar bulanık supra topolojinin birleşiminin U üzerinde yine bir bipolar bulanık supra topoloji olması gerekmez.

Tanım 4.8: (U, τ) bir bipolar bulanık supra topolojik uzay ve $X \subseteq U$ olsun. O zaman,

$$\tau_X = \{X \cap O | O \in \tau\} \quad (4.2)$$

kümesi X üzerinde bir bipolar bulanık supra topolojidir. Gerçekten;

(1) $0_{bp}, 1_{bp} \in \tau$ iken $X \cap 0_{bp} = 0_{bp}$ ve $X \cap 1_{bp} = X$

(2) J bir indis kümesi iken $j \in J$ için $U_j \in \tau_X$ olsun. O zaman τ_X in tanımı gereği her $j \in J$ için $U_j = X \cap Y_j$ olacak şekilde bir $Y_j \in \tau$ vardır. τ bir bipolar bulanık supra topoloji olduğundan $\bigcup_{j \in J} Y_j \in \tau$ dur. Buradan,

$$(\bigcup_{j \in J} Y_j) \cap X = \bigcup_{j \in J} (Y_j \cap X) = \bigcup_{j \in J} U_j \quad (4.3)$$

olup τ_X in tanımı gereği $\bigcup_{j \in J} U_j \in \tau_X$ dir.

Bu şekildeki τ_X ailesine X bipolar bulanık kümesi tarafından indirgenmiş bipolar bulanık supra alt uzay topolojisi denir ve (X, τ_X) ikilisine bipolar bulanık supra altuzayı denir.

Teorem 4.9: $\mathcal{F}, (U, \tau)$ bipolar bulanık supra topolojik uzayındaki tüm bipolar bulanık supra kapalı kümelerin ailesi olsun. O zaman;

(1) $0_{bp}, 1_{bp} \in \mathcal{F}$.

(2) Her $j \in J$ için $X_j \in \mathcal{F}$ iken $\bigcap_{j \in J} (X_j) \in \mathcal{F}$.

İspat:

(1) Her $u \in U$ için $0_{bp}^+ = 0 = 0_{bp}^-$ ve

$$\begin{aligned} 0_{bp}^c &= \{\langle u, 1 - 0_{bp}^+(u), -1 - 0_{bp}^-(u) \rangle \mid u \in U\} \\ &= \{\langle u, 1, -1 \rangle \mid u \in U\} \\ &= \{\langle u, 1_{bp}^+(u), 1_{bp}^-(u) \rangle \mid u \in U\} \\ &= 1_{bp} \in \tau \end{aligned}$$

olduğundan $0_{bp} \in \mathcal{F}$ dir. Aynı şekilde; $1_{bp}^+(u) = 1$ ve $1_{bp}^-(u) = -1$ olup,

$$\begin{aligned} 1_{bp}^c &= \{\langle u, 1 - 1_{bp}^+(u), -1 - 1_{bp}^-(u) \rangle \mid u \in U\} \\ &= \{\langle u, 1 - 1, -1 - (-1) \rangle \mid u \in U\} \\ &= \{\langle u, 0, 0 \rangle \mid u \in U\} \end{aligned}$$

$$= \{ \langle u, 0_{bp}^+(u), 0_{bp}^-(u) \rangle \mid u \in U \}$$

$$= 0_{bp} \in \tau$$

olduğundan $1_{bp} \in \mathcal{F}$ dir. Şu halde $0_{bp}, 1_{bp} \in \mathcal{F}$ dir.

(2) Her $j \in J$ için $F_j \in \mathcal{F}$ olsun. Bu taktirde her $j \in J$ için $F_j^c \in \tau$ olduğundan;

$$\bigcup_{j \in J} F_j^c = 1_{bp} - \bigcap_{j \in J} F_j \in \tau$$

olup $\bigcap_{j \in J} F_j \in \mathcal{F}$ dir.

Tanım 4.10: $X \in \text{BPF}(U)$ ve (U, τ) bir bipolar bulanık supra topolojik uzay olsun. Bu taktirde;

(1) X 'in bipolar bulanık supra içi X 'in kapsadığı bipolar bulanık supra açık kümelerin birleşimi olarak tanımlanır ve $\text{int}_\tau(X)$ ile gösterilir. Buna göre;

$$\text{int}_\tau(X) = \bigcup \{ O \subseteq X \mid O \in \tau \} \quad (4.4a)$$

dir.

(2) X 'in bipolar bulanık supra kapanışı X 'i kapsayan bipolar bulanık supra kapalı kümelerin arakesiti olarak tanımlanır ve $\text{cl}_\tau(X)$ ile gösterilir. Buna göre;

$$\text{cl}_\tau(X) = \bigcap \{ X \subseteq K \mid K^c \in \tau \} \quad (4.4b)$$

dir.

Tanımlardan da anlaşılacağı üzere $\text{int}_\tau(X)$, X in kapsadığı en geniş bipolar bulanık supra açık küme ve $\text{cl}_\tau(X)$, X 'i kapsayan en dar bipolar bulanık supra kapalı kümedir.

Teorem 4.11: $X, Y \in \text{BPF}(U)$ ve (U, τ) bir bipolar bulanık supra topolojik uzay olsun. Bu taktirde aşağıdakiler sağlanır.

(1) X bipolar bulanık supra açık (kapalı) kümedir. $\Leftrightarrow X = \text{int}_\tau(X)$ ($X = \text{cl}_\tau(X)$)

(2) $X \subseteq Y$ ise $\text{int}_\tau(X) \subseteq \text{int}_\tau(Y)$.

(3) $X \subseteq Y$ ise $cl_\tau(X) \subseteq cl_\tau(Y)$.

(4) $cl_\tau(X) \cup cl_\tau(Y) \subseteq cl_\tau(X \cup Y)$.

(5) $int_\tau(X) \cup int_\tau(Y) \subseteq int_\tau(X \cup Y)$.

(6) $int_\tau(X \cap Y) \subseteq int_\tau(X) \cap int_\tau(Y)$.

(7) $cl_\tau(X \cap Y) \subseteq cl_\tau(X) \cap cl_\tau(Y)$.

(8) $int_\tau(1_{bp} - X) = 1_{bp} - cl_\tau X$.

(9) $cl_\tau(1_{bp}) = 1_{bp} = int_\tau(1_{bp})$ ve $cl_\tau(0_{bp}) = 0_{bp} = int_\tau(0_{bp})$.

İspat:

(1) Eğer X bipolar bulanık supra açık küme ise $\bigcup\{O \subseteq X | O \in \tau\}$ birleşim kümesi X ya eşit olacağından $X = int_\tau(X)$ elde edilir. Tersine $X = int_\tau(X)$ ise $int_\tau(X)$ bipolar bulanık supra açık olduğundan X de bipolar bulanık supra açık küme olur. Bipolar bulanık supra kapalılık koşulu da aynı şekilde gösterilir.

(2) $X \subset Y$ olsun. Keyfi $u_{(\alpha,\beta)} \in int_\tau(X)$ için $u_{(\alpha,\beta)} \in O \subseteq X$ olacak şekilde bir $O \in \tau$ vardır. $X \subset Y$ olduğundan $u_{(\alpha,\beta)} \in O \subseteq X \subseteq Y$ olup $u_{(\alpha,\beta)} \in int_\tau(Y)$ dir. Şu halde $int_\tau(X) \subseteq int_\tau(Y)$ sağlanır.

(3) $X \subseteq cl_\tau(X)$ ve $Y \subseteq cl_\tau(Y)$ olduğunu tanımdan biliyoruz. $X \subseteq Y$ ve $cl_\tau(X)$ kümesinin X yı kapsayan en dar bipolar bulanık supra kapalı küme olduğunu dikkate alırsak ve $cl_\tau(X) = \bigcap\{X \subseteq K | K^c \in \tau\} \subseteq \bigcap\{Y \subseteq K | K^c \in \tau\} = cl_\tau(Y)$ olduğundan $cl_\tau(X) \subseteq cl_\tau(Y)$ elde edilir.

(4) $X \subseteq X \cup Y$ ve $Y \subseteq X \cup Y$ olduğundan $cl_\tau(X) \subseteq cl_\tau(X) \cup cl_\tau(Y)$ ve $cl_\tau(Y) \subseteq cl_\tau(X) \cup cl_\tau(Y)$ dir. Buradan $cl_\tau(X) \cup cl_\tau(Y) \subseteq cl_\tau(X \cup Y)$ elde edilir.

(5) $X \subseteq X \cup Y$ ve $Y \subseteq X \cup Y$ olduğundan (2) den $int_\tau(X) \subset int_\tau(X \cup Y)$ ve $int_\tau(Y) \subseteq int_\tau(X \cup Y)$ dir. Buradan $int_\tau(X) \cup int_\tau(Y) \subseteq int_\tau(X \cup Y)$ elde edilir.

(6) $X \cap Y \subseteq X$ ve $X \cap Y \subseteq Y$ olduğundan (2) den $int_\tau(X \cap Y) \subseteq int_\tau(X)$ ve $int_\tau(X \cap Y) \subseteq int_\tau(Y)$ dir. Buradan da $int_\tau(X \cap Y) \subseteq int_\tau(X) \cap int_\tau(Y)$ elde edilir.

(7) $X \cap Y \subseteq X$ ve $X \cap Y \subseteq Y$ olduğundan $cl_\tau(X \cap Y) \subseteq cl_\tau(X)$ ve $cl_\tau(X \cap Y) \subseteq cl_\tau(Y)$ olup $cl_\tau(X \cap Y) \subseteq cl_\tau(X) \cap cl_\tau(Y)$ elde edilir.

(8) $int_\tau(1_{bp} - X) = \cup \{K^c | K^c, X \text{ de bipolar bulanık supra kapalı ve } K^c \subseteq X^c\} = 1_{bp} - cl_\tau X$

(9) 0_{bp} ve 1_{bp} kümeleri hem bipolar bulanık supra açık hem de bipolar bulanık supra kapalı kümeler olduklarından bipolar bulanık supra içi ve kapanışları kendilerine eşittir.

Uyarı 4.12: Bipolar bulanık topolojik uzaylarda,

$$int_\tau(X \cap Y) = int_\tau(X) \cap int_\tau(Y) \text{ ve } cl_\tau(X) \cup cl_\tau(Y) = cl_\tau(X \cup Y)$$

eşitlikleri sağlanır. Fakat bipolar bulanık supra topolojik uzaylarda bu eşitlikler sağlanmak zorunda değildir.

Örnek 4.13: $U = \{u, v\}$ ve $\tau = \{0_{bp}, 1_{bp}, X, Y\}$ olsun. Burada,

$$X = \{\langle u, 1, -0.4 \rangle, \langle v, 0.3, -1 \rangle\},$$

$$Y = \{\langle u, 0.7, -1 \rangle, \langle v, 1, -0.7 \rangle\}$$

dir. Bu taktirde $X^c = \{\langle u, 0, -0.6 \rangle, \langle v, 0.7, 0 \rangle\}$ ve $Y^c = \{\langle u, 0.3, 0 \rangle, \langle v, 0, -0.3 \rangle\}$ olup

$$\tau^c = \{0_{bp}, 1_{bp}, X^c, Y^c\} \text{ dir. } C = \{\langle u, 0, -0.5 \rangle, \langle v, 0.1, 0 \rangle\}, D = \{\langle u, 0.2, 0 \rangle, \langle v, 0, -0.2 \rangle\}$$

bipolar bulanık kümelerini ele alalım. Bu taktirde,

$$C \cup D = \{\langle u, 0.2, -0.5 \rangle, \langle v, 0.1, -0.2 \rangle\}$$

olur.

$$C \subseteq 1_{bp}, X^c \text{ olduğundan } cl_\tau(D) = 1_{bp} \cap X^c = \{\langle u, 0, -0.6 \rangle, \langle v, 0.7, 0 \rangle\},$$

$$D \subseteq 1_{bp}, Y^c \text{ olduğundan } cl_\tau(E) = 1_{bp} \cap Y^c = \{\langle u, 0.3, 0 \rangle, \langle v, 0, -0.3 \rangle\}$$

ve

$$cl_\tau(C) \cup cl_\tau(D) = \{\langle u, 0.3, -0.6 \rangle, \langle v, 0.7, -0.3 \rangle\}$$

dir. Buradan,

$$C \cup D \subseteq 1_{bp} \text{ olduğundan } cl_{\tau}(D \cup E) = 1_{bp} = \{\langle u, 1, -1 \rangle, \langle v, 1, -1 \rangle\}$$

olup $cl_{\tau}(C \cup D) \neq cl_{\tau}(C) \cup cl_{\tau}(D)$ dir.

Örnek 4.14: $U = \{u, v\}$ ve $\tau = \{0_{bp}, 1_{bp}, W, T\}$ olsun. Burada,

$$W = \{\langle u, 1, -0.2 \rangle, \langle v, 0.3, -0.1 \rangle\},$$

$$T = \{\langle u, 0.7, -1 \rangle, \langle v, 1, -0.7 \rangle\}$$

dir. Şimdi,

$$G = \{\langle u, 1, -0.3 \rangle, \langle v, 0.4, -1 \rangle\},$$

$$H = \{\langle u, 0.8, -1 \rangle, \langle v, 1, -0.9 \rangle\}$$

bipolar bulanık kümelerini ele alalım. Bu taktirde,

$$G \cap H = \{\langle u, 0.8, -0.3 \rangle, \langle v, 0.4, -0.9 \rangle\}$$

olur.

$$0_{bp}, W \subseteq G \text{ olduğundan } int_{\tau}(G) = 0_{bp} \cup W = \{\langle u, 1, -0.2 \rangle, \langle v, 0.3, -1 \rangle\},$$

$$0_{bp}, T \subseteq H \text{ olduğundan } int_{\tau}(H) = 0_{bp} \cup T = \{\langle u, 0.7, -1 \rangle, \langle v, 1, -0.7 \rangle\}$$

ve

$$int_{\tau}(G) \cap int_{\tau}(H) = \{\langle u, 0.7, -0.2 \rangle, \langle v, 0.3, -0.1 \rangle\}$$

dir. Ayrıca,

$$0_{bp} \subseteq G \cap H \text{ olduğundan } int_{\tau}(G \cap H) = \{\langle u, 0, 0 \rangle, \langle v, 0, 0 \rangle\} = 0_{bp}$$

olup $int_{\tau}(G \cap H) \neq int_{\tau}(G) \cap int_{\tau}(H)$ dir.

Tanım 4.15: Bir $\mathcal{B} \subset BPF(U)$ ailesi τ bipolar bulanık supra topolojisi için bir tabandır $:\Leftrightarrow$

$\mathcal{B} \subset \tau$ ve τ , $\mathcal{B}$ 'nin bazı elemanlarının birleşimidir.

Tanım 4.16: (U, τ) bir bipolar bulanık supra topolojik uzay olsun. Eğer bir $\mathcal{S} \subset \text{BPF}(U)$ ailesinin tüm elemanlarının sonlu arakesitleri τ için bir taban oluyorsa $\mathcal{S}$ ailesine τ için bir alt taban denir.

Teorem 4.17: $\mathcal{S} \subset \text{BPF}(U)$ ve $0_{bp}, 1_{bp} \in \mathcal{S}$ olsun. Bu takdirde aşağıda tanımlanan τ ailesi U üzerinde bir bipolar bulanık supra topoloji belirler.

$$\tau = \left\{ \bigcup_{j \in J} \left(\bigcap_{k \in \Delta_j} (X)_{j,k} \right) \mid (X)_{j,k} \in \mathcal{S} \right\} \quad (4.5)$$

Burada J keyfi ve Δ_j sonlu birer indis ailesidir.

İspat: Tanım 4.15 ve Tanım 4.16 dan açıktır.

5. BİPOLAR BULANIK SUPRA TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜREKLİLİK

Bu bölümde bipolar bulanık supra sürekli ve bipolar bulanık supra S^* sürekli dönüşümler tanımlanacak, bipolar bulanık supra açık ve kapalı dönüşümlerin bu tür sürekli dönüşümler altındaki özellikleri incelenecek.

Tanım 5.1: (U, τ) ve (V, σ) iki bipolar bulanık supra topolojik uzay, $\tau^* \subset \tau$ ve $\sigma^* \subset \sigma$ ve $f: (U, \tau) \rightarrow (V, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. Bu taktirde;

(1) f^* 'ye, S^* bipolar bulanık supra sürekli fonksiyon denir. $:\Leftrightarrow (V, \sigma^*)$ bipolar bulanık topolojik uzayındaki her bipolar bulanık açık kümenin f altındaki ters görüntüsü $(U, \tau)^*$ da bipolar bulanık supra açıktır.

(2) Her $X \in \tau^*$ için $f(X) \in \sigma$ ise f^* 'ye, S^* bipolar bulanık supra açık fonksiyon denir.

(3) $Y^c \in \tau^*$ bipolar bulanık kapalı küme olmak üzere $(f(Y))^c \in \sigma$ ise f^* 'ye, S^* bipolar bulanık supra kapalı fonksiyon denir.

Tanım 5.2: (U, τ) ve (V, σ) iki bipolar bulanık supra topolojik uzay ve $f: (U, \tau) \rightarrow (V, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. Bu taktirde;

(1) Her $X \in \sigma$ için $f^{-1}(X) \in \tau$ ise f^* 'ye bipolar bulanık supra sürekli fonksiyon denir. Buna göre $f: (U, \tau) \rightarrow (V, \sigma)$ fonksiyonu bipolar bulanık supra süreklidir $:\Leftrightarrow f^{-1}(\sigma) \subset \tau$ dir.

(2) Her $X \in \tau$ için $f(X) \in \sigma$ ise f^* 'ye, bipolar bulanık supra açık fonksiyon denir.

(3) Y, U 'da bipolar bulanık supra kapalı küme olmak üzere $f(Y), V$ 'de bipolar bulanık supra kapalı küme ise f^* 'ye, bipolar bulanık supra kapalı fonksiyon denir.

Uyarı 5.3: Tanım 4.2'den anlaşıldığı üzere her S^* bipolar bulanık supra sürekli fonksiyon bir bipolar bulanık supra sürekli fonksiyondur.

Teorem 5.4: (U, τ^*) ve (V, σ^*) iki bipolar bulanık topolojik uzay, $\tau^* \subset \tau$ ve $\sigma^* \subset \sigma$ ve $f: (U, \tau^*) \rightarrow (V, \sigma^*)$ bir fonksiyon olsun. Bu taktirde aşağıdakiler denktir.

(1) f, S^* bipolar bulanık supra süreklidir.

(2) (V, σ^*) daki her Y bipolar bulanık kapalı kümesi için $(f^{-1}(Y))^c \in \tau$ dur.

(3) (V, σ^*) daki her Y bipolar bulanık kümesi için $cl_\tau(f^{-1}(Y)) \subseteq f^{-1}(cl_{\sigma^*}(Y))$.

(4) (U, τ^*) daki her X bipolar bulanık kümesi için $f(cl_\tau(X)) \subseteq cl_{\sigma^*}(f(X))$.

(5) (V, σ^*) daki her Y bipolar bulanık kümesi için $f^{-1}(int_{\sigma^*}(Y)) \subseteq int_\tau(f^{-1}(Y))$.

İspat:

(1) $\Rightarrow$ (2) f, S^* bipolar bulanık supra sürekli ve $Y^c \in \sigma^*$ olsun. f, S^* bipolar bulanık supra sürekli olduğundan $f^{-1}(1_{bp} - Y) = 1_{bp} - f^{-1}(Y) \in \tau$ dur. Buradan $f^{-1}(Y)$ nin (U, τ) da kapalı olduğu görülür.

(2) $\Rightarrow$ (3) Her $Y \in \sigma^*$ için $cl_{\sigma^*}(Y)$ kümesi bipolar bulanık kapalı küme olduğundan $f^{-1}(cl_{\sigma^*}(Y))$ kümesi τ da bipolar bulanık supra kapalıdır. Buradan da,

$$f^{-1}(cl_{\sigma^*}(Y)) = cl_\tau \left(f^{-1}(cl_{\sigma^*}(Y)) \right) \stackrel{Y \subseteq cl_{\sigma^*}(Y)}{\supseteq} cl_\tau(f^{-1}(Y))$$

olup $cl_\tau(f^{-1}(Y)) \subseteq f^{-1}(cl_{\sigma^*}(Y))$ elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (4) $f(X) = Y$ olsun. O zaman $cl_\tau(f^{-1}(Y)) \subseteq f^{-1}(cl_{\sigma^*}(Y))$ olup buradan da,

$$f^{-1}(cl_{\sigma^*}(f(X))) \supseteq cl_\tau(f^{-1}(f(X))) \supseteq cl_\tau(Y)$$

ve

$$cl_{\sigma^*}(f(X)) \supseteq f \left(f^{-1}(cl_{\sigma^*}(f(X))) \right) \supseteq f(cl_\tau(X))$$

olup $f(cl_\tau(X)) \subseteq cl_{\sigma^*}(f(X))$ dır.

(4) $\Rightarrow$ (2) $Y, (V, \sigma^*)$ da bipolar bulanık kapalı küme ve $X = f^{-1}(Y)$ olsun. O zaman,

$$f(cl_\tau(X)) \subseteq cl_{\sigma^*}(f(X)) \subseteq cl_{\sigma^*}(f(f^{-1}(Y))) \subseteq cl_{\sigma^*}(Y) = Y$$

ve

$$cl_{\tau}(X) \subseteq f^{-1}\left(f\left(cl_{\tau}(X)\right)\right) \subseteq f^{-1}(Y) = X$$

dir. Bir bipolar bulanık supra kümenin bipolar bulanık supra kapanışı her zaman kümeyi kapsadığından dolayı $cl_{\tau}(X) = X$ olup X bipolar bulanık supra kapalı bir küme dolayısıyla $f^{-1}(Y)$, U da bipolar bulanık supra kapalı kümedir.

(2) $\Rightarrow$ (1) Y, V de bipolar bulanık açık küme olsun. O zaman $1_{bp} - Y$ kümesi bipolar bulanık kapalı kümedir. O zaman $f^{-1}(1_{bp} - Y) = 1_{bp} - f^{-1}(Y)$, U de bipolar bulanık supra kapalı küme olup $f^{-1}(Y)$, U de bipolar bulanık supra açık kümedir. Bu durumda f , S^* bipolar bulanık supra süreklidir.

(1) $\Rightarrow$ (5) $Y \in \sigma^*$ olsun. O zaman f , S^* bipolar bulanık supra sürekli olduğundan $f^{-1}(int_{\sigma^*}(Y)) \in \tau$ dir. Fakat $f^{-1}(int_{\sigma^*}(Y))$ bipolar bulanık supra açık küme olduğundan bipolar bulanık supra içi kendisine eşittir, yani $f^{-1}(int_{\sigma^*}(Y)) = int_{\tau}(f^{-1}(int_{\sigma^*}(Y)))$ dir. $int_{\sigma^*}(Y) \subseteq Y$ olduğundan;

$$f^{-1}(int_{\sigma^*}(Y)) = int_{\tau}(f^{-1}(int_{\sigma^*}(Y))) \subseteq int_{\tau}(f^{-1}(Y))$$

olup $f^{-1}(int_{\sigma^*}(Y)) \subseteq int_{\tau}(f^{-1}(Y))$ dir.

(5) $\Rightarrow$ (1) $Y \in \sigma^*$ olsun. Bu taktirde $f^{-1}(int_{\sigma^*}(Y)) = f^{-1}(Y) \subseteq int_{\tau}(f^{-1}(Y))$ dir. Bu durumda $f^{-1}(Y) = int_{\tau}(f^{-1}(Y)) \in \tau$ olup f , S^* bipolar bulanık supra süreklidir.

Teorem 5.5: (U, τ^*) ve (V, σ^*) iki bipolar bulanık topolojik uzay, $\tau^* \subset \tau$ ve $\sigma^* \subset \sigma$ olsun. Bu taktirde $f: (U, \tau^*) \rightarrow (V, \sigma^*)$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

(1) $f: (U, \tau) \rightarrow (V, \sigma)$ fonksiyonu bipolar bulanık supra süreklidir.

(2) (V, σ) daki her bipolar bulanık supra kapalı kümenin f altındaki ters görüntüsü (U, τ) da bipolar bulanık supra kapalıdır.

(3) V deki her Y bipolar bulanık kümesi için;

$$cl_{\tau}(f^{-1}(Y)) \subseteq f^{-1}(cl_{\sigma}(Y)) \subseteq f^{-1}(cl_{\sigma^*}(Y)).$$

(4) U daki her X bipolar bulanık kümesi için

$$f(\text{cl}_\tau(X)) \subseteq \text{cl}_\sigma(f(X)) \subseteq \text{cl}_{\sigma^*}(f(X)).$$

(5) V deki her Y bipolar bulanık kümesi için;

$$\text{int}_\tau(f^{-1}(Y)) \supseteq f^{-1}(\text{int}_\sigma(Y)) \supseteq f^{-1}(\text{int}_{\sigma^*}(Y)).$$

İspat:

(1) $\Rightarrow$ (2) $f: (U, \tau) \rightarrow (V, \sigma)$ fonksiyonu bipolar bulanık supra sürekli olsun. $Y^c \in \sigma$ alalım. Bu taktirde $f^{-1}(Y^c) = f^{-1}(1_{bp} - Y) = 1_{bp} - f^{-1}(Y) \in \tau$ olur. Buradan $f^{-1}(Y)$, (U, τ) da bipolar bulanık supra kapalı olduğu görülür.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\{Y \subset K \mid K^c \in \sigma^* \subset \sigma\} \subset \{Y \subset L \mid L^c \in \sigma\}$ olup,

$$\text{cl}_\sigma(Y) = \bigcap \{Y \subset K \mid K^c \in \sigma\} \subset \bigcap \{Y \subset L \mid L^c \in \sigma^*\} = \text{cl}_{\sigma^*}(Y)$$

dir. Buradan $\text{cl}_\sigma(Y) \subset \text{cl}_{\sigma^*}(Y)$ ve $f^{-1}(\text{cl}_\sigma(Y)) \subseteq f^{-1}(\text{cl}_{\sigma^*}(Y))$ elde edilir. Diğer taraftan $\text{cl}_\sigma(Y)$ bipolar bulanık supra kapalı küme olduğundan $f^{-1}(\text{cl}_\sigma(Y))$ de τ da bipolar bulanık supra kapalıdır. Bu taktirde;

$$f^{-1}(\text{cl}_\sigma(Y)) = \text{cl}_\tau(f^{-1}(\text{cl}_\sigma(Y))) \stackrel{Y \subseteq \text{cl}_\sigma(Y)}{\supseteq} \text{cl}_\tau(f^{-1}(Y))$$

Oluş $\text{cl}_\tau(f^{-1}(Y)) \subseteq f^{-1}(\text{cl}_\sigma(Y))$ dir. Sonuçta,

$$\text{cl}_\tau(f^{-1}(Y)) \subseteq f^{-1}(\text{cl}_\sigma(Y)) \subseteq f^{-1}(\text{cl}_{\sigma^*}(Y))$$

elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (4) $f(X) = Y$ olsun. $\text{cl}_\sigma(f(X)) \subseteq \text{cl}_{\sigma^*}(f(X))$ olduğunu biliyoruz.

$$\text{cl}_\sigma(Y) \subseteq \text{cl}_\tau(f^{-1}(f(X))) \subseteq f^{-1}(\text{cl}_\sigma(f(X)))$$

ve

$$f(\text{cl}_\tau(X)) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\text{cl}_\sigma(f(X))\right)\right) \subseteq \text{cl}_\sigma(f(X))$$

olup $f(\text{cl}_\tau(X)) \subseteq \text{cl}_\sigma(f(X)) \subseteq \text{cl}_{\sigma^*}(f(X))$ sağlanır.

(4) $\Rightarrow$ (2) $Y, (V, \sigma)$ da bipolar bulanık kapalı küme ve $X = f^{-1}(Y)$ olsun. O zaman,

$$f(\text{cl}_\tau(X)) \subseteq \text{cl}_\sigma(f(X)) \subseteq \text{cl}_\sigma\left(f(f^{-1}(Y))\right) \subseteq \text{cl}_\sigma(Y) = Y$$

ve

$$\text{cl}_\tau(X) \subseteq f^{-1}\left(f(\text{cl}_\tau(X))\right) \subseteq f^{-1}(Y) = X$$

dir. Bir bipolar bulanık supra kümenin bipolar bulanık supra kapanışı her zaman kümeyi kapsadığından dolayı $\text{cl}_\tau(X) = X$ olup X bipolar bulanık supra kapalı bir küme dolayısıyla $f^{-1}(Y)$, U da bipolar bulanık supra kapalı kümedir.

(2) $\Rightarrow$ (1) Y, V de bipolar bulanık supra açık küme olsun. O zaman $1_{bp} - Y$ kümesi bipolar bulanık supra kapalı kümedir. O zaman $f^{-1}(1_{bp} - Y) = 1_{bp} - f^{-1}(Y)$, X de bipolar bulanık supra kapalı küme olup $f^{-1}(Y)$, U da bipolar bulanık supra açık kümedir. Bu durumda f , bipolar bulanık supra süreklidir.

(1) $\Rightarrow$ (5) $Y \in \sigma$ olsun. O zaman f , bipolar bulanık supra sürekli olduğundan $f^{-1}(\text{int}_\sigma(Y)) \in \tau$ dir. Fakat $f^{-1}(\text{int}_\sigma(Y))$ bipolar bulanık supra açık küme olduğundan bipolar bulanık supra içi kendisine eşittir, yani;

$$f^{-1}(\text{int}_\sigma(Y)) = \text{int}_\tau\left(f^{-1}(\text{int}_\sigma(Y))\right)$$

dir. $\text{int}_\sigma(Y) \subseteq Y$ olduğundan;

$$f^{-1}(\text{int}_\sigma(Y)) = \text{int}_\tau\left(f^{-1}(\text{int}_\sigma(Y))\right) \subseteq \text{int}_\tau(f^{-1}(Y))$$

olup $f^{-1}(\text{int}_\sigma(Y)) \subseteq \text{int}_\tau(f^{-1}(Y))$ dir. Diğer taraftan,

$$\text{int}_{\sigma^*}(Y) = \bigcup \{0 \subset Y \mid 0 \in \sigma^*\} \subseteq \bigcup \{0 \subset Y \mid 0 \in \sigma^* \subset \sigma\} = \text{int}_\sigma(Y)$$

olduğundan $f^{-1}(\text{int}_{\sigma^*}(Y)) \subseteq f^{-1}(\text{int}_{\sigma}(Y))$ dir. Sonuç olarak,

$$\text{int}_{\tau}(f^{-1}(Y)) \supseteq f^{-1}(\text{int}_{\sigma}(Y)) \supseteq f^{-1}(\text{int}_{\sigma^*}(Y))$$

sağlanır.

(5) $\Rightarrow$ (1) $Y \in \sigma$ olsun. O zaman $f^{-1}(\text{int}_{\sigma}(Y)) = f^{-1}(Y) \subseteq \text{int}_{\tau}(f^{-1}(Y))$ dir. Bu taktirde $f^{-1}(Y) = \text{int}_{\tau}(f^{-1}(Y)) \in \tau$ olup f , bipolar bulanık supra süreklidir.

Teorem 5.6: $f: (U, \tau) \rightarrow (V, \sigma)$ bir bipolar bulanık supra sürekli fonksiyon ve $g: (V, \sigma) \rightarrow (W, \delta)$ bir S^* bipolar bulanık supra sürekli fonksiyon olsun. Bu taktirde $\text{gof}: (U, \tau) \rightarrow (W, \delta)$, S^* bipolar bulanık supra süreklidir.

İspat: $Z \in \delta^* \subset \delta$ alalım. G, S^* bipolar bulanık sürekli olduğundan $g^{-1}(Z) \in \sigma$ dir. f bipolar bulanık supra sürekli olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(Z)) = (\text{gof})^{-1}(Z) \in \tau$ olup $\text{gof}: (U, \tau) \rightarrow (Z, \delta)$ bipolar bulanık supra süreklidir.

Teorem 5.7: $f: (U, \tau) \rightarrow (V, \sigma)$ ve $g: (V, \sigma) \rightarrow (W, \delta)$ birer bipolar bulanık supra sürekli (bipolar bulanık supra açık) fonksiyon olsun. Bu taktirde $\text{gof}: (U, \tau) \rightarrow (W, \delta)$ bipolar bulanık supra süreklidir (bipolar bulanık supra açıktır).

İspat: $Z \in \delta$ alalım. g bipolar bulanık sürekli olduğundan, $g^{-1}(Z) \in \sigma$ dir. f bipolar bulanık supra sürekli olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(Z)) = (\text{gof})^{-1}(Z) \in \tau$ olup $\text{gof}: (X, \tau) \rightarrow (Z, \delta)$ bipolar bulanık supra süreklidir.

Teorem 5.8: $f: (U, \tau) \rightarrow (V, \sigma)$ ve $g: (U, \sigma) \rightarrow (W, \delta)$ birer S^* bipolar bulanık supra sürekli fonksiyon olsun. Bu taktirde $\text{gof}: (U, \tau) \rightarrow (W, \delta)$ bileşke fonksiyonu bipolar bulanık supra süreklidir.

İspat: f ve g birer S^* bipolar bulanık supra sürekli fonksiyon olduklarından aslında bipolar bulanık supra sürekli fonksiyonlardır. Bu taktirde Teorem 4.8 gereği $\text{gof}: (X, \tau) \rightarrow (Z, \delta)$ bileşke fonksiyonu bipolar bulanık supra süreklidir.

Uyarı 5.9:

(a) $f: (U, \tau) \rightarrow (V, \sigma)$ ve $g: (V, \sigma) \rightarrow (W, \delta)$ birer S^* bipolar bulanık supra sürekli fonksiyon olsun. Bu taktirde $\text{gof}: (U, \tau) \rightarrow (W, \delta)$ bileşke fonksiyonu S^* bipolar bulanık supra sürekli olmak zorunda değildir. Örneğin aşağıdaki diyagramı ve tabloları ele alırsak

Tablo 5.1. U kümesi üzerindeki bipolar bulanık ve bipolar bulanık supra topolojiler

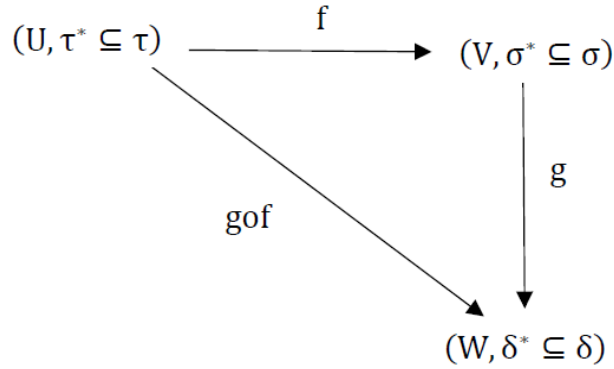
$U = \{u_1, v_1\}$
$\tau^* = \{0_{bp}, 1_{bp}, X_1^*\}$
$X_1^* = \{\langle u_1, 0.5, -0.4 \rangle, \langle v_1, 0.6, -0.7 \rangle\}$
$\tau = \{0_{bp}, 1_{bp}, X_1, Y_1\}$
$X_1 = \{\langle u_1, 1, -0.5 \rangle, \langle v_1, 0.7, -1 \rangle\}$
$Y_1 = \{\langle u_1, 0.5, -0.4 \rangle, \langle v_1, 0.6, -0.7 \rangle\}$

Tablo 5.2. V kümesi üzerindeki bipolar bulanık ve bipolar bulanık supra topolojiler

$V = \{u_2, v_2\}$
$\sigma^* = \{0_{bp}, 1_{bp}, X_2^*\}$
$X_2^* = \{\langle u_2, 0.2, -0.3 \rangle, \langle v_2, 0.3, -0.6 \rangle\}$
$\sigma = \{0_{bp}, 1_{bp}, X_2, Y_2\}$
$X_2 = \{\langle u_2, 0.2, -0.3 \rangle, \langle v_2, 0.3, -0.6 \rangle\}$
$Y_2 = \{\langle u_2, 1, -0.4 \rangle, \langle v_2, 0.5, -1 \rangle\}$

Tablo 5.3. W kümesi üzerindeki bipolar bulanık ve bipolar bulanık supra topolojiler

$W = \{u_3, v_3\}$
$\delta^* = \{0_{bp}, 1_{bp}, X_3^*\}$
$X_3^* = \{\langle u_3, 0.4, -0.5 \rangle, \langle v_3, 0.2, -0.8 \rangle\}$
$\delta = \{0_{bp}, 1_{bp}, X_3, Y_3\}$
$X_3 = \{\langle u_3, 0.5, -1 \rangle, \langle v_3, 1, -0.9 \rangle\}$
$Y_3 = \{\langle u_3, 1, -0.6 \rangle, \langle v_3, 0.3, -1 \rangle\}$



Şekil 5.1. gof bileşke fonksiyonunun diyagramı

ve $f(u_1) = u_2$, $f(v_1) = v_2$, $g(u_2) = u_3$, $g(v_2) = v_3$ olarak tanımlandığında

$$\begin{aligned}
 (gof)^{-1}(X_3^*) &= \left\{ \left(\mu_{X_3^*}^+(gof)(u_1), \mu_{X_3^*}^-(gof)(u_1) \right), \left(\mu_{X_3^*}^+(gof)(v_1), \mu_{X_3^*}^-(gof)(v_1) \right) \right\} \\
 &= \left\{ \left(\mu_{X_3^*}^+(u_3), \mu_{X_3^*}^-(u_3) \right), \left(\mu_{X_3^*}^+(v_3), \mu_{X_3^*}^-(v_3) \right) \right\} \\
 &= \{(0.4, -0.5), (0.2, -0.8)\} \notin \tau
 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

(b) Verilen örnekte g bipolar bulanık supra sürekli olarak tanımlanırsa gof bileşke fonksiyonu bipolar bulanık supra sürekli olmayabilir.

Tanım 5.10: (U, τ) ve (V, σ) iki bipolar bulanık supra topolojik uzay ve $X \in \text{BPF}(U)$, $Y \in \text{BPF}(V)$ olsun. Bu taktirde X ve Y bipolar bulanık kümelerin çarpımı $U \times V$ üzerinde bir bipolar bulanık küme olup,

$$X \times Y = \{ \langle (u, v), (\mu_X^+(u) \wedge \mu_Y^+(v)), (\mu_X^-(u) \vee \mu_Y^-(v)) \rangle : (u, v) \in U \times V \} \quad (5.1)$$

biçiminde tanımlanır. $U \times V$ çarpım kümesi üzerinde bir bipolar bulanık supra topoloji tanımlayabiliriz. $U \times V$ çarpım kümesi üzerindeki bipolar bulanık supra topoloji aşağıdaki izdüşüm fonksiyonlarını sürekli kılan en kaba bipolar bulanık supra topoloji olarak tanımlanır.

$$p_1: U \times V \rightarrow U, p_1(u, v) = u \text{ ve } p_2: U \times V \rightarrow V, p_2(u, v) = v$$

Bu izdüşüm fonksiyonları $G \in \tau$ için;

$$p_1^{-1}(\mu_G^+)(u, v) = \mu_G^+(p_1(u, v)) = \mu_G^+(u) \text{ ve}$$

$$p_1^{-1}(\mu_G^-)(u, v) = \mu_G^-(p_1(u, v)) = \mu_G^-(u)$$

olup

$$p_1^{-1}(G) = \{ \langle (u, v), \mu_G^+(u), \mu_G^-(u) \rangle \} = G \times 1_{\text{bp}_V}$$

dir. Aynı şekilde her $H \in \sigma$ için

$$p_2^{-1}(H) = \{ \langle (u, v), \mu_H^+(u), \mu_H^-(v) \rangle \} = 1_{\text{bp}_U} \times H$$

Böylelikle

$$\{ G \times 1_{\text{bp}_V} \mid G \in \tau \} \cup \{ 1_{\text{bp}_U} \times H \mid H \in \sigma \}$$

kümesi, $U \times V$ üzerinde tanımlanmış δ çarpım topolojisi için bir tabandır τ ve σ iki bipolar bulanık supra topoloji olduğundan $\{ G \times 1_{\text{bp}_V} \mid G \in \tau \}$ ve $\{ 1_{\text{bp}_U} \times H \mid H \in \sigma \}$ aileleri keyfi birleşim özelliğine sahiptir. Bu taktirde δ topolojisi

$$\delta = \left\{ \left(G \times 1_{\text{bp}_V} \right) \cup \left(1_{\text{bp}_U} \times H \right) \mid G \in \tau, H \in \sigma \right\} \text{ şeklindedir.}$$

6. BİPOLAR BULANIK SUPRA TOPOLOJİK UZAYLARDA KOMŞULUK YAPILARI

6.1. Bipolar Bulanık Supra Komşuluk

Tanım 6.1.1: (U, τ) bir bipolar bulanık supra topolojik uzay, $u_{(\alpha, \beta)} \in \text{BPF}_p(U)$ ve $X \in \text{BPF}(U)$ olsun. Bu taktirde $u_{(\alpha, \beta)} \in Y \subseteq X$ olacak şekilde bir $Y \in \tau$ varsa X 'e, $u_{(\alpha, \beta)}$ bipolar bulanık noktasının bipolar bulanık supra komşuluğu denir. $u_{(\alpha, \beta)}$ bipolar bulanık noktasının tüm bipolar bulanık supra komşuluklarının ailesi bipolar bulanık supra komşuluk sistemi olarak adlandırılır ve $N_\tau(u_{(\alpha, \beta)})$ ile gösterilir.

Örnek 6.1.2: $U = \{u, v\}$ olmak üzere;

$$\tau = \{0_{bp}, 1_{bp}, X, Y, Z\}$$

ve

$$X = \{\langle u, 0.5, -0.5 \rangle, \langle v, 0.7, -0.3 \rangle\},$$

$$Y = \{\langle u, 0.6, -0.8 \rangle, \langle v, 0.9, -0.7 \rangle\},$$

$$Z = \{\langle u, 0.3, -0.4 \rangle, \langle v, 0.4, -0.1 \rangle\}$$

olsun. Her bipolar bulanık nokta özel bir bipolar bulanık küme ifade ettiğinden aşağıdaki iki bipolar bulanık kümeyi iki bipolar bulanık nokta olarak ele alabiliriz.

$$u_{(\alpha, \beta)} = \{\langle u, 0.8, -0.6 \rangle\} \text{ ve } u_{(\gamma, \theta)} = \{\langle u, 0.4, -0.45 \rangle\}$$

olarak ele alalım. Bu taktirde,

$$u_{(\alpha, \beta)} \in Y \subseteq 1_{bp} \text{ ve } u_{(\gamma, \theta)} \in X \subseteq Y \text{ olup } 1_{bp} \in N_\tau(u_{(\alpha, \beta)}) \text{ ve } Y \in N_\tau(u_{(\gamma, \theta)}) \text{ sağlanır.}$$

Örnek 6.1.3: $\tau = \{0_{bp}, 1_{bp}, X, Y\}$ ve $U = [0, \pi]$ olsun. Burada her $u \in U$ için

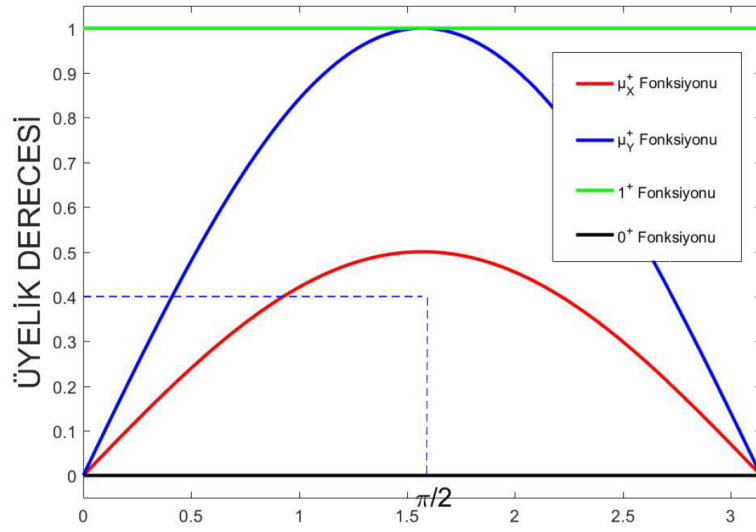
$$X = \{\langle u, \mu_X^+(u), \mu_X^-(u) \rangle | u \in U\} \text{ ve } Y = \{\langle u, \mu_Y^+(u), \mu_Y^-(u) \rangle | u \in U\}$$

olmak üzere üyelik fonksiyonları,

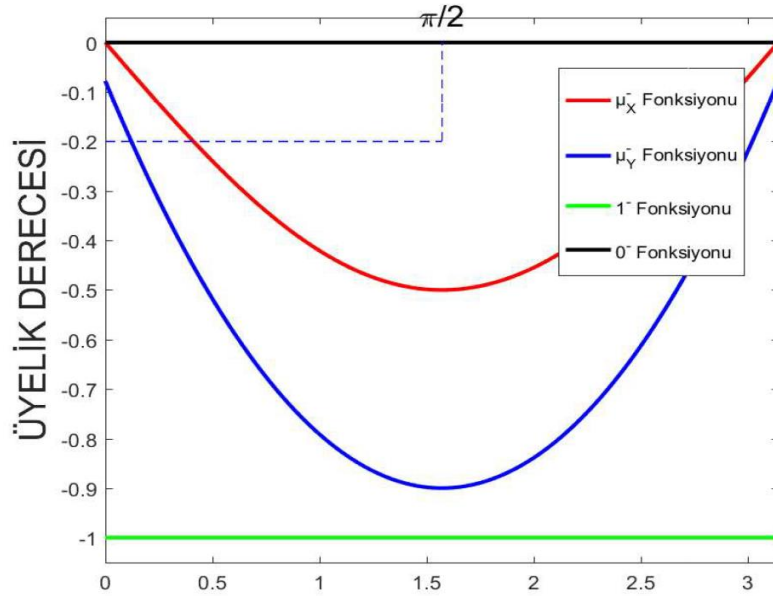
Tablo 6.1. τ üzerindeki açık kümelerin pozitif üyelik dereceleri

$\mu_X^+(u) = \frac{\sin u}{2}$	$\mu_X^-(u) = -\frac{\sin u}{2}$
$\mu_Y^+(u) = \cos(u - \frac{\pi}{2})$	$\mu_Y^-(u) = \frac{1}{3}\left(u - \frac{\pi}{2}\right)^2 - 0.9$

olarak verilsin. Bu fonksiyonların verilen aralıktaki grafikleri yardımıyla da



Şekil 6.1. τ üzerindeki açık kümelerin pozitif üyelik dereceleri



Şekil 6.2. τ üzerindeki açık kümelerin negatif üyelik dereceleri

$X \subseteq Y$ olduğu görülebilir. Verilen τ ailesinin bipolar bulanık supra topoloji olduğu böylece açıktır. Bu taktirde $u = \pi/2$ için,

Tablo 6.2. X ve Y kümelerinin $\pi/2$ noktasındaki üyelik dereceleri

$\mu_X^+(\pi/2) = 0.5 \geq 0.4$	$\mu_X^-(\pi/2) = -0.5 \leq -0.2$
$\mu_Y^+(\pi/2) = 1 \geq 0.4$	$\mu_Y^-(\pi/2) = -0.9 \leq -0.2$

olup $(\pi/2)_{(0.4,-0.2)} \in X, Y$ dir. Aynı zamanda $(\pi/2)_{(0.4,-0.2)} \in X \subseteq Y$ ve $X \in \tau$ olduğundan $Y \in N_\tau((\pi/2)_{(0.4,-0.2)})$ elde edilir.

Teorem 6.1.4: (U, τ) bir bipolar bulanık supra topolojik uzay ve $X \in \text{BPF}(U)$ olsun. Bu taktirde X , bir bipolar bulanık supra açık kümedir ancak ve ancak X içerdiği her bipolar bulanık noktanın bipolar bulanık supra komşuluğudur.

İspat: X bir bipolar bulanık supra açık küme ve $u_{(\alpha,\beta)} \in X$ olsun. Bu taktirde $Y = X$ olarak alırsak $u_{(\alpha,\beta)} \in X \subseteq X$ sağlandığından X , $u_{(\alpha,\beta)}$ 'nın bipolar bulanık supra komşuluğu olur.

Tersine X , içerdiği bütün bipolar bulanık noktaların bir bipolar bulanık supra komşuluğu olsun. Bu taktirde her $u_{(\alpha,\beta)} \in X$ için $u_{(\alpha,\beta)} \in Y_j \subseteq X$ olacak şekilde bir $Y_j \in \tau$ vardır. $Z = \bigcup_{j \in J} Y_j$ olarak alalım. Bipolar bulanık supra topolojik uzayın tanımından Z bipolar bulanık supra açık kümedir. Her $j \in J$ için $Y_j \subseteq X$ olduğundan $Z \subseteq X$ dir. Diğer taraftan X in her bipolar bulanık noktası Y_j ye ait olduğundan aynı zamanda Z ye de ait olup $X \subseteq Z$ dir. Sonuç olarak $X = Z$ elde ederiz ki bu da X in bipolar bulanık supra açık küme olduğunu söyler.

Teorem 6.1.5: (U, τ) bir bipolar bulanık supra topolojik uzay, $X, Y \in \text{BPF}(U)$ ve $u_{(\alpha,\beta)}, \in \text{BPF}_p(U)$ olsun. Bu taktirde $N_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ ailesi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. Her $u_{(\alpha,\beta)}$ için $N_\tau(u_{(\alpha,\beta)}) \neq \emptyset$.
2. $X \in N_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ ise $u_{(\alpha,\beta)} \in X$.

3. $X \subseteq Y$ ve $X \in N_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ ise $Y \in N_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$.

4. $X \in N_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ olsun. Bu taktirde öyle bir $Y \in N_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ vardır ki her $v_{(Y,\theta)} \in Y$ için $Y \subseteq X$ ve $Y \in N_\tau(v_{(Y,\theta)})$ dir.

İspat:

1. $u_{(\alpha,\beta)} \in 1_{bp}$ olsun. 1_{bp} bipolar bulanık supra açık küme olduğundan içerdiği her bipolar bulanık noktanın bipolar bulanık supra komşuluğu olup $N_\tau(u_{(\alpha,\beta)}) \neq \emptyset$.

2. $X \in N_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ olsun. Bu taktirde $u_{(\alpha,\beta)} \in Y \subseteq X$ olacak şekilde bir $Y \in \tau$ vardır. Buna göre $u_{(\alpha,\beta)} \in X$ dir.

3. $X \subseteq Y$ ve $X \in N_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ olsun. Bu taktirde $u_{(\alpha,\beta)} \in Z \subseteq X$ olacak şekilde bir $Z \in \tau$ vardır. $X \subseteq Y$ olduğundan $u_{(\alpha,\beta)} \in Z \subseteq X \subseteq Y$ olduğu görülür. Buna göre $Y \in N_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ dir.

4. $X \in N_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ keyfi verilsin. Bu taktirde $u_{(\alpha,\beta)} \in Y \subseteq X$ olacak şekilde bir $Y \in \tau$ vardır. Ayrıca $Y \in \tau$ olduğundan Teorem 6.1.4 gereği her $v_{(Y,\theta)} \in Y$ için $Y \in N_\tau(v_{(Y,\theta)})$ sağlanır.

Teorem 6.1.4 ve Teorem 6.1.5 teoremlerini ispatladıktan sonra bipolar bulanık supra komşulukların aileleri yardımıyla bipolar bulanık supra topoloji üretilmesi hususunu ele alacağız.

Teorem 6.1.6: $N(u_{(\alpha,\beta)})$ ailesini, $u_{(\alpha,\beta)}$ bipolar bulanık noktasının Teorem 6.1.5'deki özellikleri haiz bir aile olarak ele alalım. Bu taktirde $N(u_{(\alpha,\beta)})$ ailesi U kümesi üzerinde bir tek τ bipolar bulanık supra topolojisi belirler öyle ki, $N_\tau(u_{(\alpha,\beta)}) = N(u_{(\alpha,\beta)})$.

İspat: $\tau = \{X \mid X \in N(u_{(\alpha,\beta)}) \text{ ve } u_{(\alpha,\beta)} \in X\}$ olduğunu kabul edelim. Öncelikle τ 'nın U üzerinde bir bipolar bulanık supra topoloji olduğunu gösterelim.

0_{bp} hiçbir bipolar bulanık nokta içermediğinden $0_{bp} \in \tau$ olduğu açıktır. Ayrıca U üzerinde tanımlı bütün bipolar bulanık noktaların komşuluğu olan bir bipolar bulanık supra komşuluk kümesi mevcuttur ki bu da 1_{bp} olup $1_{bp} \in \tau$.

$\{X_j | j \in J\} \subseteq \tau$ ve $X = \bigcup_{j \in J} X_j$ olsun. Eğer $\exists j \in J$ için $u_{(\alpha, \beta)} \in X_j$ ise Teorem 2.2.5 (2) gereği $u_{(\alpha, \beta)} \in \bigcup_{j \in J} X_j$ dir. $X_j \in N(u_{(\alpha, \beta)})$ ve $X_j \subseteq X$ olduğundan $X = \bigcup_{j \in J} X_j \in N(u_{(\alpha, \beta)})$ ve buradan $\bigcup_{j \in J} X_j \in \tau$ elde edilir.

İspatın geri kalan kısmı için τ 'nın bir ve yalnız bir bipolar bulanık supra komşuluk tarafından üretildiğini yani $N(u_{(\alpha, \beta)}) = N_\tau(u_{(\alpha, \beta)})$ olduğunu göstermeliyiz.

Keyfi $X \in N_\tau(u_{(\alpha, \beta)})$ için $u_{(\alpha, \beta)} \in Y \subseteq X$ olacak şekilde bir $Y \in \tau$ vardır. $u_{(\alpha, \beta)} \in Y$ ve $Y \in \tau$ olduğundan Teorem 6.1.4 gereği $Y \in N(u_{(\alpha, \beta)})$ dir. Buradan Teorem 6.1.5.(3)'e göre $X \in N(u_{(\alpha, \beta)})$ olup $N_\tau(u_{(\alpha, \beta)}) \subseteq N(u_{(\alpha, \beta)})$ elde ederiz.

Tersi için ise $X \in N(u_{(\alpha, \beta)})$ keyfi verilsin. Bu taktirde Teorem 6.1.5.(4) gereği öyle bir $Y \in N(u_{(\alpha, \beta)})$ vardır ki her $v_{(Y, \theta)} \in Y$ için $Y \subseteq X$ ve $Y \in N(v_{(Y, \theta)})$ sağlanır. Her $v_{(Y, \theta)} \in Y$ için $Y \in N(v_{(Y, \theta)})$ olduğundan Teorem 6.1.4 gereği $Y \in \tau$ dur. O halde Y bipolar bulanık supra açık kümesi $u_{(\alpha, \beta)}$ noktasının bir komşuluğudur yani $Y \in N_\tau(u_{(\alpha, \beta)})$ sağlanır. $Y \subseteq X$ olduğundan Teorem 6.1.5.(3) gereği $X \in N_\tau(u_{(\alpha, \beta)})$ olup $N(u_{(\alpha, \beta)}) \subseteq N_\tau(u_{(\alpha, \beta)})$ elde edilir. Sonuç olarak $N(u_{(\alpha, \beta)}) = N_\tau(u_{(\alpha, \beta)})$ dir ve ispat tamamlanır.

Teorem 6.1.7: (U, τ) ve (V, σ) iki bipolar bulanık supra topolojik uzay, $u_{(\alpha, \beta)} \in BPF_P(U)$ ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. Bu taktirde aşağıdakiler denktir.

1. f bipolar bulanık supra sürekli fonksiyondur.
2. Her $Y \in N_\sigma(f(u_{(\alpha, \beta)}))$ için $f^{-1}(Y) \in N_\tau(u_{(\alpha, \beta)})$.
3. Her $u_{(\alpha, \beta)} \in BPF_P(U)$ ve $Y \in N_\sigma(f(u_{(\alpha, \beta)}))$ için $f(X) \subseteq Y$ olacak şekilde bir $X \in N_\tau(u_{(\alpha, \beta)})$ vardır.

İspat:

(1 $\Rightarrow$ 2) Öncelikle $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonunun bipolar bulanık supra sürekli olduğunu kabul edelim ve $u_{(\alpha, \beta)} \in BPF_P(U)$ olsun. $Y \in N_\sigma(f(u_{(\alpha, \beta)}))$ alalım, buna göre $f(u_{(\alpha, \beta)}) \in BPF_P(F)$ ve $F \subseteq Y$ olacak şekilde bir $F \in \sigma$ vardır. f bipolar bulanık supra sürekli

olduğundan $f^{-1}(F) \in \tau$ olup $u_{(\alpha,\beta)} \in f^{-1}(F)$ ve $f^{-1}(F) \subset f^{-1}(Y)$ dir. Böylece $f^{-1}(Y) \in N_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ sağlanır.

(2 $\Rightarrow$ 3) $Y \in N_\sigma(f(u_{(\alpha,\beta)}))$ alalım. Hipotezden $f^{-1}(Y) \in N_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ dir. $X = f^{-1}(Y)$ olarak seçersek $f(X) = f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$ olduğu görülür.

(3 $\Rightarrow$ 1) Bu önermeyi ispatlamak için her $Y \in \sigma$ için $f^{-1}(Y) \in \tau$ olduğunu göstereceğiz. $u_{(\alpha,\beta)} \in f^{-1}(Y)$ olarak alırsak $f(u_{(\alpha,\beta)}) \in Y$ dir ve böylece $Y \in \sigma$ için $Y \in N_\sigma(f(u_{(\alpha,\beta)}))$. Hipotezden $f(X) \subseteq Y$ olacak şekilde bir $X \in N_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ vardır. Buna göre $X \subset f^{-1}(f(X)) \subset f^{-1}(Y)$ dir. Nihayet her $X \in N_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ için $X \subset f^{-1}(Y)$ olup böylelikle $f^{-1}(Y) \in \tau$ dur.

6.2. Bipolar Bulanık Supra Q-Komşuluk

q-Çakışimsılık ve Q-komşuluk kavramı ilk olarak Ming (Ming ve diğ., 1980) tarafından tanımlanmıştır. Bu bölümde bu tanım bipolar bulanık kümelere genişletilip bu sayede bipolar bulanık topolojik uzaylar için Q-komşuluk yapısı incelenecektir.

Tanım 6.2.1:

1. $X, Y \in BPF(U)$ olsun. Bu taktirde X ile Y q-çakışımsıdır denir ancak ve ancak en az bir $u \in U$ için,

$$\mu_X^+(u) + \mu_Y^+(u) > 1 \text{ ve } \mu_X^-(u) + \mu_Y^-(u) < -1$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu durum XqY ile gösterilir.

2. $u_{(\alpha,\beta)} \in BPF_P(U)$ bipolar bulanık noktası X bipolar bulanık kümesi ile q-çakışımsıdır denir ancak ve ancak.

$$\alpha + \mu_X^+(u) > 1 \text{ ve } \beta + \mu_X^-(u) < -1$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu durum $u_{(\alpha,\beta)}qX$ ile gösterilir, aksi hal ise $u_{(\alpha,\beta)}\bar{q}X$ ile ifade edilir.

Örnek 6.2.2: $U = \{u, v\}$ ve

$$X = \{\langle u, 0.9, -0.8 \rangle, \langle v, 0.8, -0.7 \rangle\},$$

$$Y = \{\langle v, 0.2, -0.3 \rangle, \langle v, 0.3, -0.4 \rangle\},$$

olsun. Her $u \in U$ için, $\mu_X^+(u) + \mu_Y^+(u) > 1$ ve $\mu_X^-(u) + \mu_Y^-(u) < -1$ olup XqY .

Önerme 6.2.3: $X, Y \in \text{BPF}(U)$ ve $u \in U$ olsun. Bu taktirde aşağıdakiler sağlanır.

$$1. u_{(\alpha, \beta)} \bar{q} 0_{bp}.$$

$$2. u_{(\alpha, \beta)} q 1_{bp}.$$

$$3. XqY = YqX.$$

$$4. u_{(\alpha, \beta)} \in X \Leftrightarrow u_{(\alpha, \beta)} \bar{q} X^c.$$

$$5. u_{(\alpha, \beta)} q X \Leftrightarrow u_{(\alpha, \beta)} \notin X^c.$$

$$6. X \subseteq Y \Leftrightarrow X \bar{q} Y^c.$$

$$7. XqY \Rightarrow X \cap Y \neq 0_{bp}.$$

$$8. X \bar{q} X^c.$$

$$9. XqY \Leftrightarrow u_{(\alpha, \beta)} q Y \text{ olacak şekilde bir } u_{(\alpha, \beta)} \in X \text{ vardır.}$$

$$10. u_{(\alpha, \beta)} \in X^c \Leftrightarrow \text{Her } u_{(\alpha, \beta)} \text{ için } u_{(\alpha, \beta)} \bar{q} X \text{ dir.}$$

$$11. X \subseteq Y \Rightarrow u_{(\alpha, \beta)} q X \text{ için } u_{(\alpha, \beta)} q Y \text{ sağlanır.}$$

İspat:

1., 2. ve 3 tanımdan açıktır.

$$4. u_{(\alpha, \beta)} \in X \Leftrightarrow \mu_X^+(u) \geq \alpha \text{ ve } \mu_X^-(u) \leq \beta$$

$$\Leftrightarrow \mu_{(X^c)^c}^+(u) \not\geq \alpha \text{ ve } \mu_{(X^c)^c}^-(u) \not\leq \beta$$

$$\Leftrightarrow u_{(\alpha, \beta)} \bar{q} X^c.$$

$$5. u_{(\alpha, \beta)} q X \Leftrightarrow \alpha + \mu_X^+(u) > 1 \text{ ve } \beta + \mu_X^-(u) < -1$$

$$\Leftrightarrow \alpha > 1 - \mu_X^+(u) \text{ ve } \beta < -1 - \mu_X^-(u)$$

$$\Leftrightarrow u_{(\alpha,\beta)} \notin X^c.$$

6. $X \subseteq Y$ olsun. Buna göre her $u \in U$ için $\mu_X^+(u) \leq \mu_Y^+(u)$ ve $\mu_X^-(u) \geq \mu_Y^-(u)$ dir. Buradan,

$$\mu_X^+(u) + \mu_{Y^c}^+(u) = \mu_X^+(u) + 1 - \mu_Y^+(u)$$

$$\leq \mu_Y^+(u) + 1 - \mu_Y^+(u)$$

$$= 1$$

olup $\mu_X^+(u) + \mu_{Y^c}^+(u) \leq 1$ dir. Ayrıca,

$$\mu_X^-(u) + \mu_{Y^c}^-(u) = \mu_X^-(u) - 1 - \mu_Y^-(u)$$

$$\geq \mu_Y^-(u) - 1 - \mu_Y^-(u)$$

$$= -1$$

olup $\mu_X^-(u) + \mu_{Y^c}^-(u) \geq -1$ dir.

Son eşitsizliklere göre $X \bar{q} Y^c$ elde edilir. İspatın tersi de aynı şekilde kolayca gösterilebilir.

7. $X q Y \Rightarrow \mu_X^+(u) + \mu_Y^+(u) > 1$ ve $\mu_X^-(u) + \mu_Y^-(u) < -1$

$$\Rightarrow \mu_X^+(u), \mu_Y^+(u) \neq 0 \text{ ve } \mu_X^-(u), \mu_Y^-(u) \neq 0$$

$$\Rightarrow \mu_X^+(u) \wedge \mu_Y^+(u) \neq 0 \text{ ve } \mu_X^-(u) \vee \mu_Y^-(u) \neq 0$$

$$\Rightarrow X \cap Y \neq 0_{bp}.$$

8. $\mu_X^+(u) + \mu_{X^c}^+(u) = \mu_X^+(u) + 1 - \mu_X^+(u) = 1$ ve

$$\mu_X^-(u) + \mu_{X^c}^-(u) = \mu_X^-(u) - 1 - \mu_X^-(u) = -1.$$

olup $X \bar{q} X^c$ dir.

9. XqY ve $u_{(\alpha,\beta)} \in X$ olsun. Bu taktirde $\mu_X^+(u) + \mu_Y^+(u) > 1$ ve $\mu_X^-(u) + \mu_Y^-(u) < -1$ sağlanır.

$\alpha = \mu_X^+(u)$ ve $\beta = \mu_X^-(u)$ olarak alınırsa istenen elde edilir. Böylelikle $u_{(\alpha,\beta)}qY$ dir.

Tersine $u_{(\alpha,\beta)} \in X$ ve $u_{(\alpha,\beta)}qY$ olduğunu kabul edelim. $u_{(\alpha,\beta)} \in X$ olduğundan $\alpha \leq \mu_X^+(u)$ ve $\beta \geq \mu_X^-(u)$ dir. Böylelikle

$$\mu_X^+(u) + \mu_Y^+(u) \geq \alpha + \mu_Y^+(u) > 1 \text{ ve } \mu_X^-(u) + \mu_Y^-(u) \leq \beta + \mu_Y^-(u) < -1$$

olup XqY dir.

$$10. u_{(\alpha,\beta)} \in X^c \Leftrightarrow \alpha \leq \mu_{X^c}^+(u) \text{ ve } \beta \geq \mu_{X^c}^-(u)$$

$$\Leftrightarrow \alpha \leq 1 - \mu_X^+(u) \text{ ve } \beta \geq -1 - \mu_X^-(u)$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \mu_X^+(u) \leq 1 \text{ ve } \beta + \mu_X^-(u) \geq -1$$

$$\Leftrightarrow u_{(\alpha,\beta)}\bar{q}X$$

11. $X \subseteq Y$ ve $u_{(\alpha,\beta)}qX$ olsun. Buna göre $\alpha + \mu_X^+(u) > 1$ ve $\beta + \mu_X^-(u) < -1$ dir. $X \subseteq Y$ olduğundan

$$\alpha + \mu_Y^+(u) \geq \alpha + \mu_X^+(u) > 1 \text{ ve } \beta + \mu_Y^-(u) \leq \beta + \mu_X^-(u) < -1$$

eşitsizlikleri sağlandığından $u_{(\alpha,\beta)}qY$ dir.

Önerme 6.2.4: Her $j \in J$ için $X_j \in \text{BPF}(U)$ olsun. Bu taktirde

$$1. u_{(\alpha,\beta)}q\left(\bigcap_{j \in J} X_j\right) \Leftrightarrow \text{her } j \in J \text{ için } u_{(\alpha,\beta)}q(X_j) \text{ dir.}$$

$$2. u_{(\alpha,\beta)}q\left(\bigcup_{j \in J} X_j\right) \Leftrightarrow \exists j \in J \text{ öyle ki } u_{(\alpha,\beta)}qX_j.$$

İspat:

1. $u_{(\alpha,\beta)}q\left(\bigcap_{j \in J} X_j\right)$ olsun. O halde $\alpha + \bigwedge_{j \in J} \mu_{X_j}^+(u) > 1$ ve $\beta + \bigvee_{j \in J} \mu_{X_j}^-(u) < -1$ eşitsizlikleri sağlanır. Her $j \in J$ için $\mu_{X_j}^+(u) \geq \bigwedge_{j \in J} \mu_{X_j}^+(u)$ ve $\mu_{X_j}^-(u) \leq \bigvee_{j \in J} \mu_{X_j}^-(u)$

olduğundan

$$\alpha + \mu_{X_j}^+(u) \geq \alpha + \bigwedge_{j \in J} \mu_{X_j}^+(u) > 1 \text{ olup } \alpha + \mu_{X_j}^+(u) > 1$$

ve

$$\beta + \mu_{X_j}^-(u) \leq \beta + \bigvee_{j \in J} \mu_{X_j}^-(u) < -1 \text{ olup } \beta + \mu_{X_j}^-(u) < -1$$

dir. Böylelikle her $j \in J$ için $u_{(\alpha,\beta)} q(X_j)$ dir. Tersine,

$$u_{(\alpha,\beta)} q(X_j), \forall j \in J \Rightarrow \alpha + \mu_{X_j}^+(u) > 1 \text{ ve } \beta + \mu_{X_j}^-(u) < -1, \forall j \in J$$

$$\Rightarrow \alpha + \bigwedge_{j \in J} \mu_{X_j}^+(u) > 1 \text{ ve } \beta + \bigvee_{j \in J} \mu_{X_j}^-(u) < -1$$

$$\Rightarrow u_{(\alpha,\beta)} q(\bigcap_{j \in J} X_j)$$

$$2. u_{(\alpha,\beta)} q(\bigcup_{j \in J} X_j) \Leftrightarrow u_{(\alpha,\beta)} \notin (\bigcup_{j \in J} X_j)^c$$

$$\Leftrightarrow u_{(\alpha,\beta)} \notin \bigcap_{j \in J} (X_j)^c$$

$$\Leftrightarrow u_{(\alpha,\beta)} \notin (X_j)^c, \exists j \in J$$

$$\Leftrightarrow u_{(\alpha,\beta)} qX_j, \exists j \in J$$

Tanım 6.2.5: (U, τ) bipolar bulanık supra topolojik uzay, $u_{(\alpha,\beta)} \in \text{BPF}_P(U)$ ve $X \in \text{BPF}(U)$ olsun. Bu taktirde X 'e, $u_{(\alpha,\beta)}$ bipolar bulanık noktasının Q komşuluğu denir : $\Leftrightarrow u_{(\alpha,\beta)} qY$ ve $Y \subseteq X$ olacak şekilde bir $Y \in \tau$ vardır. $u_{(\alpha,\beta)}$ bipolar bulanık noktasının tüm Q komşuluklarının ailesi $Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ ile gösterilir.

Örnek 6.2.6: $U = \{u, v\}$ ve $\tau = \{0_{bp}, 1_{bp}, X\}$ olarak alalım. Burada;

$$X = \{\langle u, 1, -0.6 \rangle, \langle v, 0.7, -1 \rangle\}$$

dir. Şimdi U üzerinde.

$$u_{(\alpha,\beta)} = \{\langle u, 0.4, -0.5 \rangle\}$$

şeklinde tanımlanan bipolar bulanık noktasını alalım. Buna göre $u_{(\alpha,\beta)}qX$ ve $X \subseteq 1_{bp}$ olup $1_{bp} \in Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ dir.

Uyarı 6.2.7: Bir bipolar bulanık noktanın q -komşuluğu noktayı içermeyebilir. Örneğin

$\tau = \{0_{bp}, 1_{bp}, X, Y\}$ olarak alalım. Burada;

$$X = \{\langle u, 0.7, -0.3 \rangle, \langle v, 0.5, -0.4 \rangle\}, Y = \{\langle u, 0.6, -0.1 \rangle, \langle v, 0.4, -0.1 \rangle\}$$

olup τ 'nin U üzerinde bir bipolar bulanık supra topoloji olduğu açıktır. Şimdi $u_{(\alpha,\beta)} = \{\langle u, 0.5, -0.95 \rangle\}$ bipolar bulanık noktasını alalım. Bu taktirde $u_{(\alpha,\beta)}qY$ ve $Y \subseteq X$ dir ve böylece $X \in Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ elde edilir. Fakat, $\alpha = 0.5 < 0.7 = \mu_X^+(u)$ ve $\beta = -0.95 \not\geq -0.3 = \mu_X^-(u)$ olup $u_{(\alpha,\beta)} \notin X$ dir.

Teorem 6.2.8: (U, τ) bir bipolar bulanık supra topolojik uzay ve $Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$, keyfi $u_{(\alpha,\beta)}$ bipolar bulanık noktasının Q komşuluklarının ailesi olsun. Bu taktirde aşağıdakiler sağlanır.

1. $1_{bp} \in Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ ve $X \in Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ ise $u_{(\alpha,\beta)}qX$ dir.
2. $Y \subseteq X$ ve $Y \in Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ ise $X \in Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ dir.
3. Keyfi $X \in Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ verilsin. Bu taktirde öyle bir $Y \in Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ vardır ki her $v_{(Y,\theta)}qY$ için $Y \subseteq X$ ve $Y \in Q_\tau(v_{(Y,\theta)})$ dir.

İspat:

1. $1_{bp} \in Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ olduğunu göstermek için keyfi $u_{(\alpha,\beta)} \in BPF_p(U)$ bipolar bulanık noktası için $u_{(\alpha,\beta)}qY$ ve $Y \subseteq 1_{bp}$ olacak şekilde bir $Y \in \tau$ bulmalıyız. $Y := 1_{bp}$ olarak alırsak sonucu elde ederiz. Tersine $X \in Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ olsun. Bu taktirde $u_{(\alpha,\beta)}qY$ ve $Y \subseteq X$ olacak şekilde bir $Y \in \tau$ vardır. Böylelikle

$$\alpha + \mu_X^+(u) \geq \alpha + \mu_Y^+(u) > 1 \text{ ve } \beta + \mu_X^-(u) \leq \beta + \mu_Y^-(u) < -1$$

olup $u_{(\alpha,\beta)}qX$ dir.

2. $Y \subseteq X$ ve $Y \in Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ olsun. Bu taktirde $u_{(\alpha,\beta)}qZ$ ve $Z \subseteq Y$ olacak şekilde bir $Z \in \tau$ vardır. $Y \subseteq X$ olduğundan $Z \subseteq X$ ve böylelikle $X \in Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ dir.

3. $X \in Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ olsun. Bu taktirde $u_{(\alpha,\beta)}qY$ ve $Y \subseteq X$ olacak şekilde bir $Y \in \tau$ vardır. $Y := X$ olarak seçersek $Y \in Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ elde ederiz. Şu halde $Y \subseteq X$ ve $Y \in Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ elde ederiz. Tekrardan $Y \in \tau$ olduğundan Y , q-çakışimsız olduğu her bipolar bulanık noktanın bir Q komşuluğudur. Şimdi $v_{(Y,\theta)}qY$ olarak alırsak $Y \in Q_\tau(v_{(Y,\theta)})$ elde ederiz.

Teorem 6.2.9: $Q(u_{(\alpha,\beta)})$, $u_{(\alpha,\beta)}$ bipolar bulanık noktasının Teorem 6.2.8'deki şartları haiz bir aile olsun. Bu taktirde U üzerinde öyle bir τ bipolar bulanık supra topolojisi vardır ki $Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$, $u_{(\alpha,\beta)}$ noktasının τ topolojisine göre komşuluklarının ailesi olmak üzere $Q(u_{(\alpha,\beta)})$ ile $Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ aileleri çakışır.

İspat: $\tau = \{X | X \in Q(u_{(\alpha,\beta)}) \text{ ve } u_{(\alpha,\beta)}qX\} \cup \{0_{bp}\}$ ailesini tanımlayalım. Öncelikle bu ailenin U üzerinde bir bipolar bulanık supra topoloji olduğunu göstermeliyiz. τ 'nin tanımından $0_{bp} \in \tau$ ve Teorem 6.2.8'den $1_{bp} \in \tau$ olduğu görülür. $\{X_j | j \in J\} \subseteq \tau$ olsun. Öncelikle her $j \in J$ için $X_j \in \tau$ olduğundan $X_j \in Q(u_{(\alpha,\beta)})$ ve $u_{(\alpha,\beta)}q(X_j)$ dir. Bu taktirde her $j \in J$ için $X_j \in \tau$ iken $u_{(\alpha,\beta)}q(X_j)$ ve $X_j \subseteq \bigcup_{j \in J} X_j$ sağlandığından $\bigcup_{j \in J} X_j \in Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ sağlanır. Ayrıca her $j \in J$ ve $u \in U$ için, $1 < \alpha + \mu_{X_j}^+(u) \leq \alpha + \bigvee_{j \in J} \mu_{X_j}^+(u)$ ve $-1 > \beta + \mu_{X_j}^-(u) \geq \beta + \bigwedge_{j \in J} \mu_{X_j}^-(u)$ sağlandığından $u_{(\alpha,\beta)}q(\bigcup_{j \in J} X_j)$ elde edilir. Şu halde $\bigcup_{j \in J} X_j \in \tau$ olur. Şimdi $Q(u_{(\alpha,\beta)}) = Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ olduğunu gösterelim.

$X \in Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ verilsin. Bu taktirde $u_{(\alpha,\beta)}qY$ ve $Y \subseteq X$ olacak şekilde bir $Y \in \tau$ vardır. Teorem 6.2.8'e göre $Y \in Q(u_{(\alpha,\beta)})$ ve böylece Teorem 6.2.3. (10) gereği $X \in Q(u_{(\alpha,\beta)})$ olur. Sonuç olarak $Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)}) \subseteq Q(u_{(\alpha,\beta)})$ elde edilir.

Tersi için $X \in Q(u_{(\alpha,\beta)})$ alalım. Bu taktirde Teorem 6.2.8. (3) gereği öyle bir $Y \in Q(u_{(\alpha,\beta)})$ vardır ki her $v_{(Y,\theta)}qY$ için $Y \subseteq X$ ve $Y \in Q(v_{(Y,\theta)})$. Ayrıca $Y \in Q(u_{(\alpha,\beta)})$ olduğundan $u_{(\alpha,\beta)}qY$ dir ve böylelikle $Y \in \tau$ olur. Sonuç olarak $Y \in \tau$ olup $u_{(\alpha,\beta)}qY$ ve $X \in Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ dir. Bu ise $Q(u_{(\alpha,\beta)}) \subseteq Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ olduğunu ve dolayısıyla $Q(u_{(\alpha,\beta)}) = Q_\tau(u_{(\alpha,\beta)})$ eşitliğini elde ettiğimizi gösterir.

7. BİPOLAR BULANIK SUPRA TOPOLOJİK UZAYLARDA KOMPAKTLIK

Bu kısımda bipolar bulanık supra açık örtüm ve bu sayede bipolar bulanık supra kompakt topolojik uzay tanımı verilerek temel bazı sonuçlar edilecek. Akabinde bu şekildeki uzaylar arasında tanımlanan sürekli dönüşümlerin yapısı incelenek. Daha sonra $U \times V$ gibi bir çarpım kümesi üzerinde izdüşüm fonksiyonları vasıtasıyla bipolar bulanık supra topoloji tanımlanacak, bu şekildeki çarpım uzayı için bir örtüm tanımlanacak ve son olarak kompaktlık yapısı incelenecektir.

Tanım 7.1:

1. (U, τ) bir bipolar bulanık supra topolojik uzay ve,

$$\{X_j | j \in J\} = \{\langle u, \mu_{X_j}^+(u), \mu_{X_j}^-(u) \rangle | j \in J\} \quad (7.1)$$

ailesi U üzerindeki bipolar bulanık supra açık kümelerin bir ailesi olsun.

Eğer $\bigcup_{j \in J} X_j = 1_{bp}$ sağlanıyorsa bu şekildeki $\{X_j | j \in J\}$ ailesine U kümesinin bipolar bulanık supra açık örtümü denir. Bu tanıma göre $\bigvee_{j \in J} \mu_{X_j}^+(u) = 1$ ve $\bigwedge_{j \in J} \mu_{X_j}^-(u) = -1$ sağlanır.

2. $\{X_i | i \in J\}$ ailesi U kümesinin bir bipolar bulanık supra açık örtümü olsun. Bu taktirde $\{X_j | j \in J\}$ ailesinin sonlu bir alt ailesine bipolar bulanık supra sonlu alt örtüm denir.

3. $\mathcal{F} = \{K_j | j \in J\} = \{\langle u, \mu_{K_j}^+(u), \mu_{K_j}^-(u) \rangle | j \in J, u \in U\}$ ailesi U üzerindeki bipolar bulanık supra kapalı kümelerin bir ailesi olsun. Bu taktirde;

$$\{\langle u, \mu_{K_{j_\alpha}}^+(u), \mu_{K_{j_\alpha}}^-(u) \rangle | \alpha = 1, 2, \dots, n, u \in U\} \quad (7.2)$$

alt ailesi,

$$\bigcap_{\alpha=1}^n \{\langle u, \mu_{K_{j_\alpha}}^+(u), \mu_{K_{j_\alpha}}^-(u) \rangle\} \neq 0_{bp} \quad (7.3)$$

koşulunu sağlarsa bu şekildeki $\mathcal{F}$ ailesine sonlu arakesit özelliğine sahiptir denir.

Tanım 7.2: (U, τ) bir bipolar bulanık supra topolojik uzay olsun. Bu taktirde U nun her bipolar bulanık supra açık örtümünün sonlu bir alt örtümü varsa (U, τ) ya bipolar bulanık supra kompakt topolojik uzay denir.

Teorem 7.3: (U, τ) bipolar bulanık supra kompakt topolojik uzaydır $\Leftrightarrow$ Her bipolar bulanık supra kapalı kümeler ailesi sonlu arakesit özelliğine sahiptir.

İspat: $(\Rightarrow)$ (U, τ) bipolar bulanık supra kompakt topolojik uzay ve $\mathcal{A} := \{X_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$, U nun sonlu arakesit özelliğine sahip bipolar bulanık supra kapalı kümelerinin bir ailesi olsun. Bu taktirde $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha = 0_{bp}$ olup $1_{bp} = (0_{bp})^c = (\bigcap_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (X_\alpha)^c$ Böylelikle $\{(X_\alpha)^c\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesi U kümesinin bipolar bulanık supra açık örtümü olur. Hipotezden bu bipolar bulanık supra açık alt ailenin sonlu bir bipolar bulanık alt örtümü vardır öyle ki $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 1_{bp} = \bigcup_{j=1}^n ((X_{\alpha_j})^c)$ dir. Bu taktirde,

$$0_{bp} = (1_{bp})^c = \left(\bigcup_{j=1}^n ((X_{\alpha_j})^c) \right)^c = \bigcap_{j=1}^n X_{\alpha_j}$$

dir. Bu ise $\mathcal{A}$ ailesinin sonlu arakesit özelliğine sahip olmasıyla çelişir. Yani $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \neq 0_{bp}$.

$(\Leftarrow)$ Kabul edelim ki U kümesi bipolar bulanık supra kompakt olmasın. Bu durumda U kümesinin bir $\mathcal{A} := \{X_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ bipolar bulanık supra açık örtümü vardır öyle ki $\mathcal{A}$ 'nın hiç bir sonlu alt örtümü U 'nun bipolar bulanık supra örtümü değildir. Bu taktirde her $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Lambda$ için $1_{bp} \neq \bigcup_{j=1}^n X_{\alpha_j}$ olup,

$$0_{bp} = (1_{bp})^c \neq \left(\bigcup_{j=1}^n X_{\alpha_j} \right)^c \text{ dir ve buradan } \bigcap_{j=1}^n ((X_{\alpha_j})^c) \neq 0_{bp} \text{ dir.}$$

Böylelikle $\{(X_{\alpha_j})^c | \alpha \in \Lambda\}$, sonlu arakesit özelliğine sahip bipolar bulanık supra kapalı kümelerin ailesidir. $1_{bp} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ sağlandığından,

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} ((X_\alpha)^c) = \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \right)^c = 0_{bp}$$

dir. Bu ise hipotez ile çelişir ve dolayısıyla U bipolar bulanık supra kompaktır.

Teorem 7.4: (U, τ) ve (V, σ) iki bipolar bulanık supra topolojik uzay ve $f: (U, \tau) \rightarrow (V, \sigma)$ bir örten ve bipolar bulanık supra sürekli fonksiyon olsun. Bu taktirde (U, τ) bipolar bulanık supra kompakt topolojik uzay ise (V, σ) da bipolar bulanık supra kompakt topolojik uzaydır.

İspat: $\mathcal{A}$, V 'nin bir bipolar bulanık supra açık örtümü olsun. Bu taktirde f sürekli olduğundan $\mathcal{B} = \{f^{-1}(Y) | Y \in \mathcal{A}\}$ kümesi, U 'nun bir bipolar bulanık supra açık örtümüdür. (U, τ) bipolar bulanık supra kompakt olduğundan $\mathcal{B}$,

$$\{f^{-1}(Y_1), f^{-1}(Y_2), \dots, f^{-1}(Y_n)\}$$

şeklinde bir sonlu alt örtüme sahiptir. f örten olduğundan $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ kümesi $\mathcal{A}$ nın sonlu bir alt örtümü olup (V, σ) bipolar bulanık supra kompakt topolojik uzaydır.

Tanım 7.5: (U, τ) bir bipolar bulanık supra topolojik uzay ve $X \in \text{BPF}(U)$ olmak üzere (X, τ_X) bipolar bulanık supra alt uzay olsun. U kümesinin alt kümelerinden oluşan bir $\mathfrak{B}$ ailesi, elemanlarının birleşimi X kümesini içeriyor ise X in bipolar bulanık supra örtümüdür denir.

Teorem 7.6: (U, τ) ve (V, σ) iki bipolar bulanık supra topolojik uzay ve $f: (U, \tau) \rightarrow (V, \sigma)$ bipolar bulanık supra sürekli fonksiyon olsun. Bu taktirde X , (U, τ) 'da bir bipolar bulanık supra kompakt küme ise $f(X)$, (V, σ) 'da bipolar bulanık supra kompaktır.

İspat: Açıktır.

Teorem 7.7: (U, τ) bir bipolar bulanık supra kompakt topolojik uzay ve X , üzerinde bulanık supra kapalı küme olsun. Bu taktirde (X, τ_X) bir bipolar bulanık supra kompakt topolojik uzaydır.

İspat: Kabul edelim ki hipotez sağlansın ve $\mathcal{A}$, X in U üzerindeki bipolar bulanık supra açık kümelerden oluşan açık örtümü olsun. X bipolar bulanık supra kapalı küme olduğundan X^c bipolar bulanık supra açık kümedir. Eğer X^c kümesine $\mathcal{A}$ ailesini eklersek U kümesinin $\mathfrak{B} = \mathcal{A} \cup X^c$ biçiminde bir bipolar bulanık supra açık örtümünü elde ederiz. Bu $\mathfrak{B}$ ailesinin bazı sonlu alt aileleri X için bir bipolar bulanık supra örtümdür. Eğer bu alt örtümler X^c kümesini içeriyorsa X^c kümesini bu örtümden çıkarabiliriz. Diğer

durumlarda alt aileyi olduğu gibi alalım. Bu şekildeki aile $\mathcal{A}$ nın sonlu bir alt ailesi olup X için bir bipolar bulanık supra örtümdür.

Teorem 7.8: (U, τ) ve (V, σ) iki bipolar bulanık supra topolojik uzay ve $(U \times V, \delta)$ bu bipolar bulanık supra topolojik uzayların çarpımları olsun. Bu taktirde $(U \times V, \delta)$ bir bipolar bulanık supra kompakt topolojik uzaydır ancak ve ancak (U, τ) ve (V, σ) birer bipolar bulanık supra kompakt topolojik uzaydır.

İspat:

$(\Rightarrow)$ p_1 ve p_2 izdüşüm fonksiyonları bipolar bulanık supra sürekli olduklarından açıktır.

$(\Leftarrow)$ (U, τ) ve (V, σ) iki bipolar bulanık supra kompakt topolojik uzay olsun. Bu taktirde U ve V kümelerinin sırasıyla $\{G_j : j \in J\}$ ve $\{H_j : j \in J\}$ şeklinde iki bipolar bulanık supra açık örtümünden bahsedebiliriz. Buna göre

$$\bigvee_{j \in J} \mu_{G_j}^+(u) = 1, \bigwedge_{j \in J} \mu_{G_j}^-(u) = -1 \text{ ve } \bigvee_{j \in J} \mu_{H_j}^+(v) = 1, \bigwedge_{j \in J} \mu_{H_j}^-(v) = -1.$$

eşitlikleri sağlanır. Böylelikle,

$$\mathcal{A} = \{(G_j \times 1_{bp_V}) \cup (1_{bp_U} \times H_j) : j \in J\}$$

kümesi $U \times V$ nin bir bipolar bulanık supra açık örtümüdür. Burada,

$$G_j = \{\langle u, \mu_{G_j}^+(u), \mu_{G_j}^-(u) \rangle : u \in U\} \in \tau \text{ ve } H_j = \{\langle v, \mu_{H_j}^+(v), \mu_{H_j}^-(v) \rangle : v \in V\} \in \sigma$$

dir. $U \times V$ nin bipolar bulanık supra kompakt olduğunu gösterebilmek için bu şekildeki $\mathcal{A}$ örtümünün sonlu bir alt örtüme sahip olduğunu göstermeliyiz. U ve V bipolar bulanık supra kompakt olduklarından $\{G_j : j \in J\}$ ve $\{H_j : j \in J\}$ örtümlerinin sonlu alt örtümleri mevcuttur. Bu taktirde J sonlu bir J^* altkümesi için,

$$\bigvee_{j \in J^*} \mu_{G_j}^+(u) = 1, \bigwedge_{j \in J^*} \mu_{G_j}^-(u) = -1 \text{ ve } \bigvee_{j \in J^*} \mu_{H_j}^+(v) = 1, \bigwedge_{j \in J^*} \mu_{H_j}^-(v) = -1$$

olup

$\mathcal{A}$ 'nın $\{(G_j \times 1_{bp_V}) \cup (1_{bp_U} \times H_j) : j \in J^*\}$ alt ailesi $U \times V$ için bir bipolar bulanık supra örtümdür. Sonuç olarak $U \times V$ bipolar bulanık supra kompaktır.

8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bipolar bulanık kümeler vasıtasıyla bipolar bulanık supra topoloji tanımlanmış ve bu şekildeki uzayların açık ve kapalı kümelerinin özellikleri incelenmiştir.

Bipolar bulanık supra topolojik uzaylar arasında bazı sürekli fonksiyonların tanımı verilmiş ve temel sonuçları elde edilmiştir. Bu şekildeki sürekli fonksiyonların bileşkelerinin süreklilikleri incelenmiş ve bazı ters örnekler verilmiştir.

Klasik komşuluk ve Q -komşuluk yapıları ve bu sayede bipolar bulanık supra topoloji üretme konuları ele alınmıştır.

Son olarak bipolar bulanık supra örtüm ve kompaktlık tanımlarının sonuçları elde edilip bu şekildeki uzaylar arasında tanımlanan bulanık dönüşümlerin yapıları incelenmiştir. Kartezyen çarpım kümesi üzerine bipolar bulanık topoloji tanımlanıp kompaktlık konusu incelenmiştir.

Bunun yanı sıra bipolar bulanık supra topolojik uzayların ayırma aksiyomları ve bağlantılılık gibi konuları ele alınabilir.

KAYNAKLAR

- Abd El-Latif, M. E. (2019). Some Properties of Fuzzy Supra Soft Topological Spaces. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 12 (3), 999-1017.
- Abd El-Monsef, M. E., Ramadan, A. E. (1987). On Fuzzy Supra Topological Spaces. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 18 (4), 322-329.
- Anitha, M. S., Muruganantha, K. L., Arjunan K. (2013). Notes on Bipolar Valued Fuzzy Subgroups of a Group. *The Bulletin of Society for Mathematical Services and Standards*, 7, 40-45.
- Al-Shami, T. M., Shafei, M. E. (2019). On Supra Topological Ordered Spaces. *Arab Journal of Basic and Applied Science*, 26 (1), 433-445.
- Al-Shami, T. M., Shafei, M. E. (2019). Two Types of Separation Axioms on Supra Soft Topological Spaces. *Demonstratio Mathematica*, 52, 147-165.
- Al-Shami, T. M. (2016). Some Results Related to Supra Topological Spaces. *Journal of Advanced Studies in Topology*, 7 (4), 283-294.
- Atanassov, K. T. (1986). Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20, 87-96.
- Azhagappan, M., Kamaraj, M. (2016). Notes on Bipolar Valued Fuzzy RW-Closed and Bipolar Valued Fuzzy RW-Open Sets in Bipolar Valued Fuzzy Topological Spaces. *International Journal of Mathematical Archive*, 7 (3), 30-36.
- Chang, C. L. (1968). Fuzzy Topological Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 24, 182–190.
- Jayaparthasaraty, G., Little Flower, V. F., Arockia Dasan, M. (2019). Neutrosophic Supra Topological Applications in Data Mining Process. *Neutrosophic Sets and Systems*, 27, 80-97.
- Kim, J., Samanta, S. K., Lim, P. K., Lee, J. G., Hur, K. (2019). Bipolar Fuzzy Topological Spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 17 (3), 205-229.
- Lee, K. M. (2000). Bipolar-valued Fuzzy Sets and Their Basic Applications. *Proc. Int. Conf. On Intelligent Technologies*, Bangkok, Thailand, 307-312.
- Lee, K. M. (2004). Comparison of Interval-Valued Fuzzy Sets, Intuitionistic Fuzzy Sets, and Bipolarvalued Fuzzy Sets. *J. Fuzzy Logic Intelligent Systems*, 14 (2), 125-129.
- Lowen, R. (1976). Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Compactness. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 56, 621–633.
- Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. R. (2001). Fuzzy Soft Sets. *J. Fuzzy Math.*, 9 (3), 589–602.

- Mashhour, A. S., Allam, A. A., Mahmoud, F. S., Khedr, F. H. (1983). On Supratopological Spaces. *Indian J. Pure and Appl. Math.*, 14 (4), 502-510.
- Ming, P. P., Ming, L. Y. (1980). Fuzzy Topology. I. Neighborhood Structure of a Fuzzy Point and Moore-Smith Convergence*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 76, 571-599.
- Munkres, J. (2014). *Topology* (2nd ed.). Pearson Education Limited: Malaysia.
- Palaniappan, N. (2002). *Fuzzy Topology*, Narosa Publications: India.
- Pazar Varol, B., Aygünoğlu, A., Aygün, H. (2014). Neighborhood Structures of Fuzzy Soft Topological Spaces. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 27, 2127–2135.
- Pazar Varol, B., (2021). An Approach to Bipolar Fuzzy Submodules. *TWMS J. App. and Eng. Math.*, 11 (1), 168-175.
- Preevana S., Kamaraj, Dr. M. (2018). On Bipolar Valued Fuzzy Sets and Their Operations. *Asian Journal of Science and Technology*, 9 (9), 8557-8564.
- Ray C. R., Dey, S. (2021) Relation of Quasi-Coincidence For Neutrosophic Sets. *Neutrosophic Sets and Systems*, 46 (28), 402-415.
- Srivastava, M., Sinha, P. (2015). Supra Fuzzy Topological Space and Hausdorffness. *International Journal of Mathematical Archive*, 6 (8), 81-85.
- Subbian, S. P., Kamaraj, M. (2018). Bipolar-Valued Fuzzy Ideals of Ring and Bipolar-Valued Fuzzy Ideal Extensions in Subrings. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 61 (3), 155-163.
- Turanlı, N. (2003). An Overview of Intuitionistic Fuzzy Supra Topological Spaces. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 8, 17-26.
- Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8, 338–353.
- Zadeh, L. (1975). The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning-I. *Inform. Sci.*, 8, 199–249.
- Zhang, W-R. (1998). Bipolar fuzzy sets. *Proc. of IEEE*, 835–840.
- Zhang, W-R. (1994). Bipolar Fuzzy Sets and Relations: a Computational Framework for Cognitive Modeling and Multiagent Decision Analysis. *Proc. of IEEE*, 305–309.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

Malkoç, H., Pazar Varol, B. (2021). Bipolar Fuzzy Supra Topology. *4th International E-Conference on Mathematical Advances and Applications*, 26-29 Mayıs.

Malkoç, H., Pazar Varol, B. (2021). Neighborhood Structures of Bipolar Fuzzy Supra Topological Spaces, *1st International Lotfi A. Zadeh Conference Fuzzy Logic and Application*. 15-17 Aralık.

Malkoç, H., Pazar Varol, B. (2022). Bipolar Fuzzy Supra Topological Spaces. *Sakarya University Journal of Science*. 26 (1), 155-167.



ÖZGEÇMİŞ

İlk, orta ve lise öğrenimini Kocaeli’de tamamladı. 2014 yılında Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümüne başladı. 2015 yılında yatay geçiş ile Kocaeli Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümüne geçiş yaptı. 2019 yılında mezun oldu. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesini Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans programına başladı.

